

Ю. Владимиров

# ГЕОМЕТРОФИЗИКА



Лаборатория  
ЗНАНИЙ

---

Ю. Владимиров

# ГЕОМЕТРОФИЗИКА

5-е издание, электронное

*Рекомендовано  
УМС по физике УМО по классическому  
университетскому образованию вузов РФ  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности  
010701 — физика*



Москва  
Лаборатория знаний  
2020

---

**Владимиров Ю. С.**

В57 Геометрофизика / Ю. С. Владимиров. — 5-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2020. — 543 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-679-3

Книга посвящена изложению и анализу геометрического подхода к описанию физического мира, в частности общей теории относительности А. Эйнштейна и многомерной геометрической теории физических взаимодействий. В первой части дано введение в общую теорию относительности. Во второй части детально рассматриваются теория относительности, ее формулировки и обобщения. Третья часть посвящена изложению многомерной геометрической теории микромира. В четвертой части произведен метафизический анализ геометрического и иных подходов к физике с целью обоснования необходимости перехода к более совершенной картине мира.

Книга адресована студентам и преподавателям вузов физико-математического профиля, физикам-теоретикам и философам.

УДК 530.1; 539.1

ББК 22.31

**Деривативное издание на основе печатного аналога:** Геометрофизика / Ю. С. Владимиров. — 2-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 536 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0303-8.

**В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации**

---

---

# Оглавление



Предисловие ко второму изданию .....	10
Предисловие к первому изданию .....	12
Введение .....	14
<b>Часть I. Общая теория относительности и геометрическое миропонимание .....</b>	<b>19</b>
Глава 1. <b>Основные понятия общей теории относительности .....</b>	<b>20</b>
1.1. Координатные преобразования и тензоры .....	21
1.1.1. Координатные системы .....	21
1.1.2. Основы тензорной алгебры .....	24
1.2. Метрический тензор .....	27
1.3. Ковариантное дифференцирование .....	31
1.3.1. Уравнения геодезических линий .....	31
1.3.2. Ковариантные производные .....	35
1.4. Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна .....	36
1.4.1. Тензор кривизны .....	37
1.4.2. Уравнения Эйнштейна .....	39
1.4.3. Координатные условия .....	42
1.5. Уравнения движения пробных частиц .....	44
1.5.1. Монопольные частицы .....	45
1.5.2. Дипольные частицы .....	46
Глава 2. <b>Основные следствия общей теории относительности .....</b>	<b>49</b>
2.1. Метрика Шварцшильда .....	50
2.1.1. Вывод решения Шварцшильда .....	51
2.1.2. Анализ метрики Шварцшильда и ее обобщений .....	54
2.1.3. Уравнения геодезических линий .....	58
2.1.4. Смещение перигелия Меркурия .....	61
2.1.5. Эффект отклонения лучей света .....	64
2.2. Метрика Керра .....	67
2.2.1. Анализ метрики Керра .....	67
2.2.2. Уравнения геодезических линий в метрике Керра .....	70
2.2.3. Некоторые эффекты в метрике Керра .....	73
2.3. Космологические модели .....	76
2.3.1. Космология. Постановка задачи .....	76
2.3.2. Пространства постоянной кривизны .....	79
2.3.3. Однородные изотропные модели Вселенной .....	82
2.3.4. Космологическое красное смещение .....	87

---

2.3.5. Критическая плотность и возраст Вселенной .....	90
<b>Глава 3. Монадный метод описания систем отсчета .....</b>	<b>93</b>
3.1. Понятие системы отсчета .....	94
3.2. Алгебра монадного метода .....	96
3.2.1. Алгебра общековариантного монадного метода .....	96
3.2.2. Метод хронометрических инвариантов .....	99
3.2.3. Метод кинеметрических инвариантов .....	102
3.3. Монадные физико-геометрические тензоры .....	107
3.4. Монадные операторы дифференцирования .....	110
3.5. Монадный вид геометрических уравнений .....	113
3.5.1. Уравнения геодезических линий .....	114
3.5.2. Уравнения Эйнштейна и тождества .....	117
3.6. Монадный метод в точных решениях .....	119
3.6.1. Монадный метод в метриках Фридмана .....	120
3.6.2. Монадный метод в метрике Шварцшильда .....	122
3.6.3. Монадный метод в метрике Керра .....	126
3.6.4. Монадный метод в метрике Геделя и ее обобщениях ...	129
3.7. Некоторые выводы и замечания .....	131
<b>Часть II. Четырехмерная картина мира .....</b>	<b>133</b>
<b>Глава 4. Искривленное (риманово) пространство-время .....</b>	<b>134</b>
4.1. Метрика пространства-времени и ее обобщения .....	135
4.1.1. Концептуальные вопросы введения метрики .....	135
4.1.2. Геометрия Финслера .....	138
4.2. Параллельный перенос и геометрии Схоутена .....	139
4.2.1. Геометрии Схоутена .....	140
4.2.2. Физические теории в обобщенных геометриях .....	143
4.3. Производные Ли и симметрии .....	147
4.3.1. Производные Ли .....	148
4.3.2. Уравнения и векторы Киллинга .....	149
4.3.3. Классификация однородных пространств .....	154
4.4. Геометрический смысл тензора кривизны .....	156
4.4.1. Перемещения, ассоциированные с циклом .....	157
4.4.2. Уравнения девиаций геодезических линий .....	160
4.5. Алгебраическая классификация Петрова .....	162
4.5.1. Характеристическая матрица .....	163
4.5.2. Алгебраическая классификация Петрова .....	166
4.5.3. Инварианты тензора кривизны и векторы Дебеве в про- странствах различных подтипов .....	168
4.5.4. Примеры точных решений различных подтипов .....	170
4.6. Соответствия между римановыми пространствами .....	172
4.6.1. Конформное соответствие .....	172
4.6.2. Проективное соответствие римановых пространств ....	174

Глава 5. <b>Гравитация и электромагнетизм в 4-мерном пространстве-времени</b> .....	175
5.1. Электромагнитное поле в ОТО .....	176
5.1.1. Уравнения Максвелла и Клейна—Фока в искривленном пространстве-времени .....	176
5.1.2. «Частицеподобные» точные решения .....	179
5.2. Первая аналогия гравитации и электромагнетизма .....	181
5.2.1. Лагранжев формализм электромагнитного поля .....	182
5.2.2. Лагранжева формулировка ОТО в метрическом представлении .....	183
5.2.3. Формализм Палатини .....	185
5.3. Вторая аналогия гравитации и электромагнетизма .....	186
5.3.1. Уравнения Максвелла в монадном виде .....	186
5.3.2. Системы отсчета, ассоциированные с электромагнитным полем .....	188
5.3.3. Классификация матриц 3-мерных составляющих тензора электромагнитного поля .....	190
5.3.4. Алгебраическая классификация систем отсчета .....	191
5.4. Третья аналогия гравитации и электромагнетизма .....	192
5.4.1. Гамильтонова формулировка электромагнетизма .....	193
5.4.2. Гамильтонова формулировка теории гравитации .....	194
5.4.3. Суперпространство Уилера—ДеВитта .....	197
5.5. Четвертая аналогия гравитации и электромагнетизма .....	200
5.5.1. Дуально сопряженные тензоры кривизны .....	202
5.5.2. Квадратичные по тензору кривизны лагранжианы .....	204
5.5.3. Классификация матриц электромагнитного тензора 2-го ранга .....	206
5.6. Пятая аналогия гравитации и электромагнетизма .....	207
5.7. Выводы и замечания .....	209
Глава 6. <b>Системы отсчета и ориентаций</b> .....	212
6.1. Хроногеометрия .....	214
6.2. Тетрадный метод .....	218
6.2.1. Алгебра тетрадного метода .....	218
6.2.2. Тетрадные операторы дифференцирования .....	221
6.2.3. Тетрадные физико-геометрические тензоры .....	223
6.2.4. Метод изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза .....	225
6.3. Диадный метод .....	228
6.3.1. Алгебра диадного метода .....	228
6.3.2. Диадные физико-геометрические тензоры .....	234
6.3.3. Диадные операторы дифференцирования .....	237
6.4. Диарный метод .....	239
6.4.1. Алгебра диарного метода .....	240
6.4.2. Диарные физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования .....	243

Глава 7. <b>Фермионная материя в общей теории относительности</b> . . . . .	244
7.1. Спиноры и биспиноры . . . . .	245
7.1.1. Двухкомпонентные спиноры . . . . .	245
7.1.2. Биспиноры . . . . .	249
7.1.3. 1 + 3-расщепление в пространстве спиноров . . . . .	251
7.1.4. Алгебры Клиффорда и 4-компонентные спиноры . . . . .	255
7.2. Уравнения Дирака в плоском пространстве-времени . . . . .	258
7.2.1. Обсуждение уравнений Дирака . . . . .	258
7.2.2. Спинорная запись фундаментальных уравнений . . . . .	260
7.3. Фермионы в искривленном пространстве-времени . . . . .	262
7.3.1. Уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени . . . . .	262
7.3.2. Квадрирование уравнений Дирака . . . . .	264
<b>Часть III. Многомерность физического мира</b> . . . . .	267
Глава 8. <b>Пятимерные теории Калуцы и Клейна</b> . . . . .	269
8.1. Основания перехода к пятимерной теории . . . . .	270
8.2. Геометрический прообраз гравитационно-электромагнитных взаимодействий . . . . .	274
8.2.1. Монадный метод редуцирования (4 + 1-расщепления) . . . . .	274
8.2.2. Геометрические уравнения в монадном виде . . . . .	277
8.3. Пятимерная теория Калуцы (упрощенный вариант) . . . . .	278
8.3.1. Переход от 5-мерной геометрии к электродинамике в ОТО . . . . .	278
8.3.2. Негеометрические заряженные поля в теории Калуцы . . . . .	281
8.3.3. Спинорное поле . . . . .	282
8.4. Теория Калуцы со скаляризмом . . . . .	284
8.4.1. Скаляризм в электродинамике и его интерпретация . . . . .	285
8.4.2. Сферически-симметричные решения многомерных уравнений Эйнштейна . . . . .	288
8.4.3. Скаляризм и конформный фактор . . . . .	291
8.4.4. Эффекты скаляризма в 5-мерной теории . . . . .	293
8.5. Вариант 5-мерной теории Клейна—Фока—Румера . . . . .	296
8.5.1. Общая теория относительности как 5-оптика . . . . .	297
8.5.2. 5-Мерная теория Клейна—Фока—Румера . . . . .	298
8.5.3. Квантовая механика и геометрофизика . . . . .	301
8.6. Анализ критических замечаний по 5-мерию . . . . .	303
Глава 9. <b>8-Мерная геометрическая теория гравитационно-сильных взаимодействий</b> . . . . .	308
9.1. Основания 8-мерной теории . . . . .	309
9.2. Геометрический прообраз взаимодействий . . . . .	313
9.2.1. Тетрадный метод в 8-мерной теории . . . . .	313
9.2.2. Геометрическая часть гиперплотности лагранжиана . . . . .	317
9.2.3. Фермионная часть гиперплотности лагранжиана . . . . .	319
9.3. Сведения из теории сильных взаимодействий . . . . .	321
9.4. Принцип соответствия . . . . .	325
9.4.1. Условия соответствия двух теорий в бозонном секторе . . . . .	325

9.4.2. Условия на коэффициенты из фермионного сектора . . .	329
9.4.3. Заряды взаимодействий с нейтральными полями . . . . .	330
9.5. Массовый сектор 8-мерной геометрической теории . . . . .	331
9.5.1. Проблема планковских масс заряженных бозонных полей . . . . .	331
9.5.2. Конформное преобразование . . . . .	332
<b>Глава 10. Геометризация электрослабых взаимодействий . . . . .</b>	<b>337</b>
10.1. Основания 7-мерной теории . . . . .	338
10.2. Переход от 8-мерия к 7-мерной теории . . . . .	341
10.2.1. Бозонный сектор . . . . .	341
10.2.2. Кварки в 7-мерной теории . . . . .	344
10.3. Бозонный сектор 7-мерной теории . . . . .	346
10.3.1. Триадный метод в 7-мерной теории . . . . .	346
10.3.2. Геометрическая часть плотности лагранжиана . . . . .	349
10.4. Сведения из модели электрослабых взаимодействий . . . . .	351
10.4.1. Бозонный сектор калибровочной модели . . . . .	351
10.4.2. Фермионный сектор калибровочной модели . . . . .	352
10.5. Принцип соответствия бозонных секторов . . . . .	355
10.5.1. Соответствие с калибровочной моделью . . . . .	355
10.5.2. Соответствие с 8-мерной теорией . . . . .	356
10.6. Заряды взаимодействий с нейтральными бозонами . . . . .	358
10.6.1. Нейтральные векторные поля и заряды кварков . . . . .	358
10.6.2. Заряды лептонов . . . . .	361
10.7. Фермионный сектор 7-мерной теории . . . . .	364
10.7.1. Септадный метод и обобщенные матрицы Дирака . . . . .	364
10.7.2. Лагранжиан взаимодействия фермионов с векторными бозонами . . . . .	367
10.8. Массовый сектор 7-мерной теории . . . . .	370
10.8.1. Массы векторных бозонов . . . . .	370
10.8.2. Хиггсовские скалярные бозоны в калибровочной модели . . . . .	373
<b>Глава 11. 6-Мерная теория Калуцы—Клейна . . . . .</b>	<b>376</b>
11.1. Переход от 7-мерия к 6-мерной теории . . . . .	377
11.1.1. Бозонный сектор . . . . .	377
11.1.2. Фермионный сектор . . . . .	379
11.2. 6-Мерная геометрическая теория . . . . .	380
11.2.1. Самостоятельный вариант 6-мерной теории . . . . .	380
11.2.2. Физическая интерпретация 6-мерной теории . . . . .	382
11.3. Физические поля негеометрической природы . . . . .	385
11.3.1. Негеометрическое скалярное поле . . . . .	385
11.3.2. Конформный фактор и массовый сектор 6-мерной теории . . . . .	387
11.4. Магнитные поля астрофизических объектов . . . . .	389
11.5. Шестимерие с двумя времени-подобными координатами . . . . .	392
11.6. Выводы, замечания, гипотезы . . . . .	396



<b>Часть IV. Метафизические основы миропонимания</b> .....	<b>399</b>
Глава 12. <b>Метафизические парадигмы в фундаментальной физике</b> ....	<b>401</b>
12.1. Теории гравитации в триалистической парадигме .....	<b>403</b>
12.1.1. Неэйнштейновские теории гравитации .....	<b>403</b>
12.1.2. Релятивистская теория гравитации .....	<b>405</b>
12.1.3. «Перелицовка» ОТО в теорию триалистической парадигмы .....	<b>408</b>
12.2. Калибровочная теория взаимодействий .....	<b>410</b>
12.2.1. Калибровочная теория электромагнетизма .....	<b>410</b>
12.2.2. Калибровочная теория электрослабых взаимодействий .....	<b>412</b>
12.2.3. Калибровочный подход к описанию гравитации .....	<b>414</b>
12.3. Теория гравитации в теоретико-полево мiропонимании ....	<b>416</b>
12.3.1. Суперпространство .....	<b>416</b>
12.3.2. Суперполевой мультиплет .....	<b>419</b>
12.3.3. Теории супергравитации .....	<b>421</b>
12.3.4. Теория суперструн .....	<b>424</b>
12.4. Геометрическое миропонимание .....	<b>426</b>
12.4.1. Идея всеобщей геометризации физики .....	<b>426</b>
12.4.2. Теория Райнича—Уилера и ее обобщения .....	<b>428</b>
Глава 13. <b>Концепция дальнего действия</b> .....	<b>432</b>
13.1. Принцип действия Фоккера .....	<b>433</b>
13.2. Фейнмановская теория поглотителя .....	<b>437</b>
13.3. Прямое гравитационное взаимодействие .....	<b>441</b>
13.4. ОТО в концепции дальнего действия .....	<b>443</b>
13.5. Концепция дальнего действия в многомерии .....	<b>445</b>
13.5.1. Теория Калуцы в концепции дальнего действия .....	<b>446</b>
13.5.2. Клейновское 5-мерие в концепции дальнего действия ...	<b>449</b>
13.6. Концепции дальнего действия и близкого действия .....	<b>452</b>
13.7. Выводы из сравнения метафизических парадигм .....	<b>456</b>
Глава 14. <b>Парадигмальные проблемы общей теории относительности</b> ..	<b>461</b>
14.1. Эффекты ОТО в разных метафизических парадигмах .....	<b>462</b>
14.2. Проблема энергии-импульса гравитационного поля .....	<b>464</b>
14.2.1. Ситуация с законами сохранения энергии и импульса в ОТО .....	<b>465</b>
14.2.2. Критика псевдотензорного подхода .....	<b>468</b>
14.3. Системы отсчета и законы сохранения .....	<b>473</b>
14.3.1. Монадные векторы энергии .....	<b>473</b>
14.3.2. Тетрадные комплексы энергии-импульса .....	<b>476</b>
14.3.3. Определения грави-инерциальной суперэнергии .....	<b>478</b>
14.4. Проблема гравитационных волн .....	<b>480</b>
14.4.1. Трудности общепринятой трактовки гравитационных волн .....	<b>481</b>
14.4.2. Алгебраический подход к определению гравитационных волн .....	<b>483</b>

---

14.4.3. Референционный анализ гравиинерциальных волновых процессов .....	485
14.4.4. Слабые гравиинерциальные волны .....	489
14.5. Воздействие гравиинерциальных волн на прибор .....	494
14.5.1. Поведение свободных пробных масс в слабой плоской гравиинерциальной волне .....	494
14.5.2. Воздействие гравиинерциальных волн на детектор ..	496
14.6. Проблема квантования гравитации .....	501
14.6.1. Метафизический характер проблемы квантования гравитации .....	501
14.6.2. Замечания по некоторым исследованиям проблемы квантования гравитации .....	503
14.6.3. Гипотеза гравитонов .....	505
14.7. Пределы измеримости геометрических понятий .....	509
14.7.1. Планковская длина и коллективные ошибки .....	509
14.7.2. Мысленные эксперименты .....	512
<b>Заключение</b> .....	<b>516</b>
<b>Литература</b> .....	<b>521</b>
<b>Предметный указатель</b> .....	<b>531</b>

---

---

---

# Предисловие ко второму изданию



Геометрический подход к физическому мирозданию (геометрофизика) существенно отличается как от общепринятого сегодня теоретико-полевого понимания, так и от менее известного реляционного. Направленность на описание физических понятий и закономерностей в терминах геометрии позволила исследователям достичь определенных успехов. Оценивая полученные результаты, один из отечественных математиков даже назвал геометрию «консервантом скоропортящихся физических идей».

Истоки идей геометрофизики кроются в двухтысячелетней истории попыток доказать пятый постулат Евклида (аксиому параллельных линий). Насколько драматичны были эти попытки свидетельствует письмо Фаркаша Бояи своему сыну Яноши Бояи, в котором он предостерегал сына от занятий столь сложной проблемой: «Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; ты должен страшиться его как чувственных увлечений; оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя, оно погубит счастье твоей жизни. Этот глубокий, бездонный мрак может поглотить тысячу таких гигантов, как Ньютон; никогда на земле не будет света, и никогда бедный род человеческий не достигнет совершенной истины, не достигнет ее в геометрии; это ужасная вечная рана в моей душе; да хранит тебя Бог от этого увлечения, которое так сильно овладело тобой. Оно лишит тебя радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни...» (см. [41, с. 237]).

Однако сын не последовал советам отца. В первой трети XIX в. независимо друг от друга эта проблема была решена Н. И. Лобачевским, К. Гауссом и Я. Бояи. В итоге была открыта первая неевклидова геометрия, по праву названная геометрией Лобачевского. Затем важный вклад был сделан Б. Риманом, открывшим, во-первых, второй вариант неевклидовой (сферической) геометрии и, во-вторых, класс более общих римановых геометрий произвольной кривизны. Далее принципиально важную роль в становлении геометрофизики сыграли работы В. Клиффорда, который, опираясь на открытые варианты неевклидовых геометрий, сформулировал суть данного подхода (геометрической парадигмы): «изменение кривизны пространства — это то, что в действительности происходит при том явлении, которое мы называем движением материи, как весомой, так и эфира: что в физическом мире не имеет места ничего, кроме этого изменения, подчиняющегося (возможно) закону непрерывности» [82].

---

Приступить к реализации идеи Клиффорда о геометризации физики оказалось возможным не в 3-мерном искривленном пространстве, о котором писал Клиффорд, а лишь в рамках 4-мерного пространства-времени, т. е. только после открытия в самом начале XX в. Х. Лоренцем, А. Эйнштейном, А. Пуанкаре и Г. Минковским специальной теории относительности. Переход от плоского 4-мерного пространства-времени Минковского к геометризации гравитационного взаимодействия на базе 4-мерного искривленного пространства-времени уже осуществил А. Эйнштейн в 1913–1916 гг.

Следующий шаг в развитии геометрофизики был сделан Т. Калуцей и состоял в геометризации электромагнитного взаимодействия на базе 5-мерного риманова пространства-времени. Однако судьба многомерия в XX в. оказалась сложной. Были периоды почти полного его отрицания, затем возрождения и вновь забвения и, наконец, признания в конце прошлого века. Эта история достаточно полно отражена в данной книге.

После трудов А. Эйнштейна, Т. Калуцы, Г. Вейля, А. Эддингтона и других классиков геометрофизики наиболее последовательным сторонником данного подхода был Дж. Уилер, который в своих работах по геометродинамике призвал к возрождению на новой основе глобальных идей В. Клиффорда: «Пространство-время не есть *арена* для физики, это *вся классическая физика*» [159].

Второе издание геометрофизики отличается от первого, во-первых, рядом исправлений и уточнений, а во-вторых, исключением двух глав. Это касается главы, посвященной метафизическому анализу трех физических миропониманий: геометрического (геометрофизики), теоретико-полевого, доминирующего ныне, и реляционного. (Данный материал вошел во второе издание «Метафизики».)

Кроме того, была исключена глава, посвященная геометрофизике скрытых размерностей, поскольку этот материал опирается на нетрадиционные для классической геометрофизики методы и более соответствуют реляционному подходу (см. [43]), опирающемуся на принципы концепции дальнего действия и теории систем отношений. В реляционном подходе самым существенным образом используются идеи классической геометрофизики, в частности, принципы многомерия и теории  $n + 1$ -расщеплений.

Автор благодарен коллегам, ученикам и участникам семинара «Геометрия и физика» (физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова) за внимательное, заинтересованное прочтение «Геометрофизики» и высказанные замечания и соображения, которые были учтены при подготовке настоящего переиздания.

---

---

# Предисловие к первому изданию



Целью этой книги является многоуровневое описание физической картины мира с позиций геометрии.

В первой части изложены основы общей теории относительности, дополненные методами задания систем отсчета, что приводит теорию в соответствие с ее названием — делает возможным корректное описание явлений относительно произвольных систем отсчета и позволяет дать физическую интерпретацию уравнений и следствий теории.

Во второй части приведен ряд наиболее существенных результатов, полученных при исследовании оснований и свойств общей теории относительности. В частности, здесь рассмотрены вопросы соотношения теорий гравитации и электромагнетизма в рамках четырех измерений, а также представлены основы теории фермионной материи в искривленном пространстве-времени.

Общая теория относительности является лишь первым шагом в формировании геометрического подхода (парадигмы) к описанию физического мира. Успешная геометризация гравитационного взаимодействия делает закономерным распространение геометрического подхода на описание иных видов физических взаимодействий. В третьей части книги предложено решение этой задачи на основе многомерной теории типа теорий Калуцы и Клейна, которая органически включает в себя эйнштейновскую общую теорию относительности.

В настоящее время наука располагает необходимым потенциалом для метафизического анализа всего геометрического подхода (геометрофизики) и создания на этой основе новой картины мира, которая вобрала бы в себя наиболее важные достижения как геометрического, так и иных миропониманий. С этой целью в четвертой части книги предлагается использовать метафизические принципы, позволяющие классифицировать развивавшиеся в XX в. теории и программы по парадигмам, соответствующим видениям физического мироздания под разными углами зрения, при этом геометрофизика представляет собой теорию в рамках одной из возможных метафизических парадигм.

Многие трудности общей теории относительности и всего геометрического подхода обусловлены проблемами сопряжения понятий, присущих разным метафизическим парадигмам. К ним, в частности, относятся проблемы квантования гравитации, законов сохранения в общей теории относительности, обоснования свойств пространства-времени

---

ни и некоторые другие. Комплексное рассмотрение проблем под разными углами зрения, т. е. с позиций разных метафизических парадигм, позволяет осмыслить корни возникших трудностей и наметить пути их преодоления.

Первые две части книги могут служить пособием для изучающих основы общей теории относительности и теории гравитации. В третьей части особый интерес для преподавателей и студентов представляет гл. 8 («Пятимерные теории Калуцы и Клейна»), а также начальные разделы последующих глав. Четвертая часть предназначена для углубленного изучения геометрофизики и для специалистов в области теории гравитации и объединения физических взаимодействий.

Предлагаемая читателю книга основана на курсах лекций, читаемых в течение многих лет на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, а также на оригинальных результатах автора и его коллег в области геометрофизики.

Автор выражает благодарность коллегам и всем участникам семинаров «Геометрия и физика» и «Метафизика» (физический факультет МГУ) за сотрудничество и многократное обсуждение вопросов, которым посвящена эта книга. Автор особо признателен своим ученикам, в содружестве с которыми разрабатывались многие разделы книги, в частности, автор благодарен А. В. Соловьеву, С. В. Болохову, В. А. Клименкову и А. С. Михайлову, принявшим участие в подготовке рукописи к изданию.

---

---

---

# Введение



Создание общей теории относительности (ОТО), ставшей важным этапом в познании сущности пространства и времени, существенно изменило представления о мире. В сферу физики оказались включенными такие глобальные вопросы мироздания, как свойства мира в целом, происхождение и эволюция Вселенной, ранее относившиеся к компетенции философии. Появились все основания говорить о геометрическом миропонимании или о геометрофизике.

Однако сам Эйнштейн понимал, что открытая им ОТО представляет собой лишь первый шаг в построении геометрического взгляда на физический мир и считал правую часть своих уравнений дефектом теории. «Правая часть включает в себя все то, что не может быть пока объединено в единой теории поля. Конечно, я ни одной минуты не сомневался в том, что такая формулировка есть только временный выход из положения, предпринятый с целью дать общему принципу относительности какое-то замкнутое выражение. Эта формулировка была ведь по существу *не более* чем теорией поля тяготения, несколько искусственно оторванного от единого поля еще неизвестной структуры» [199, с. 286].

Поискам теории единого геометризованного поля Эйнштейн посвятил последние 30 лет своей жизни. Некоторые считали эти годы потраченными им впустую, однако на рубеже XX и XXI столетий усилия Эйнштейна получили иную оценку. Оказалось, что проблема поиска «единого поля неизвестной структуры», а точнее, в его понимании, геометризации всей физики, включает в себя две принципиально различные задачи. Во-первых, предстояло осуществить программу-минимум Эйнштейна — найти единое геометрическое толкование всех бозонных полей (переносчиков известных видов физических взаимодействий) и, во-вторых, попытаться реализовать программу-максимум — геометрически описать всю весомую материю: тела в классической физике и фермионные поля в микромире. Осуществлению первой из этих программ методами известной геометрии и посвящена большая часть настоящей работы.

В соответствии с четырьмя уровнями понимания геометрофизики книга включает 4 части (см. блок-схему рисунка 1).

---



Рис. 1. Блок-схема содержания книги



**Первый уровень понимания геометрофизики** опирается на эйнштейновскую ОТО, которая рассматривается здесь, в соответствии с позицией самого Эйнштейна, в качестве первого этапа в развитии геометрофизики.

**Второй уровень понимания геометрофизики** исходит из углубленных представлений о римановой геометрии, положенной в основание ОТО. Сюда относятся исследования симметрий, различные виды соответствий и классификации метрик, в частности алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна.

Расширению геометрофизического «видения» способствовало открытие более общих дифференциальных геометрий, которое в значительной степени стимулировалось попытками обобщить эйнштейновскую теорию гравитации в рамках 4 измерений с целью объединения гравитации с электромагнетизмом. Трудно указать другую проблему теоретической физики, на решение которой было бы затрачено столько усилий.

Другой пласт работ был связан с проведением многочисленных аналогий между теориями гравитации и электромагнетизма. В какой-то мере это был обратный ход мысли, — не геометризовать электромагнетизм, а, наоборот, переформулировать теорию гравитации по аналогии с теорией электромагнитного поля. В итоге был получен широкий спектр эквивалентных формулировок одной и той же теории гравитации, соответствующий тезису Р. Фейнмана, сформулированному на примере формулировок электромагнетизма и квантовой теории: «Мне всегда казалось странным, что самые фундаментальные законы физики после того, как они уже открыты, все-таки допускают такое невероятное многообразие формулировок, по первому впечатлению неэквивалентных, и все же таких, что после определенных математических манипуляций между ними всегда удается найти взаимосвязь. (...) Я не знаю, что должно означать это желание природы выбирать такие любопытные формы, но, может быть, в этом и состоит определение простоты. Может быть, вещь проста только тогда, когда ее можно исчерпывающим образом охарактеризовать несколькими различными способами, еще не зная, что на самом деле ты говоришь об одном и том же» [164, с. 207].

**Третий уровень понимания геометрофизики** представлен в следующей части — «Многомерность физического мира», где обоснована не только возможность, но даже необходимость перехода к геометрической картине мира в рамках пространства-времени большего, нежели четыре, числа измерений. В первой из глав этой части на основе монадного метода (4 + 1-расщепления) изложена уже ставшая классической 5-мерная единая теория гравитации и электромагнетизма Калуцы и раскрыты ее основные следствия, названные А. Саламом «чудесами Калуцы». Пока-

зано, что претензии к 5-мерной теории, долгое время препятствовавшие ее признанию, имели в значительной мере психологический характер, обусловленный необычностью выхода за пределы традиционного 4-мерия, и могут быть сняты при использовании пространственно-временных многообразий еще больших размерностей.

Далее геометрический подход распространяется на описание других известных видов фундаментальных физических взаимодействий — на сильные и электрослабые взаимодействия. Показано, что **для единого описания всех видов физических взаимодействий достаточно использовать 8-мерное пространственно-временное многообразие**, в котором проявляется удивительная симметрия четырех классических  $x^\mu$ , где  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , и четырех скрытых  $x^4, x^5, x^6, x^7$  (внутренних, компактифицированных) координат. Оба вида подпространств имеют по четыре размерности, причем в каждом из них по одной координате являются выделенными. Среди классических координат к таковым относится координата времени  $x^0$ , а среди скрытых координат — координата  $x^4$ , соответствующая каналу 5-мерной теории Клейна—Фока—Румера. Данный вывод существенно отличается от широко распространенного мнения, что для построения объединенной теории физических взаимодействий нужно использовать пространство-время 11 измерений.

В третьей части показано, что в рамках 8-мерной геометрии можно построить объединенную теорию, совмещающую 4-мерную эйнштейновскую теорию гравитации и теорию сильных взаимодействий, описываемую ныне в рамках калибровочной  $SU(3)$ -инвариантной модели (хромодинамики). При этом три скрытые (компактифицированные) пространственно-подобные координаты  $x^5, x^6, x^7$  соответствуют трем цветовым зарядам кварков в хромодинамике.

От 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий можно перейти к объединенной теории гравитации и электрослабых взаимодействий, соответствующей теориям Эйнштейна и модели Вайнберга—Салама—Глэшоу. Для этого нужно редуцировать теорию на гиперповерхность, где сливаются пары из трех «цветовых» координат, например, когда  $x^6 = x^7$ . Три возможности такого выхода на 7-мерную гиперповерхность интерпретируются как наличие трех поколений элементарных частиц в теории электрослабых взаимодействий. Тем самым предлагается объединить известные виды физических взаимодействий не путем механического соединения теорий (методом «сложения кубиков»), как это делается в настоящее время, а посредством вложения теорий друг в друга (принцип «матрешки»). В едином пространстве скрытых размерностей существует своя, внутренняя геометрия, описывающая свойства элемен-

тарных частиц, участвующих как в сильных, так и в электрослабых взаимодействиях.

Наконец, посредством двукратной сшивки трех скрытых размерностей калуцевского типа осуществляется переход к 6-мерной теории, которую естественно называть теорией Калуцы—Клейна.

**Четвертый уровень миропонимания**, изложенный в 4-й части книги, развит с целью обоснования необходимости перехода от геометрофизики к более совершенному мировосприятию, вобравшему в себя достижения как геометрического, так и других (теоретико-полевого и реляционного) миропониманий. Здесь предлагается взглянуть на теорию относительности и геометрофизику уже не изнутри ее парадигмы, а извне — с самых общих метафизических позиций. Д'Аламбер сказал: «Строго говоря, нет науки, которая не имела бы своей метафизики, если под этим понимать всеобщие принципы, на которых строится определенное учение и которые являются зародышами всех истин, содержащихся в этом учении и излагаемых в нем» [41, с. 16].

Фундаментальная теоретическая физика на рубеже XX и XXI вв. вплотную приблизилась к метафизике. Достигнутые наукой результаты позволили вскрыть важные свойства и принципы метафизики<sup>1)</sup>. В первой главе 4-й части излагается теория гравитационного и иных видов взаимодействий в рамках метафизических парадигм, отличных от геометрической парадигмы (геометрофизики). В частности, рассматриваются теории гравитации в рамках парадигмы ньютонова типа, примером которой может служить релятивистская теория гравитации; теории в рамках теоретико-полевой парадигмы, представленные исследованиями суперсимметричных теорий и теорий суперструн; варианты теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана в рамках реляционного подхода (концепции дальнего действия). Это позволяет перейти к метафизическому анализу и сравнить теории и исследовательские программы из разных метафизических парадигм.

Заключительная глава посвящена рассмотрению парадигмальных проблем ОТО и всего геометрического подхода, обусловленных абсолютизацией используемых в теории категорий или смешением понятий, присущих теориям из разных метафизических парадигм. В частности, к ним относятся проблемы законов сохранения в ОТО, гравитационных волн, квантования гравитации и некоторые другие.

---

<sup>1)</sup>Эта часть существенно опирается на материал, изложенный в книге автора «Метафизика» [41], где были охарактеризованы возможные метафизические парадигмы и продемонстрировано их проявление в фундаментальной теоретической физике XX в.

# Общая теория относительности и геометрическое миропонимание



Приступая к рассмотрению наиболее важных понятий и следствий математического аппарата общей теории относительности (ОТО), представим план данной части. В первой главе вводятся основные понятия ОТО: тензоры, метрика, символы Кристоффеля, уравнения геодезических линий, кривизна, уравнения Эйнштейна, т. е. тот традиционный материал, который входит во все курсы по эйнштейновской теории гравитации.

Вторая глава посвящена анализу следствий трех — физически наиболее значимых — точных решений уравнений Эйнштейна: сферически-симметричной метрики Шварцшильда, аксиально-симметричного решения Керра и однородных изотропных космологических моделей Фридмана. Именно на этих решениях основаны известные на сегодняшний день подтверждения ОТО и планируемые на обозримое будущее эксперименты (в неволновой зоне).

Наконец, в третьей главе представлен математический аппарат монадного метода описания систем отсчета, а также его применения в трех точных решениях уравнений Эйнштейна (на материале предыдущей главы).

Обращаясь к изучающим ОТО, заметим, что студент, который понял содержание первых двух глав, достоин, на наш взгляд, лишь тройки, проработавший материал также третьей главы — четверки, а для получения пятерки необходимо осмыслить хотя бы следующую часть этой книги.

# Основные понятия общей теории относительности



Как это ни парадоксально, но укоренившееся в науке название *общая теория относительности* (ОТО) не отражает в полной мере истинной сути этой теории. Следует согласиться с В. А. Фоком, утверждавшим: «Истинной логической основой теории тяготения Эйнштейна являются не идея общей относительности и не принцип эквивалентности, а другие две идеи, именно: идея объединения пространства и времени в единое четырехмерное хроногеометрическое многообразие с индефинитной метрикой (эта идея была осуществлена Эйнштейном уже в его теории 1905 г. — в «частной» теории относительности) и отказ от «жесткости» метрики, позволивший связать ее с явлением тяготения, а тем самым и с весомой материей (уравнения тяготения Эйнштейна). Идея же общей ковариантности уравнений (так называемая общая относительность) и кинематического толкования (так называемая эквивалентность) сыграли лишь эвристическую роль» [174, с. 7].

Отказ от «жесткости» метрики в теории Эйнштейна или обобщение метрических свойств пространства-времени для описания гравитационного взаимодействия явились логическим завершением развития цепочки гениальных интуиций выдающихся мыслителей XIX в. У ее истоков лежат идеи Н. И. Лобачевского, а также — независимо от него — К. Гаусса и Я. Бояи, которые впервые отказались от пятого постулата Евклида и построили первую неевклидову (гиперболическую) геометрию. Затем существенные шаги последовательно были сделаны Б. Риманом, В. Клиффордом, Э. Махом, которые, с одной стороны, подготовили почву для описания реального мира посредством неевклидовых геометрий и, с другой стороны, подвели научную мысль к возможности использования в физике многообразий большего, нежели три, числа измерений  $n$ . Кроме того, для решающего шага требовалось дальнейшее развитие дифференциальной геометрии. Такие работы были выполнены выдающимися математиками: Э. Бельтрами, Ф. Клейном, Софусом Ли, Г. Риччи, Э. Б. Кристоффелем, Л. Бианки и другими (см. [41]). В этой

главе дается современная интерпретация тех из полученных ими результатов, которые послужили основанием ОТО.

## 1.1. Группа допустимых координатных преобразований и тензоры

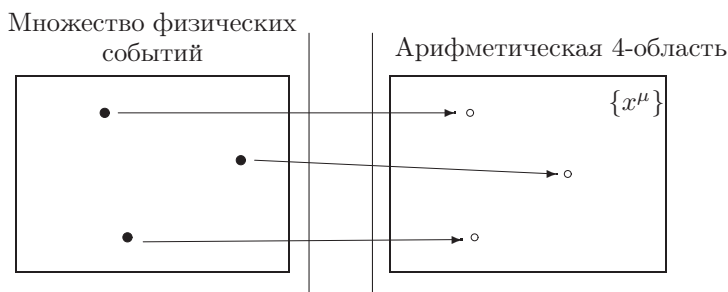
В современной физике ключевую роль играют симметрии. Теория групп лежит в основе не только квантовой механики и физики микромира, но и определяет структуру и содержание теории относительности. В специальной теории относительности ключевую роль играет 6-параметрическая группа Лоренца, которая при переходе к ОТО заменяется на группу допустимых координатных преобразований, диктующих формулировку всей теории в терминах тензорных величин и операторов, изменяющихся в согласии с допустимыми координатными преобразованиями.

### 1.1.1. Координатные системы

1. Теория относительности, в том числе и ОТО, призвана описывать соотношения между событиями материального мира. Эта цель достигается с помощью математической модели классического пространства-времени, основной постулат которой состоит в том, что любое событие может быть сопоставлено с упорядоченной совокупностью из четырех (или в более общем случае  $n$ ) вещественных чисел  $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ , называемых *координатами точки-события*.

События материального мира составляют, как известно, некоторое множество. С другой стороны, используемая математическая модель имеет в виду множество арифметических 4-точек ( $n$ -точек), описываемых всеми возможными значениями четырех (или  $n$ ) вещественных чисел. Таким образом в данной модели рассматриваются два множества объектов: множество физических точек-событий и множество арифметических точек, называемых *арифметическим пространством* четырех (или  $n$ ) измерений. Постулируется соответствие как осуществившихся, так и всех других возможных физических событий с точками арифметического пространства (см. рис. 1.1).

*Координатной системой* называется установленное соответствие между событиями и арифметическими точками. Как задаются системы координат? Несомненно, это вопрос физический, а не математический. Существует ряд конструктивных способов задания координатных систем (некоторые из них будут рассмотрены ниже), однако для введе-



**Рис. 1.1.** Координатная система как соответствие физических событий с арифметическими точками

ния значительной части понятий ОТО достаточно лишь самого факта существования координатной системы.

2. Если каким угодно образом задана одна система координат  $\{x^\alpha\}$ , то, определяя четыре функции  $F^\beta(x^\alpha)$ , можно перейти к новой нумерации точек, т. е. к другой системе координат

$$x'^\beta = F^\beta(x^\alpha) \equiv x'^\beta(x^\alpha). \quad (1.1.1)$$

Из бесконечного множества всех возможных систем координат, получаемых таким образом, в ОТО используется лишь подмножество так называемых *допустимых координатных систем*. Чтобы их охарактеризовать, напомним ряд определений (см. [20]).

Функцию  $F(x^\alpha)$ , определенную для всех точек *арифметической  $n$ -области*  $[x]$ , называют *функцией класса  $u$* , если она и ее производные порядка, меньшего или равного  $u$ , существуют и непрерывны в каждой точке данной области определения. Здесь  $u$  — любое целое положительное число. В ОТО обычно полагают  $u \geq 2$ . Соответствие, при котором арифметическая  $n$ -область  $[x]$  отображается в некоторое множество  $[x']$  при помощи  $n$  функций класса  $u$ , называется *преобразованием класса  $u$* , переводящим  $[x]$  в  $[x']$ . Преобразование арифметической области  $[x]$  называется *регулярным* класса  $u$  тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и его якобиан не обращается в нуль ни в одной точке  $[x]$ .

Множество допустимых систем координат определяется как совокупность систем координат, получаемых из физически заданной системы координат посредством всевозможных регулярных преобразований  $x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha)$ . Такие преобразования, связывающие допустимые координатные системы, называются *допустимыми координатными преобразованиями*.

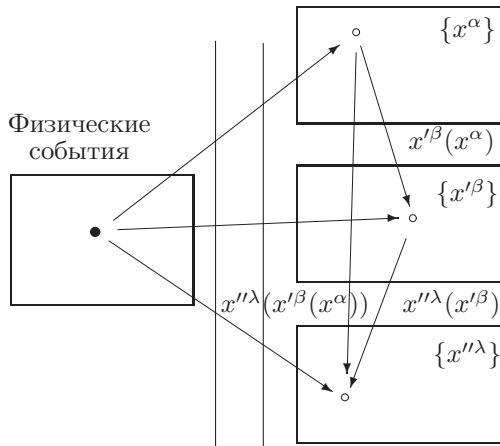


Рис. 1.2. Группа допустимых координатных преобразований

3. Легко видеть, что два последовательно произведенных допустимых преобразования образуют также допустимое преобразование

$$x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha) \oplus x''^\mu = x''^\mu(x'^\beta) \Rightarrow x''^\mu = x''^\mu(x'^\beta(x^\alpha)) \quad (1.1.2)$$

(см. иллюстрацию на рис. 1.2). Каждое допустимое преобразование имеет обратное допустимое преобразование

$$x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha) \longleftrightarrow x^\alpha = x^\alpha(x'^\beta). \quad (1.1.3)$$

Тождественное преобразование, которое не меняет установленное соответствие, следует назвать единичным. Следовательно, совокупность всех допустимых координатных преобразований образует группу. Все допустимые системы координат являются равноправными, и несущественно, если это особо не оговорено, из какой системы координат этого множества нужно исходить.

4. Сделаем ряд замечаний относительно характера используемой математической модели.

- 1) В теории относительности (специальной и особенно в общей) нет необходимости (и оснований) требовать наличия координатной системы сразу для всего множества событий материального мира. Достаточно полагать, что допустимые координатные системы существуют для изучаемых подмножеств физических событий.
- 2) В теории относительности необходимо требовать лишь соответствие рассматриваемого множества физических событий некоторому (в общем случае дискретному) подмножеству арифметических точек пространства, однако молчаливо допускается более



сильное утверждение о наличии физических событий, соответствующих всем точкам арифметического пространства или отдельных арифметических областей. В ряде ситуаций такое допущение возможно, однако в некоторых случаях оно может привести к ряду недоразумений.

### 1.1.2. Основы тензорной алгебры

1. В теории относительности рассматривается ряд физических и геометрических величин, так или иначе характеризующих происходящие в материальном мире события, причем эти величины, как правило, составляют некий набор численных значений, привязанных к точкам-событиям, а следовательно, и к арифметическим точкам. Оказывается, в теории относительности используются не все возможные мыслимые наборы величин, а лишь специальные их классы, жестко привязанные к свойствам допустимых координатных систем и синхронно (по групповому закону) изменяющиеся при переходе к иным допустимым координатным системам.

Это накладывает ряд условий на используемый класс физических величин. Прежде всего, число величин  $m$  в наборе должно быть целой степенью  $N$  размерности пространственно-временного многообразия  $m = 4^N$ , что принято изображать совокупностью из  $N$  буквенных индексов. Будем использовать греческие индексы, пробегаящие в классической ОТО четыре значения: 0, 1, 2, 3, например,  $B(x)[\mu]$  характеризует набор из четырех величин в точке  $x$ ,  $B(x)[\mu\nu]$  — набор из 16 компонент и т. д. В дальнейшем без особой надобности не будем указывать аргумент  $x$ , где определен набор величин, а индексы будем писать не в квадратных скобках, а сверху или снизу справа.

2. Существует два и только два закона групповых преобразований наборов величин, соответствующих группе допустимых координатных преобразований:

$$B'^{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \dots B^{\alpha\beta\dots} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \dots B^{\alpha\beta\dots}; \quad (1.1.4)$$

$$B'_{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots B_{\alpha\beta\dots} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots B_{\alpha\beta\dots} \quad (1.1.5)$$

Преобразующиеся подобным образом величины называются *тензорами*. Тензоры, преобразующиеся по первому закону, называются *контравариантными* (индексы пишутся сверху), а по второму закону — *ковариантными* (индексы пишутся снизу). Возможны смешанные тензоры

произвольного ранга. Тензор нулевого ранга — *скаляр* (число, которое не изменяется при преобразованиях координат); тензор первого ранга — *вектор*. Простейшим примером контравариантных векторов является набор из дифференциалов самих координат, а примером ковариантных векторов могут служить компоненты градиента скаляра.

Для упрощения записи принято не писать знаки суммы и подразумевать суммирование всякий раз, когда встречаются два одинаковых индекса (один сверху, а другой снизу). Так, закон преобразования произвольного тензора имеет вид:

$$B'_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \dots \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \dots B_{\lambda\sigma\dots}{}^{\delta\rho\dots} \quad (1.1.6)$$

Всякий дважды встречающийся индекс, часто называемый «немым», можно заменить любым другим.

3. В множестве тензорных величин определены три операции:

- 1) *Операция сложения и вычитания* тензоров одинакового ранга и одинаковой ковариантности, т. е. с одинаковыми числами соответственно ко- и контравариантных индексов:

$$A_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots} + B_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots} = C_{\mu\nu\dots}{}^{\alpha\beta\dots} \quad (1.1.7)$$

В итоге получается тензор того же ранга и той же ковариантности.

- 2) *Операция внешнего произведения* двух и более тензоров:

$$A_{\mu\dots}{}^{\alpha\dots} B_{\nu\dots}{}^{\beta\dots} = C_{\mu\dots\nu\dots}{}^{\alpha\dots\beta\dots} \quad (1.1.8)$$

В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров.

- 3) *Операция внутреннего произведения* тензоров

$$A^{\mu\nu\dots} B_{\mu\alpha\dots} = C_{\nu\alpha\dots} \quad (1.1.9)$$

приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров минус удвоенное число немых индексов.

4. Тензор  $B_{\mu\nu}$  называют *симметричным*, если  $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$ . Тензор  $A_{\mu\nu}$  называется *антисимметричным*, если  $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ . Любой тензор с двумя индексами одинаковой ковариантности можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(C_{\mu\nu} - C_{\nu\mu}). \quad (1.1.10)$$

Внутреннее произведение по двум индексам симметричного (по этим индексам) тензора на антисимметричный (по этим же индексам) равно

нулю. Действительно, пусть  $B_{\mu\nu}$  — симметричный тензор, а  $A_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор, тогда имеем цепочку соотношений:

$$B_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = -B_{\mu\nu}A^{\nu\mu} = -B_{\nu\mu}A^{\nu\mu} = -B_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0, \quad (1.1.11)$$

поскольку только нуль может быть равен себе с обратным знаком. Здесь при переходе к предпоследнему соотношению было произведено простое переобозначение двух пар «немых» индексов.

5. Для установления трансформационных свойств величин полезна *строгая теорема частного*: неизвестная величина является тензором, если ее внутреннее произведение с произвольным вектором (тензором) образует тензор.

Докажем эту теорему. Пусть  $A(\alpha\beta)$  — величина с неизвестными трансформационными свойствами, а  $B^\beta$  — произвольный вектор, и пусть известно, что

$$A(\alpha\beta)B^\beta = C_\alpha \quad (1.1.12)$$

образует вектор. Требуется доказать, что  $A(\alpha\beta)$  является тензором. Для этого перейдем в штрихованную координатную систему, где можно записать

$$A'(\mu\nu)B'^\nu = C'_\mu. \quad (1.1.13)$$

Используя тензорный закон преобразований (1.1.6) и подставляя (1.1.12), находим

$$A'(\mu\nu)B'^\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} C_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A(\alpha\beta)B^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A(\alpha\beta)B'^\nu. \quad (1.1.14)$$

Собирая вместе первое и последнее выражения и вынося за скобку общее слагаемое — произвольный вектор  $B'^\nu$ , — приходим к соотношению

$$A'(\mu\nu) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A(\alpha\beta), \quad (1.1.15)$$

доказывающему тензорный закон преобразований величины  $A(\alpha\beta) \rightarrow A_{\alpha\beta}$ .

6. Весь математический аппарат современной теории гравитации, т. е. ОТО, описывается на языке тензорных величин, без использования которых ее содержание становится настолько громоздким и непрозрачным, что в ней чрезвычайно трудно ориентироваться.

Наконец, подчеркнем, что в ОТО посредством тензоров описываются величины двух сортов: геометрические характеристики пространства-времени и физические понятия, вносимые в пространство-время извне.

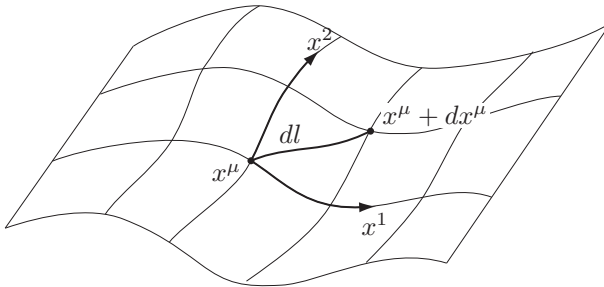
Такая двойственность пронизывает все содержание не только ОТО, но и всей геометрофизики. Это осознавалось как ее создателем, так и большинством ее исследователей, которые стремились развить и обобщить ее таким образом, чтобы все понятия теории носили исключительно геометрический характер.

## 1.2. Метрический тензор

1. В основе эйнштейновской ОТО лежит представление об искривленном (римановом) 4-мерном пространстве-времени, в котором квадрат интервала (парное отношение) между двумя близкими событиями, различающимися координатами  $dx^\mu$ , задается формулой (см. рис. 1.3)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2.1)$$

Здесь и далее греческие индексы пробегает четыре значения: 0, 1, 2, 3.



**Рис. 1.3.** Метрика в искривленном пространстве-времени

Компоненты

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.2.2)$$

зависящие от координат, описывают метрические свойства 4-мерного пространства-времени и одновременно являются тензорными потенциалами гравитационного «поля». С помощью строгой теоремы частного, когда  $dx^\mu$  понимается как произвольный вектор, а справа в (1.2.1) стоит скаляр — тензор нулевого ранга, — легко показать, что  $g_{\mu\nu}$  является ковариантным (метрическим) тензором второго ранга.

2. Представим метрический тензор в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]}, \quad (1.2.3)$$

где  $g_{(\mu\nu)} = g_{(\nu\mu)}$  и  $g_{[\mu\nu]} = -g_{[\nu\mu]}$ . Величина  $dx^\mu dx^\nu$  в (1.2.1) — симметричный тензор второго ранга, следовательно, для определения квадрата интервала (метрики) антисимметричная часть метрического тензора несущественна, поэтому без ущерба для общности следует считать метрический тензор симметричным. Это значит, что в самом общем случае в 4-мерном пространстве-времени метрический тензор имеет 10 различных компонент, где компоненты над главной диагональю в (1.2.2) равны компонентам под диагональю.

3. Ковариантным компонентам метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  ставятся в соответствие *контравариантные компоненты* согласно формуле

$$g^{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}/g, \quad (1.2.4)$$

где  $g = ||g_{\mu\nu}||$  — определитель, а  $\Delta_{\mu\nu}$  — алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы  $(g_{\mu\nu})$ . Внутреннее произведение

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = g^\nu_\sigma \quad (1.2.5)$$

по известной теореме алгебры представляет собой символы Кронекера:

$$g^\nu_\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = \nu \\ 0, & \text{если } \sigma \neq \nu \end{cases} \equiv \delta^\nu_\sigma. \quad (1.2.6)$$

Поскольку в выражении

$$g^\nu_\sigma B^\sigma = B^\nu$$

слева стоит произвольный вектор  $B^\sigma$ , а справа также получается вектор (тензорная величина), то по строгой теореме частного  $g^\nu_\sigma$  является тензором, совпадающим с символами Кронекера. Эту величину называют *смешанным метрическим тензором*.

Записав цепочку соотношений

$$g^{\mu\nu} B_\mu = g^{\mu\nu} (g_{\mu\sigma} B^\sigma) = (g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma}) B^\sigma = g^\nu_\sigma B^\sigma = B^\nu$$

и взяв первое и последнее выражения, на основе строгой теоремы частного приходим к выводу о тензорном характере величины  $g^{\mu\nu}$ , называемой *контравариантным метрическим тензором*.

С помощью метрического тензора поднимаются и опускаются индексы произвольных тензоров (производится «жонглирование» индексами), например

$$B_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = B_{\mu}^{\nu}; \quad B^{\mu}g_{\mu\nu} = B_{\nu}.$$

4. В любой произвольной точке пространства-времени компоненты  $g_{\mu\nu}$  выбором координатной системы всегда можно привести к каноническому виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.7)$$

соответствующему значениям метрического тензора  $\eta_{\mu\nu}$  в специальной теории относительности в декартовых координатах. Координатная система, в которой метрический тензор (в избранной точке) имеет вид (1.2.7) справа, называется *локально декартовой координатной системой*.

5. Сумму диагональных элементов матрицы в (1.2.7) справа называют *сигнатурой*. Согласно известному в линейной алгебре закону инерции квадратичных форм, сигнатура представляет собой инвариантное свойство пространственно-временного многообразия. Ее нельзя изменить никаким допустимым координатным преобразованием. В ОТО имеем сигнатуру  $s = -2$ . Часто под сигнатурой понимают эквивалентный данному определению вид строки из знаков при единицах на диагонали (+ - - -).

Обратим внимание на тот факт, что ряд авторов использует сигнатуру с противоположными знаками (- + + +). Принципиально это не меняет выводы теории, — изменяются лишь знаки в некоторых формулах. При описании классических аспектов физики выбор одной из этих двух возможностей не существенен и является предметом соглашения, однако в микромире при использовании спиноров следует проявлять осторожность. Понятие спинора чувствительно как к размерности многообразия, в котором оно вводится, так и к его сигнатуре.

6. Вернемся к определителю метрического тензора  $g$ , использованному в (1.2.4). Его можно представить в виде

$$g \equiv ||g_{\mu\nu}|| = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\lambda}g_{\delta\sigma}, \quad (1.2.8)$$

где введен полностью антисимметричный по всем индексам *символ Леви-Чивиты*, обладающий свойствами:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации} \\ & 0123 \text{ четным числом перестановок;} \\ 0, & \text{если есть совпадающие индексы;} \\ -1, & \text{если компоненты приводятся к комбинации} \\ & 0123 \text{ нечетным числом перестановок.} \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Символы Леви-Чивиты не являются тензором, а определитель  $g$  не является скаляром. Последний преобразуется по закону

$$g' = \frac{1}{\mathcal{J}^2}g, \quad (1.2.10)$$

где  $\mathcal{J}$  — якобиан преобразования координат, представимый через символы Леви-Чивиты в виде

$$\mathcal{J} = \frac{1}{4!}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}}. \quad (1.2.11)$$

Символу Леви-Чивиты соответствует антисимметричный по всем индексам *тензор Леви-Чивиты*

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.2.12)$$

7. В ОТО не определена операция интегрирования тензорных величин, однако можно интегрировать скалярные величины. Легко видеть, что элемент 4-мерного объема  $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  не является тензором, а преобразуется при помощи якобиана (1.2.11). Для получения инвариантного элемента объема необходимо образовать произведение

$$\sqrt{-g}d^4x = \sqrt{-g}dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.2.13)$$

так что интеграл по 4-мерной области от произвольной скалярной величины  $B$  записывается в виде

$$\iiint\int B\sqrt{-g}dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.2.14)$$

Часто вместо четырех значков интегрирования пишут лишь один. Произведение некой произвольной, не обязательно скалярной, величины на корень квадратный от определителя метрического тензора называется *плотностью этой величины* или, более точно, плотностью веса плюс единица. Например, часто используется плотность контравариантного метрического тензора  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ .

### 1.3. Ковариантное дифференцирование

В ОТО важную роль играют первые производные от метрического тензора  $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda \equiv g_{\mu\nu,\lambda}$ . Легко убедиться, что они не образуют тензора, более того, из первых производных от метрического тензора вообще невозможно построить тензорную величину, однако в теории возникает устойчивая комбинация из первых производных от  $g_{\mu\nu}$ , к которой можно прийти разными путями. Будем исходить из уравнений геодезических линий.

#### 1.3.1. Уравнения геодезических линий и символы Кристоффеля

1. В искривленном многообразии геодезическая линия (или просто геодезическая) играет роль прямой линии плоского пространства-времени. В первой неевклидовой (гиперболической) геометрии Лобачевского в качестве геодезических выступают гиперболы, в сферической геометрии Римана таковыми являются дуги большого радиуса. Уравнения геодезической находятся из условия экстремальности длины линии, соединяющей две выбранные точки  $A$  и  $B$ ,

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \delta(ds) = 0 \quad (1.3.1)$$

при условиях на концах

$$\delta(ds)_{(A)} = \delta(ds)_{(B)} = \delta x_{(A)} = \delta x_{(B)} = 0. \quad (1.3.2)$$

Перепишем вариацию интервала, исходя из соотношений

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= 2ds\delta(ds) \rightarrow \delta(ds) = \frac{1}{2ds}\delta(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = \\ &= \frac{1}{2ds} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu d(\delta x^\nu) + g_{\mu\nu} dx^\nu d(\delta x^\mu) \right], \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где использовано  $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$ . Подставим это выражение под знак интеграла, разделив и умножив на  $ds$ , тогда получим

$$\int_A^B \delta(ds) = \frac{1}{2} \int_A^B \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\sigma + \left( g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \frac{d(\delta x^\sigma)}{ds} \right] ds. \quad (1.3.4)$$



Проинтегрируем подынтегральное выражение в круглых скобках по частям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_A^B \left( g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \frac{d(\delta x^\sigma)}{ds} ds = \\ & = \frac{1}{2} \left( g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\sigma \Big|_A^B - \frac{1}{2} \int_A^B \delta x^\sigma \frac{d}{ds} \left( g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) ds. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Первое слагаемое, вследствие (1.3.2), обращается в нуль. Подставляя оставшуюся часть в (1.3.4) и производя дифференцирование, приходим к выражению

$$\frac{1}{2} \int_A^B \left[ \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2g_{\sigma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right] ds \delta x^\sigma = 0. \tag{1.3.6}$$

Из того, что интеграл обращается в нуль при любых вариациях  $\delta x^\sigma$ , следует равенство нулю выражения, заключенного в квадратных скобках. Поднимая в нем индекс  $\sigma$  вверх, приходим к *уравнениям геодезических линий*

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}, \tag{1.3.7}$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left( \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \tag{1.3.8}$$

— искомая комбинация из первых производных от метрического тензора, называемая *символами Кристоффеля*.

2. Сделаем несколько замечаний по уравнениям геодезических линий.

- 1) На первых этапах создания и развития общей теории относительности постулировалось, что тела в искривленном пространстве-времени движутся по геодезическим линиям при отсутствии других сторонних сил. Затем было показано, что эти уравнения являются следствием уравнений Эйнштейна (см. разд. 1.5).
- 2) Уравнения геодезических линий являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка, как и все остальные уравнения движения в классической физике, например уравнения движения Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{1.3.9}$$

- 3) В уравнениях геодезической линии отсутствует масса тела, что отражает проявление принципа эквивалентности (все тела движутся

в искривленном пространстве-времени независимо от значений их масс). В механике Ньютона это соответствует движению масс под действием ньютоновой гравитационной силы

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \mathcal{F}_{(gr)} = G \frac{mM}{r^2} = mg \rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} = G \frac{M}{r^2} = g, \quad (1.3.10)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$  — ньютонова гравитационная постоянная.

Уже со времени известных экспериментов Галилея по падению тел с Пизанской башни можно было выдвинуть гипотезу, что поскольку все тела падают одинаково, независимо от их масс, то ускорение свободного падения зависит не от тел, а от свойств того места в пространстве, где они оказались. Однако в то время пространство представлялось чрезвычайно бедным по своим свойствам, т. е. однородным и изотропным. Не было возможности связать ускорения падения с какими-либо свойствами пространства. Эта возможность появилась при использовании римановой геометрии. Уравнения геодезических линий реализуют идею обусловленности ускорения свободного падения значениями компонент метрического тензора искривленного пространства-времени.

- 4) В уравнениях геодезических линий проявляется принцип соответствия более общей теории (эйнштейновской теории гравитации) ньютоновой теории гравитации в евклидовом пространстве. Поскольку для нерелятивистских частиц наибольшее значение 4-скорости  $u^\mu$  имеет компонента  $u^0$ , то, взяв компоненту уравнений геодезической линии вдоль радиуса (при значении  $\lambda = 1$ , когда  $x^1 = r$ ), находим, что основной вклад дает слагаемое

$$\Gamma_{00}^1 u^0 u^0 \sim -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} u^0 u^0 \rightarrow \mathcal{F}^1 = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}. \quad (1.3.11)$$

Сравнивая уравнения (1.3.7) и (1.3.9), приходим к выводу, что компонента  $g_{00}$  соответствует ньютонову гравитационному потенциалу  $\varphi(r)$ .

- 5) Уравнения геодезической можно сопоставить с уравнениями движения заряженных частиц в электродинамике

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = \frac{q}{mc^2} F_{\cdot\mu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (1.3.12)$$

где  $q$  — электрический заряд,  $m$  — масса заряженной частицы,  $F_{\mu\nu}$  — тензор напряженности электромагнитного поля. В этом

уравнении справа также присутствует скорость, однако в первой степени.

- б) Уравнения движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля получаются объединением уравнений геодезической (1.3.7) и (1.3.12):

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2} F_{\cdot\mu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.3.13)$$

В этих уравнениях проявился, во-первых, дуалистический характер ОТО, в которой фигурируют величины как геометрической (первое слагаемое справа), так и физической природы (сила Лоренца справа), и, во-вторых, уравнения демонстрируют, что теория Эйнштейна представляет собой лишь первый шаг на пути к полной геометрической парадигме. В ней электромагнитное поле еще не геометризовано. В третьей части книги будет показано, что в рамках 5-мерной теории можно представить правую часть уравнений (1.3.13) исключительно через геометрические величины.

3. Символы Кристоффеля не являются тензорной величиной. При переходе от одной системы координат к другой они преобразуются по закону

$$(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}; \quad (1.3.14)$$

$$(\Gamma_{\mu\nu,\sigma})' \equiv (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)' g'_{\lambda\sigma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} g_{\alpha\beta}. \quad (1.3.15)$$

Из этих формул видно, что тензорный закон преобразований нарушается присутствием справа вторых производных, которые исчезают при линейных преобразованиях координат.

4. В любой точке многообразия всегда можно выбрать *локально-геодезическую координатную систему*, в которой все компоненты символа Кристоффеля равны нулю. Это преобразование имеет вид

$$x'^\mu = (x^\mu - x_{(A)}^\mu) + \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu)_{(A)} (x^\alpha - x_{(A)}^\alpha) (x^\beta - x_{(A)}^\beta), \quad (1.3.16)$$

где индекс  $(A)$  снизу означает значение величин в точке  $A$ . Более того, всегда можно выбрать *геодезическую координатную систему*, в которой компоненты символов Кристоффеля обращаются в нуль на всей геодезической линии.

### 1.3.2. Ковариантные производные

1. Легко убедиться, что частные производные от тензорных величин в искривленном пространстве-времени в общем случае не являются тензорными величинами, например

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B'_\alpha \right) = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial B'_\alpha}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} B'_\alpha. \quad (1.3.17)$$

Тензорный закон преобразований нарушается последним слагаемым справа, отличным от нуля в случае, когда преобразования координат не являются линейными.

2. Тензорный характер можно восстановить, если обобщить оператор частного дифференцирования, добавив к (1.3.17) выражение, содержащее также нетензорную величину с символом Кристоффеля, преобразующимся согласно (1.3.14):

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda B_\lambda \equiv \nabla_\nu B_\mu \equiv B_{\mu;\nu}. \quad (1.3.18)$$

Это тензорное выражение называется *ковариантной производной* от ковариантного вектора  $B_\mu$ . Отметим, что этот прием устранения (компенсации) нежелательных слагаемых в операторах дифференцирования фактически использован в так называемом калибровочном подходе к описанию взаимодействий.

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную от контравариантного вектора:

$$\frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu B^\lambda \equiv \nabla_\nu B^\mu \equiv B^\mu_{;\nu}. \quad (1.3.19)$$

*Ковариантные производные от тензора произвольного ранга и ковариантности* имеют вид

$$\nabla_\sigma B \underbrace{\left. \begin{matrix} m \\ \mu \dots \\ \nu \dots \end{matrix} \right\}}_n = \frac{\partial B^{\mu \dots}}{\partial x^\sigma} + \underbrace{\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu B^{\lambda \dots}}_m + \dots - \underbrace{\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda B^{\mu \dots}}_n - \dots, \quad (1.3.20)$$

где многоточия в основной строке означают, что аналогичные выражения с символами Кристоффеля пишутся для каждого ко- или контравариантного индекса тензорной величины  $B^{\mu \dots}_{\nu \dots}$ .

3. Операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами:

- 1) Ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной.

$$\nabla_\sigma B = \frac{\partial B}{\partial x^\sigma}. \quad (1.3.21)$$

- 2) Ковариантная производная от суммы тензорных величин равна сумме ковариантных производных:

$$\nabla_{\sigma}(A_{\nu}^{\mu\dots} + B_{\nu}^{\mu\dots}) = \nabla_{\sigma}A_{\nu}^{\mu\dots} + \nabla_{\sigma}B_{\nu}^{\mu\dots}. \quad (1.3.22)$$

- 3) Для ковариантного дифференцирования произведения тензорных величин имеет место правило Лейбница:

$$\nabla_{\sigma}(A_{\nu}^{\mu\dots}B_{\beta}^{\alpha\dots}) = (\nabla_{\sigma}A_{\nu}^{\mu\dots})B_{\beta}^{\alpha\dots} + A_{\nu}^{\mu\dots}(\nabla_{\sigma}B_{\beta}^{\alpha\dots}). \quad (1.3.23)$$

Легко показать, что это свойство выполняется и для операции внутреннего произведения.

- 4) Ковариантная производная от метрического тензора равна нулю:

$$\nabla_{\sigma}g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu;\sigma} = 0. \quad (1.3.24)$$

Это свойство позволяет при дифференцировании выносить метрический тензор за знак оператора, т. е. рассматривать метрический тензор как постоянный коэффициент.

4. С помощью оператора ковариантного дифференцирования уравнения геодезических линий (1.3.7) можно представить в следующей форме

$$\frac{du^{\lambda}}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}u^{\mu}u^{\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\lambda} = 0. \quad (1.3.25)$$

Такой вид позволяет записать уравнения для изотропных геодезических линий, вдоль которых интервал равен нулю. В этом случае вместо вектора 4-скорости  $u^{\lambda}$  следует использовать изотропный волновой вектор  $k^{\lambda}$ , обладающий свойством

$$g_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = 0, \quad (1.3.26)$$

а вместо уравнений геодезических линий (1.3.25) следует писать уравнения

$$k^{\mu}\nabla_{\mu}k^{\lambda} = 0. \quad (1.3.27)$$

5. Заметим, что ковариантную производную можно определить через *операцию параллельного переноса* тензорных величин в искривленном пространстве-времени, что будет сделано в гл. 4.

## 1.4. Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна

Ключевые уравнения классической физики, как правило, являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Такой же характер имеют и уравнения Эйнштейна, описывающие искривленную метрику

пространства-времени, — они являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно компонент метрического тензора. Переходя к их записи, введем важную геометрическую характеристику, содержащую вторые производные от метрического тензора, — тензор кривизны.

### 1.4.1. Тензор кривизны

1. Тензор кривизны представляет собой комбинацию из вторых и первых производных от метрического тензора. К тензору кривизны можно прийти различными путями. Выберем формальный путь, состоящий в коммутации вторых ковариантных производных от произвольного вектора  $B_\alpha$ . Легко убедиться, что

$$B_{\alpha;\nu;\mu} - B_{\alpha;\mu;\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(B_{\alpha;\nu}) - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(B_{\sigma;\nu}) - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma(B_{\alpha;\sigma}) - B_{\alpha;\mu;\nu} = R_{\alpha\nu\mu}^\lambda B_\lambda, \quad (1.4.1)$$

где

$$R_{\alpha\nu\mu}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \quad (1.4.2)$$

— тензор кривизны четвертого ранга (тензор Римана—Кристоффеля). Формулу (1.4.1) можно обобщить на случай тензора  $B_{\alpha\cdots}^{\lambda\cdots}$  произвольного ранга.

2. Тензор Римана—Кристоффеля обладает следующими свойствами:

- 1) Из определения тензора следует его антисимметрия по второй паре индексов

$$R_{\alpha\nu\mu}^\lambda = -R_{\alpha\mu\nu}^\lambda. \quad (1.4.3)$$

- 2) Как показывает непосредственная проверка, в римановой геометрии тензор кривизны антисимметричен по первой паре индексов

$$R_{\beta\alpha\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad (1.4.4)$$

где  $R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\mu\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\alpha}$ .

- 3) Тензор кривизны симметричен относительно перестановки двух пар индексов:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1.4.5)$$

- 4) Имеет место алгебраическое тождество Риччи

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha + R_{\nu\beta\mu}^\alpha + R_{\mu\nu\beta}^\alpha = 0, \quad (1.4.6)$$

которое легко доказать, воспользовавшись локально геодезической координатной системой, где (в рассматриваемой точке  $A$ )

тензор Римана—Кристоффеля представляется в виде

$$(R^{\lambda}_{\alpha\nu\mu})_{(A)} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}}.$$

Если некий тензор равен нулю в какой-либо одной координатной системе, то он равен нулю и во всех других допустимых координатных системах.

Тождество Риччи представляет собой лишь одно алгебраическое соотношение между компонентами тензора Римана—Кристоффеля, причем оно имеет место при условии различия всех четырех индексов.

5) Имеет место дифференциальное *тождество Бианки*

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\sigma;\mu} = 0. \quad (1.4.7)$$

Это тождество проще всего доказать, опять используя локально-геодезическую координатную систему.

3. Первые четыре (алгебраические) свойства симметрии приводят к тому, что в 4-мерном пространстве-времени в самом общем случае независимыми являются лишь 20 компонент тензора Римана—Кристоффеля. Используя свойство симметрии ковариантного тензора кривизны, обозначим его компоненты двумя индексами  $A$  и  $B$ , пробегающими 6 значений, которые соответствуют следующим комбинациям пар 4-мерных индексов:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 01; & 2 &\rightarrow 02; & 3 &\rightarrow 03; \\ \dot{1} &\rightarrow 23; & \dot{2} &\rightarrow 31; & \dot{3} &\rightarrow 12. \end{aligned}$$

Такое выражение можно представить в виде симметричной  $6 \times 6$ -матрицы:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \Rightarrow R_{AB} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{1\dot{1}} & R_{1\dot{2}} & R_{1\dot{3}} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{2\dot{1}} & R_{2\dot{2}} & R_{2\dot{3}} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{3\dot{1}} & R_{3\dot{2}} & R_{3\dot{3}} \\ \hline R_{\dot{1}1} & R_{\dot{1}2} & R_{\dot{1}3} & R_{\dot{1}\dot{1}} & R_{\dot{1}\dot{2}} & R_{\dot{1}\dot{3}} \\ R_{\dot{2}1} & R_{\dot{2}2} & R_{\dot{2}3} & R_{\dot{2}\dot{1}} & R_{\dot{2}\dot{2}} & R_{\dot{2}\dot{3}} \\ R_{\dot{3}1} & R_{\dot{3}2} & R_{\dot{3}3} & R_{\dot{3}\dot{1}} & R_{\dot{3}\dot{2}} & R_{\dot{3}\dot{3}} \end{array} \right). \quad (1.4.8)$$

Вертикальной и горизонтальной линиями разделены компоненты с индексами двух типов.

В пространстве-времени размерности  $n \geq 3$  в самом общем случае число различных компонент тензора Римана—Кристоффеля дается формулой

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (1.4.9)$$

4. Из тензора Римана—Кристоффеля строятся тензоры кривизны меньших рангов:

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta} \equiv R_{\cdot\beta\lambda\nu}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma_{\beta\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}; \quad (1.4.10)$$

$$R \equiv R_{\beta\nu}g^{\beta\nu} \quad (1.4.11)$$

соответственно *тензор Риччи* и *скалярная кривизна*.

5. Выражения для тензоров кривизны и их свойства симметрии справедливы в пространствах любой размерности, однако при размерностях 3 и 2 имеют место алгебраические соотношения между тензорами кривизны разного ранга. Так, для пространства трех измерений тензор Римана—Кристоффеля в общем случае имеет 6 различных компонент, столько же, сколько и 3-мерный тензор Риччи. Это позволяет из (1.4.10) обратно выразить тензор Римана—Кристоффеля через компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну. Обозначая индексы, пробегающие три значения 1, 2, 3, малыми латинскими буквами, в пространстве трех измерений имеем

$$R^i{}_{jkl} = g^i{}_{jk}R_l - g^i{}_{kl}R_j + g_{jk}R_l^i - g_{jl}R_k^i - \frac{1}{2}(g^i{}_{jk} - g^i{}_{kl})R. \quad (1.4.12)$$

В пространстве двух измерений тензор Римана—Кристоффеля можно алгебраически выразить через компоненты метрического тензора и скалярную кривизну. Обозначая буквами  $\xi, \eta, \zeta, \chi$  индексы, пробегающие два значения (например, 1 и 2), имеем

$$R^{\xi}{}_{\eta\zeta\chi} = -\frac{R}{2}(g_{\chi}^{\xi}g_{\eta\zeta} - g_{\zeta}^{\xi}g_{\eta\chi}). \quad (1.4.13)$$

Таким образом, *тензор Римана—Кристоффеля является алгебраически независимым от тензора Риччи и скалярной кривизны, начиная с размерности четыре и выше.*

6. К тензору кривизны можно прийти при помощи процедуры параллельного переноса произвольного вектора (тензора) по замкнутому контуру (см. гл. 4).

## 1.4.2. Уравнения Эйнштейна

1. При создании ОТО важно было найти зависимость искривленности пространства-времени от распределения и свойств находящейся в нем материи, что было сделано на рубеже 1915 и 1916 гг. открытием уравнений Эйнштейна. Следует подчеркнуть, что **ключевые уравнения**



физики, такие как уравнения Максвелла, Эйнштейна, Дирака и другие, не выводятся, а открываются. При чтении некоторых учебников может создаться впечатление, что уравнения Эйнштейна выводятся. В действительности же рассуждения, предшествующие записи этих уравнений, либо подготавливают читателя к их восприятию, либо в них постулируется что-то эквивалентное этим уравнениям и затем по известным правилам от постулированного переходят к фундаментальным уравнениям.

2. Искомые уравнения должны были связать геометрические величины и физические характеристики материи. Уже из ньютоновой теории гравитации следует, что в качестве источника гравитации следует выбирать величину, содержащую плотность или массу материи. После создания специальной теории относительности стало ясно, что искомая характеристика материи должна содержать скорость и — более того — она должна быть тензорной величиной. Вектор фактически уже занят в электродинамике, где во второй паре уравнений Максвелла справа записывается ток. Следующим кандидатом на роль источника искривления был тензор энергии-импульса материи  $T_{\alpha\beta}$ . Это предположение оказалось правильным.

Какую геометрическую величину нужно соотнести с  $T_{\alpha\beta}$ ? Эта величина должна обладать таким же важным свойством, что и  $T_{\alpha\beta}$ :

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0, \tag{1.4.14}$$

являющимся обобщением известного в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах) соотношения  $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = 0$ , приводящего к закону сохранения энергии-импульса материи.

3. Такую геометрическую величину можно получить сверткой тождеств Бианки (1.4.7) по индексам  $\alpha, \mu$  и умножением их на  $g^{\beta\nu}$ :

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} (R^{\alpha}_{\beta\alpha\nu;\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\alpha;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\sigma;\alpha}) &= 0 \rightarrow R_{;\sigma} - R^{\beta}_{\sigma;\beta} - R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow R^{\alpha}_{\sigma;\alpha} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = 0 \rightarrow \nabla_{\beta} \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R \right) = 0. \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

4. Приравнявая друг другу геометрическую и физическую характеристики из соотношений (1.4.14) и (1.4.15) (с неким размерным коэффициентом), приходим к уравнениям Эйнштейна

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R = \kappa T^{\alpha\beta}, \tag{1.4.16}$$

где  $\kappa$  — эйнштейновская гравитационная постоянная, связанная с ньютоновой гравитационной постоянной  $G$  соотношением

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (1.4.17)$$

Умножая внутренним образом (1.4.16) на  $g_{\alpha\beta}$ , находим соотношение  $-R = \kappa T$ , которое позволяет переписать уравнения Эйнштейна в ином виде

$$R^{\alpha\beta} = \kappa \left( T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right). \quad (1.4.18)$$

Для пустого пространства-времени уравнения Эйнштейна упрощаются:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.4.19)$$

5. Если быть до конца последовательными, то нужно учитывать, что ковариантная дивергенция обращается в нуль еще от одной геометрической величины:  $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$ , поэтому уравнения Эйнштейна можно обобщить:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (1.4.20)$$

где коэффициент  $\Lambda$  называют *космологической постоянной*. Часто полагают  $\Lambda = 0$ , однако последние астрофизические данные свидетельствуют в пользу учета космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна.

6. Общий вид тензора энергии-импульса материальной среды записывается следующим образом

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}, \quad (1.4.21)$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $u^\alpha$  — 4-скорость движения среды,  $c$  — скорость света. Для конкретных бозонных и фермионных полей вид тензора энергии-импульса будет приводиться, по мере введения этих полей в искривленное пространство-время.

7. Сделаем несколько замечаний по смыслу уравнений Эйнштейна.

- 1) Уравнения Эйнштейна приобретают смысл в вакууме лишь начиная с размерности четыре и выше, так как при меньших размерностях, вследствие алгебраических соотношений (1.4.12) и (1.4.13), из равенства нулю тензора Риччи автоматически следует обращение в нуль и тензора Римана—Кристоффеля, т. е. пространство-время становится плоским. Это явилось одной из причин неосуществимости далеко идущих идей Клиффорда о геометризации физики вплоть до создания специальной теории относительности,

т. е. до того, как пространство и время были объединены в 4-мерное многообразие.

- 2) Поскольку при переходе к ньютоновой теории тяготения основной вклад дает компонента  $g_{00}(x)$ , соответствующая скалярному потенциалу  $\varphi(x)$  гравитационного поля, можно показать, что из уравнений Эйнштейна в основном приближении получается уравнение Пуассона для ньютонова потенциала

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta\varphi = -4\pi G\rho, \tag{1.4.22}$$

где  $\rho$  — плотность распределения материи, а  $\Delta$  обозначает 3-мерный лапласиан. Значение эйнштейновской гравитационной постоянной (1.4.17) находится из указанного принципа соответствия.

### 1.4.3. Координатные условия

Под компактной записью уравнений (1.4.16) (или (1.4.18)) кроется сложная система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений (в частных производных) второго порядка относительно 10 компонент  $g_{\mu\nu}$ . Однако вследствие четырех тождеств Бианки (1.4.7) из 10 уравнений Эйнштейна независимыми являются только шесть. Поэтому для нахождения 10 компонент метрического тензора следует использовать *четыре дополнительных необщековариантных (координатных) условия*

$$f_{(a)}(g_{\mu\nu}, x^\lambda) = 0. \tag{1.4.23}$$

Назовем и кратко охарактеризуем наиболее часто используемые координатные условия и системы как вообще, так и для этой цели.

1. *Локально-декартовы координатные системы* задаются в отдельной точке (локально). (Пусть это будет точка Р.) Как уже отмечалось, преобразованиями координат всегда можно добиться того, чтобы в точке Р метрический тензор совпадал с тензором пространства-времени Минковского в декартовых координатах:

$$g_{\mu\nu}|_P = \eta_{\mu\nu}. \tag{1.4.24}$$

2. *Локально-геодезические координатные системы* также задаются локально. Как уже отмечалось, преобразованием координат (1.3.16) в произвольной точке Р всегда можно добиться, чтобы компоненты символов Кристоффеля обратились в нуль, тогда имеем

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}|_P = 0 \rightarrow R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}. \tag{1.4.25}$$

3. *Локально-инерциальная координатная система* совмещает в себе свойства локально-декартовой и локально-геодезической координатных систем, т. е. в ней

$$g_{\mu\nu}|_P = \eta_{\mu\nu}; \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha|_P = 0. \quad (1.4.26)$$

4. *Геодезическая координатная система.* Для любой геодезической линии  $\Gamma$  можно выбрать такую координатную систему, что на ней все символы Кристоффеля обращаются в нуль:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha|_\Gamma = 0. \quad (1.4.27)$$

За пределами избранной геодезической в общем случае символы Кристоффеля отличны от нуля.

5. *Координатное условие Эйнштейна* налагается на всю рассматриваемую область или на все пространственно-временное многообразие. Оно имеет вид

$$\sqrt{-g} = 1. \quad (1.4.28)$$

Выполнение этого условия достигается преобразованием одной из координат, например координаты  $x^0$ .

Координатные системы Эйнштейна удобны для записи элементов 4-мерных объемов при интегрировании, содержащих корень из определителя метрического тензора. При данном координатном условии элементы объема принимают привычный вид:

$$\sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \rightarrow dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.4.29)$$

Кроме того, в этих координатных системах проще записываются ковариантные дивергенции:

$$A_{;\mu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} A^\mu)}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (1.4.30)$$

6. *Гармонические координатные условия*, называемые также координатными условиями де Дондера или Фока, задаются четырьмя соотношениями:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.4.31)$$

Их можно представить также в другом, эквивалентном виде

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu g^{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\mu = 0. \quad (1.4.32)$$

Гармонические координатные условия примечательны тем, что в этих координатах даламбертиан от скалярной функции имеет привычный

вид:

$$\square\varphi \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi \rightarrow g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\mu\partial x^\nu}. \tag{1.4.33}$$

В. А. Фок полагал [172], что за гармоническими координатными условиями кроется более глубокий смысл, чем простое упрощение записи волновых уравнений.

### 1.5. Уравнения движения пробных частиц

На первых этапах развития ОТО движение свободных пробных частиц по времени-подобным геодезическим линиям сначала постулировалось, а затем было выведено из уравнений Эйнштейна. Более того, оказалось, что уравнения движения в самом общем случае зависят от внутренней структуры частиц, т. е. записанные выше уравнения геодезических линий для реальных частиц следует уточнить (см., например, [125]).

Пусть пробная частица имеет размеры, малые по сравнению с характерными размерами рассматриваемой метрики. Эволюцию частицы во времени можно изобразить в виде трубки времени-подобных мировых линий, на которой тензор энергии-импульса частицы  $T^{\mu\nu}$  отличен от нуля (см. рис. 1.4). Выделим

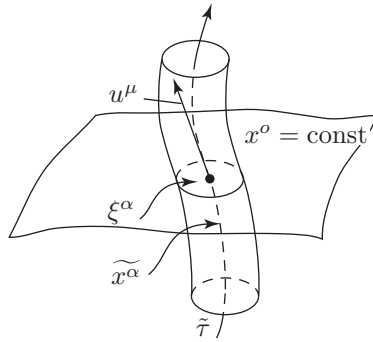


Рис. 1.4. Трубка времени-подобных мировых линий протяженной частицы

внутри трубки некоторую опорную линию  $\tilde{\tau}$ , координаты точек которой будем обозначать  $\tilde{x}^\alpha$ . Координаты  $x^\alpha$  остальных точек на пространственно-подобных сечениях трубки отличаются от координат опорной линии малыми значениями  $\xi^\alpha = x^\alpha - \tilde{x}^\alpha$ . Рассмотрим интегралы вида

$$I_{(1)}^{\mu\nu} = \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}d\sigma; \quad I_{(2)}^{\mu\nu\lambda} = \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi^\lambda d\sigma; \quad I_{(3)}^{\mu\nu\lambda\beta} = \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\xi^\lambda\xi^\beta d\sigma, \dots, \tag{1.5.1}$$

где интегрирование производится по малой области (внутри трубки) 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности  $x^0 = \text{const}$ . Следует напомнить, что в общем случае в искривленном пространстве-времени не определены

интегралы от тензорных величин, однако в малой окрестности они имеют смысл. В данном случае эти интегралы характеризуют внутреннюю структуру частицы. Частица называется *монопольной*, если отличны от нуля некоторые компоненты  $I_{(1)}^{\mu\nu}$  и обращаются в нуль все остальные интегралы. *Дипольной* частицей называется такая, которая имеет отличные от нуля компоненты только первых двух интегралов из (1.5.1), *квадрупольной* — трех интегралов и т. д.

### 1.5.1. Монопольные частицы

1. Согласно уравнениям Эйнштейна

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sqrt{-g}T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.5.2)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(x^\alpha \sqrt{-g}T^{\beta\gamma}) = \sqrt{-g}T^{\alpha\beta} - x^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sqrt{-g}T^{\mu\nu}. \quad (1.5.3)$$

Интегрируя (1.5.2) и (1.5.3) по малой 3-мерной гиперповерхности  $x^o = \text{const}$  и учитывая теорему Гаусса, получаем соответственно

$$\frac{d}{dx^o} \int \sqrt{-g}T^{\alpha o} d\sigma = - \int \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\sigma; \quad (1.5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \int (x^\alpha \sqrt{-g}T^{\beta\gamma}) d\sigma = \int \sqrt{-g}T^{\alpha\beta} d\sigma - \int (x^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sqrt{-g}T^{\mu\nu}) d\sigma = 0. \quad (1.5.5)$$

2. Внутри трубки разложим символы Кристоффеля в ряд

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda}^\alpha \xi^\lambda + \dots, \quad (1.5.6)$$

где тильда сверху соответствует значению величин на опорной линии  $\tilde{\tau}$ . Подставляя это разложение в (1.5.4), (1.5.5) и учитывая, что частица монопольная, находим в основном приближении:

$$\frac{d}{dx^o} \int \sqrt{-g}T^{\alpha o} d\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \int T^{\mu\nu} \sqrt{-g} d\sigma = 0; \quad (1.5.7)$$

$$\frac{d\tilde{x}^\alpha}{dx^o} \int \sqrt{-g}T^{\beta o} d\sigma = \int \sqrt{-g}T^{\alpha\beta} d\sigma, \quad (1.5.8)$$

где при записи нижнего выражения учтено верхнее.

3. Введем обозначение

$$M^{\alpha\beta} \equiv u^o \int \sqrt{-g} \Gamma^{\alpha\beta} d\sigma, \tag{1.5.9}$$

где

$$u^o = \frac{d\tilde{x}^o}{ds}; \quad ds^2 = g_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu.$$

Тогда уравнения (1.5.7) и (1.5.8) принимают вид

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{M^{\alpha o}}{u^o} \right) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha M^{\mu\nu} = 0; \tag{1.5.10}$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{u^\alpha}{u^o} M^{\beta o}, \tag{1.5.11}$$

где  $u^\alpha = d\tilde{x}^\alpha/ds$ . Полагая в последнем выражении  $\beta = 0$  и подставляя результат опять в это же выражение справа, находим

$$M^{\alpha\beta} = m_o u^\alpha u^\beta, \tag{1.5.12}$$

где введена характеристика частицы с известным физическим смыслом

$$m_o \equiv \frac{M^{oo}}{(u^o)^2}. \tag{1.5.13}$$

4. Используя введенное обозначение и отбрасывая тильду над символом Кристоффеля, выражение (1.5.10) можно представить в виде

$$\frac{d}{ds} (m_o u^\alpha) + m_o \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0. \tag{1.5.14}$$

Используя свойство сохранения массы частицы

$$\frac{dm_o}{ds} = 0, \tag{1.5.15}$$

приходим к принципиально важному выводу:

*в ОТО из уравнений Эйнштейна следует, что монополярные пробные частицы движутся по времени-подобным геодезическим линиям (1.3.7).*

### 1.5.2. Дипольные частицы

1. Для случая дипольных частиц к уравнениям (1.5.2) и (1.5.3) следует добавить соотношение, также следующее из (1.5.2):

$$\frac{\partial}{\partial x^\delta} (x^\alpha x^\beta \sqrt{-g} \Gamma^{\gamma\delta}) = x^\beta \sqrt{-g} \Gamma^{\gamma\alpha} + x^\alpha \sqrt{-g} \Gamma^{\gamma\beta} - x^\alpha x^\beta \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \sqrt{-g} \Gamma^{\mu\nu}. \tag{1.5.16}$$

Опять производя интегрирование по малой 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности  $x^o = \text{const}$  (внутри трубки) и используя разложение

(1.5.6), из этих трех соотношений находим соответственно:

$$\frac{d}{ds} \int \sqrt{-g} T^{\alpha 0} d\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\lambda}^{\alpha} \int \xi^{\lambda} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma = 0; \quad (1.5.17)$$

$$\int \sqrt{-g} T^{\alpha\beta} d\sigma = \frac{d\tilde{x}^{\alpha}}{dx^{\circ}} \int \sqrt{-g} T^{\beta o} d\sigma + \frac{d}{dx^{\circ}} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\beta o} d\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\beta} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma; \quad (1.5.18)$$

$$\frac{d\tilde{x}^{\alpha}}{dx^{\circ}} \int \xi^{\beta} \sqrt{-g} T^{\gamma o} d\sigma + \frac{d\tilde{x}^{\beta}}{dx^{\circ}} \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\gamma o} d\sigma = \int \xi^{\alpha} \sqrt{-g} T^{\beta\gamma} d\sigma + \int \xi^{\beta} \sqrt{-g} T^{\alpha\gamma} d\sigma. \quad (1.5.19)$$

2. Введем обозначение, аналогичное (1.5.9):

$$M^{\lambda\mu\nu} \equiv -u^{\circ} \int \xi^{\lambda} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} d\sigma. \quad (1.5.20)$$

Очевидно, что  $M^{\sigma\mu\nu} = 0$ . Определим важную для дипольных частиц характеристику — *тензор спина частицы*

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{u^{\circ}} (M^{\alpha\beta o} - M^{\beta\alpha o}). \quad (1.5.21)$$

Используя (1.5.9), соотношение (1.5.19) можно переписать в виде

$$u^{\circ} (M^{\alpha\beta\gamma} + M^{\beta\alpha\gamma}) = u^{\alpha} M^{\beta\gamma o} + u^{\beta} M^{\alpha\gamma o}. \quad (1.5.22)$$

С помощью простых алгебраических выкладок из (1.5.22) и (1.5.21) можно найти

$$M^{\alpha\beta\gamma} = -(S^{\alpha\beta} u^{\gamma} + S^{\alpha\gamma} u^{\beta}) + \frac{u^{\alpha}}{u^{\circ}} (S^{o\beta} u^{\gamma} + S^{o\gamma} u^{\beta}). \quad (1.5.23)$$

3. Используя введенные обозначения, соотношения (1.5.17) и (1.5.18) можно записать в виде

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{M^{\alpha o}}{u^{\circ}} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} M^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\alpha} M^{\sigma\mu\nu} = 0; \quad (1.5.24)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{u^{\alpha}}{u^{\circ}} M^{\beta o} - \frac{d}{ds} \left( \frac{M^{\alpha\beta o}}{u^{\circ}} \right) - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} M^{\alpha\mu\nu}. \quad (1.5.25)$$

Подставляя в последнее уравнение  $M^{\alpha\beta\gamma}$ , выраженное через тензор спина согласно (1.5.21), получаем

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^{\alpha}}{u^{\circ}} \frac{dS^{\beta o}}{ds} - \frac{u^{\beta}}{u^{\circ}} \frac{dS^{\alpha o}}{ds} + \left( \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{u^{\alpha}}{u^{\circ}} \Gamma_{\mu\nu}^{\circ} \right) M^{\beta\mu\nu} - \left( \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \frac{u^{\beta}}{u^{\circ}} \Gamma_{\mu\nu}^{\circ} \right) M^{\alpha\mu\nu} = 0, \quad (1.5.26)$$

т. е. производные по  $ds$  присутствуют только от тензора спина. Следовательно, уравнения (1.5.26) можно назвать *уравнениями движения спина*. Уравнения же (1.5.24) следует понимать как *уравнения движения спиновых (дипольных) частиц*.



4. Уравнения (1.5.26) и (1.5.24) можно переписать, используя введенные величины  $m_o$ ,  $S^{\alpha\beta}$ ,  $u^\alpha$  и их производные. В [125] показано, что  $S^{\alpha\beta}$  является тензором, а  $m_o$  — скаляром относительно допустимых координатных преобразований, т. е. от записанных приближенных уравнений можно перейти к общековариантным уравнениям. Вводя общековариантный дифференциальный оператор

$$\frac{DB_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{Ds} = \frac{dB_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{ds} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} B_{\nu\dots}^{\lambda\dots} u^{\sigma} + \dots - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} B_{\lambda\dots}^{\mu\dots} u^{\sigma} - \dots, \tag{1.5.27}$$

где  $B_{\nu\dots}^{\mu\dots}$  — произвольный тензор, уравнения (1.5.26) и (1.5.24) можно представить в следующем общековариантном виде:

$$\frac{D}{Ds} \left( m_o u^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} \right) = -\frac{1}{2} S^{\mu\nu} u^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\alpha; \tag{1.5.28}$$

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds} + u^\alpha u_\nu \frac{DS^{\beta\nu}}{Ds} - u^\beta u_\nu \frac{DS^{\alpha\nu}}{Ds} = 0. \tag{1.5.29}$$

Эти уравнения известны под названием *уравнений Матиссона—Папапетру*. Очевидно, что при  $S^{\alpha\beta} = 0$  (для монополярной частицы) уравнения (1.5.28) совпадают с (1.5.14), т. е. (1.5.28) являются обобщением уравнений геодезических линий на случай вращающихся (дипольных) частиц.

5. Система уравнений Матиссона—Папапетру является неполной, и для их решения необходимо использовать три дополнительных условия. Например, *дополнительные условия Кориналдези—Папапетру* имеют вид

$$S^{\mu\nu} u_\mu = 0. \tag{1.5.30}$$

Оно означает, что тензор спина ортогонален 4-скорости движущейся материи.

# Основные следствия общей теории относительности



А. Эйнштейн в статье «Принципиальное содержание общей теории относительности» писал: «Теория, как мне кажется сегодня, покоится на трех основных положениях, которые ни в какой степени не зависят друг от друга. (...)

- а) *Принцип относительности*: законы природы являются лишь высказываниями о пространственно-временных событиях: поэтому они находят свое естественное выражение в общековариантных уравнениях.
- б) *Принцип эквивалентности*: инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» ( $g_{\mu\nu}$ ) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации. Описываемое фундаментальным тензором состояние пространства мы будем обозначать как «G-поле».
- в) *Принцип Маха*: G-поле *полностью* определено массами тел. Масса и энергия, согласно следствиям специальной теории относительности, представляют собой одно и то же; формально энергия описывается симметричным тензором энергии; это означает, что G-поле обуславливается и определяется тензором энергии материи» [192, с. 613].

Поясняя последний принцип, Эйнштейн писал: «Название «принцип Маха» выбрано потому, что этот принцип является обобщением требования Маха, что инерция должна сводиться к взаимодействию тел». «По принципу Маха, согласно уравнениям гравитационного поля, не может существовать никакого G-поля без материи. Очевидно, что постулат (в) тесно связан с вопросом пространственно-временной структуры мира как целого, так как в порождении G-поля принимают участие все массы» [192, с. 614].

Следует подчеркнуть, что идеи Маха послужили своего рода «повивальной бабкой» при создании Эйнштейном ОТО. Сам Мах почерпнул

---

эти идеи в работах немецкой физической школы середины XIX в. Так, например, представитель этой школы В. Вебер полагал, что «непосредственное взаимодействие двух электрических масс зависит не только от этих масс, но также от присутствия третьего тела» [18, с. 225], что соответствовало взглядам Берцелиуса, которому принадлежит заслуга введения специального термина «каталитическая сила». Эйнштейн в период создания ОТО разделял эти взгляды. Так, обсуждая компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , входящие в уравнения физики, он подчеркивал, что они «оказывают влияние на все физические процессы. Однако и наоборот, физические процессы должны определять гравитационное поле, т. е. величины  $g_{\mu\nu}$ » [191].

Но когда ОТО была создана, оказалось, что уравнения Эйнштейна содержат решения и в отсутствие материальных тел. Например, метрика Минковского является точным решением уравнений Эйнштейна. В истории физики можно найти ряд примеров, когда уравнения, сформулированные на основе тех или иных соображений, начинают диктовать дальнейший ход рассуждений. Как писал Эйнштейн, «необходимость придерживаться [принципа Маха] отнюдь не разделяется другими авторами, но я и сам считаю, что выполнение его не обязательно» [192, с. 614]. Споры о выполнимости принципа Маха в физике продолжаются до настоящего времени (см. гл. 13).

Три наиболее важных решения уравнений Эйнштейна: сферически-симметричное решение Шварцшильда, аксиально-симметричная метрика Керра и однородные изотропные космологические модели Фридмана, на основе которых делаются выводы о содержании и следствиях ОТО, по нашему мнению, удовлетворяют принципу Маха, описывая *влияние массивных объектов (источников искривленности) на соотношения событий и поведение других пробных объектов в соответствующем пространстве-времени.*

## 2.1. Метрика Шварцшильда

Начнем с рассмотрения физически наиболее важного решения уравнений Эйнштейна — с метрики пространства-времени, создаваемой компактным сферически симметричным материальным объектом. Именно эта метрика, называемая метрикой Шварцшильда, с высокой степенью точности описывает пространство-время в Солнечной системе и в окрестности Земли. Из нее в основном приближении выводится закон всемирного тяготения Ньютона, а в следующем приближении вычисляются известные эффекты, подтверждающие ОТО.

### 2.1.1. Вывод решения Шварцшильда

Будем искать решение вне распределения материи, т. е. будем полагать, что в правой части уравнений Эйнштейна (1.4.18) стоит нуль. Это означает, что уравнения Эйнштейна берутся в виде

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.1)$$

Квадрат интервала в пространстве-времени Минковского в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.2)$$

Переобозначим координаты:

$$ct = x^0; \quad r = x^1; \quad \theta = x^2; \quad \varphi = x^3. \quad (2.1.3)$$

Условие сферической симметрии в упрощенной форме будем понимать как присутствие угловых координат лишь в виде комбинации, заключенной в (2.1.2) в круглых скобках. Тогда в случае ОТО квадрат интервала следует ожидать в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 - f(x^0, r)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1.4)$$

где  $g_{00}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{01}$  и  $f(x^0, r)$  — четыре функции от двух координат  $x^0$  и  $r \equiv x^1$ .

Воспользуемся возможностью преобразований двух координат

$$x'^0 = x'^0(x^0, r); \quad r' = r'(x^0, r), \quad (2.1.5)$$

сохраняющих вид метрики (2.1.4), таким образом, чтобы исключить две неизвестные функции, приведя их к виду

$$g'_{01} = 0; \quad f(x'^0, r') = 1. \quad (2.1.6)$$

В итоге остаются две неизвестные компоненты метрического тензора, которые для удобства дальнейших выкладок переобозначим

$$g'_{00} = e^\nu; \quad g'_{11} = -e^\lambda, \quad (2.1.7)$$

где  $\nu(x^0, r)$  и  $\lambda(x^0, r)$  — две новые неизвестные функции от двух переменных, которые предстоит найти из уравнений Эйнштейна. (Далее штрихи у новых компонент писать не будем.) Проведенные рассуждения фактически включают в себя задание координатных условий, которые всегда необходимо добавлять к уравнениям Эйнштейна.

Для решения уравнений Эйнштейна используем обычный путь, который состоит из следующих пяти этапов: 1) из тех или иных соображений задается ожидаемый вид ковариантных компонент метрического тензора, 2) из ковариантных компонент метрического тензора выражаются контравариантные компоненты, 3) находятся компоненты символов Кристоффеля через неизвестные функции, 4) записываются компоненты тензора Риччи, 5) решается система уравнений Эйнштейна.

1. Первый этап уже осуществлен выше. В итоге компоненты ковариантного метрического тензора найдены в виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

2. По формулам (1.2.4) из этих компонент находятся контравариантные компоненты метрического тензора в виде

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

3. Сорок компонент символов Кристоффеля, записываемых через компоненты метрики посредством формулы (1.3.8), будем вычислять в четыре приема.

а) Сначала найдем четыре компоненты, обладающие одинаковыми индексами. Они представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\mu} \quad (2.1.10)$$

(без суммирования по одинаковым индексам) и имеют следующие значения:

$$\Gamma_{oo}^o = \dot{\nu}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}; \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0, \quad (2.1.11)$$

где точкой будем обозначать производную по  $x^o$ , а штрихом — производную по  $r$ .

б) 12 компонент символов Кристоффеля с одинаковыми нижними индексами представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\mu}^\sigma = -\frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\sigma}, \quad \text{при } \mu \neq \sigma \quad (2.1.12)$$

и находятся в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^o &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}; & \Gamma_{oo}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}; & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; & \Gamma_{22}^o &= \Gamma_{33}^o = \Gamma_{oo}^2 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{oo}^3 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

в) 12 компонент символов Кристоффеля с одинаковыми одним верхним и одним нижним индексами представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\sigma}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x^\mu}, \quad \text{при } \mu \neq \sigma \quad (2.1.14)$$

и находятся в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{o1}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}; & \Gamma_{1o}^o &= \frac{\nu'}{2}; & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; & \Gamma_{23}^3 &= ctg\theta; \\ \Gamma_{o2}^2 &= \Gamma_{o3}^3 = \Gamma_{o2}^o = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{o3}^o = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

г) 12 компонент символов Кристоффеля со всеми разными индексами в данной метрике равны нулю:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0 \quad \text{при } \mu \neq \nu \neq \lambda. \quad (2.1.16)$$

4. Отличные от тождественного нуля компоненты тензора Риччи, приравненные нулю согласно (2.1.1), находятся в виде:

$$R_{oo} = e^{\nu-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{\nu\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = 0; \quad (2.1.17)$$

$$R_{11} = - \left( \frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) - e^{\lambda-\nu} \left( \frac{\nu\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) = 0; \quad (2.1.18)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \theta} = e^{-\lambda} \left( -1 + \frac{r}{2} (\lambda' - \nu') \right) + 1 = 0; \quad (2.1.19)$$

$$R_{o1} = \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0. \quad (2.1.20)$$

5. Решим получившиеся уравнения. Из (2.1.20) сразу же находим, что функция  $\lambda$  не зависит от  $x^o$ , т. е.

$$\dot{\lambda} = 0 \rightarrow \lambda = \lambda(r). \quad (2.1.21)$$

Умножая (2.1.17) на  $e^{\lambda-\nu}$  и складывая с (2.1.18), находим

$$\lambda' + \nu' = 0 \rightarrow \lambda + \nu = f(x^o) \rightarrow \nu = -\lambda + f(x^o). \quad (2.1.22)$$

Используя это выражение, произведем преобразование координаты  $x^o$  так, чтобы в первой части метрики (2.1.4) получилось

$$e^{-\lambda+f(x^o)}(dx^o)^2 = e^{-\lambda}(dx'^o)^2, \quad (2.1.23)$$

тогда, опуская штрих, имеем

$$\lambda + \nu = 0 \rightarrow \lambda(r) = -\nu(r), \quad (2.1.24)$$

т. е. фактически доказана теорема, что *вакуумное сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна является статическим*.

Вводя обозначение  $y = e^\nu$ , уравнение (2.1.19) можно привести к виду

$$y' + \frac{y}{r} - \frac{1}{r} = 0. \quad (2.1.25)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из него находим

$$\ln(1 - y) = \ln C_o - \ln r \rightarrow y = e^\nu = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{C_o}{r}\right), \quad (2.1.26)$$

где  $C_o$  — константа интегрирования.

В итоге имеем решение

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C_o}{r}\right) (dx^o)^2 - \frac{dr^2}{(1 - C_o/r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.27)$$

## 2.1.2. Анализ метрики Шварцшильда и ее обобщений

### I. Анализ метрики Шварцшильда

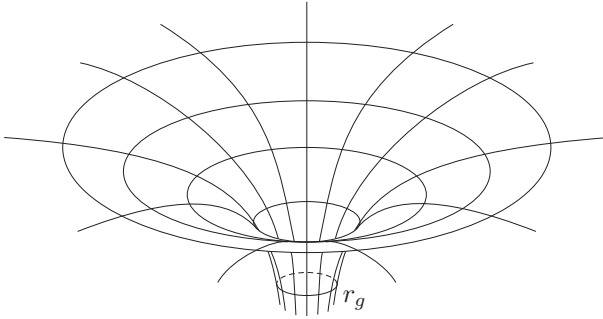
Забегая вперед, укажем, что из принципа соответствия с теорией Ньютона (см. разд. 2.1.3) находится константа интегрирования в виде  $C_o = 2GM/c^2$ , где  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная,  $c$  — скорость света,  $M$  — масса центрального объекта. В окончательном виде решение Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^o)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.28)$$

Обсудим некоторые принципиальные моменты метрики Шварцшильда.

1. Выделим пространственно-подобную часть метрики, т. е. положим  $dx^o = 0$ , тогда можно писать  $-ds^2 = dl^2$ . Зафиксируем радиальную координату  $r$ , положив  $dr = 0$ , и рассмотрим смещение по окружности в экваториальной плоскости, т. е. пусть  $\theta = 90^\circ$  и изменяться может лишь угол  $\varphi$  от нуля до  $2\pi$ . В этом случае из (2.1.28) имеем выражения для малого смещения и полную длину окружности:

$$dl = r d\varphi \rightarrow l = 2\pi r. \quad (2.1.29)$$



**Рис. 2.1.** Воронка, иллюстрирующая искривление пространства вокруг сферически-симметричного материального источника

Это очевидный результат, гласящий, что длина окружности, как и в евклидовом пространстве, выражается в виде произведения  $2\pi$  на радиус. Однако в данном случае  $r$  является лишь радиальной координатой, которая при другом выборе координат могла бы входить в длину окружности иным образом. По этой причине часто говорят, что метрика Шварцшильда в виде (2.1.28) записана в специальных *координатах кривизн*.

2. Теперь возьмем смещение вдоль радиальной координаты от какого-то начального значения  $r_1$  до конечного  $r_2$  при  $\theta = 90^\circ$  и при постоянном значении угла  $\varphi$ . В этом случае из (2.1.28) имеем

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/c^2r}} \rightarrow l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2GM/c^2r}} > (r_2 - r_1), \quad (2.1.30)$$

т. е. расстояние от источника до окружности длиной  $2\pi r_2$  оказывается больше значения разности радиальных координат. Такую ситуацию можно понимать только таким образом, что пространство «прогибается» под материальным источником. С помощью доступной нашему воображению 2-мерной аналогии эту ситуацию можно изобразить в виде воронки на рис. 2.1.

3. Рассмотрим метрику Шварцшильда при очень малых значениях параметра  $r$ . Из (2.1.28) видно, что при значении радиальной координаты

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.1.31)$$

компонента метрики  $g_{00}$  обращается в нуль, а компонента  $g_{11}$  стремится к бесконечности. Это значение  $r_g$  называется *гравитационным радиусом*. Для Солнца он порядка 3 километров, а для Земли — порядка 9 миллиметров. При еще меньших значениях  $r < r_g$  компонента  $g_{00}$  становится отрицательной, а компонента  $g_{11}$  — положительной. Это можно



трактовать так, что координаты  $x^0$  и  $x^1 = r$  меняют свой характер: координата  $x^0$  становится пространственно-подобной, а координата  $r$  — времени-подобной.

Для реальных объектов с геометрическими размерами, значительно превышающими гравитационный радиус,  $r_g$  имеет символическое значение — означает перевод значений масс в размерность длины.

4. На основе записанных формул была высказана гипотеза черных дыр о возможности существования объектов с геометрическим радиусом, меньшим гравитационного. Вблизи таких объектов следует ожидать множество необычных явлений. Например, расчеты показывают, что из-под гравитационного радиуса ничто не может выйти, — ни у света, ни у других тел просто не хватит энергии преодолеть притяжение черных дыр<sup>1)</sup>. По этой причине они должны быть невидимыми, «черными», — отсюда и их название.

Однако на черные дыры могут падать (пересекать гравитационный радиус извне) другие объекты, причем для стороннего наблюдателя скорость падающих на черную дыру объектов должна стремиться к скорости света, их масса при этом должна бесконечно расти, а сам процесс падения должен продолжаться бесконечно долго. Любопытно отметить, что в системе отсчета падающих объектов время достижения ими гравитационного радиуса оказывается конечным.

Ведутся эксперименты по обнаружению черных дыр в космосе, конечно, не по их собственному излучению (которого нет), а по косвенным эффектам. Поскольку падающие объекты разгоняются до околосветовых скоростей, то при их столкновениях можно ожидать жесткое рентгеновское излучение. Черные дыры идентифицируются с невидимыми в оптическом диапазоне источниками мощного рентгеновского излучения. В космосе обнаружено значительное количество претендентов на черные дыры, в том числе обсуждается вопрос о существовании гигантских черных дыр в центре нашей и других галактик (см. [186]).

Однако имеется и другая позиция, соответствующая универсальному правилу в физике: *если в теории в каких-то областях или явлениях возникают бесконечно большие величины, то это свидетельство то-*

<sup>1)</sup>Заметим, что к данному выводу можно прийти в рамках ньютоновой теории тяготения с добавлением постулата предельной скорости, равной скорости света. Можно поставить задачу, на каком расстоянии  $r_g$  от точечной массы  $M$  тело с произвольной массой  $m$ , движущееся с максимальной скоростью  $v = c$ , обладает кинетической энергией, равной его потенциальной энергии? Из элементарных соотношений находим

$$\frac{mc^2}{2} - G\frac{mM}{r_g} = 0 \rightarrow r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.1.32)$$

го, что в таких обстоятельствах выводы теории теряют силу. По мнению, высказанному В. А. Фоком и рядом других физиков-гравитационистов, бесконечности на гравитационном радиусе свидетельствуют о границе применимости закономерностей эйнштейновской теории гравитации. Однако это не исключает возможности существования массивных астрофизических объектов загадочной природы, ныне трактуемых как черные дыры.

## II. Некоторые обобщения метрики Шварцшильда

Выпишем несколько наиболее непосредственных обобщений метрики Шварцшильда.

**1. Метрика Котлера** является сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна с космологическим членом в «вакууме»

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.1.33)$$

Оно находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.34)$$

Из-за дополнительного слагаемого, пропорционального  $r^2$ , в компонентах  $g_{00}$  и  $g_{11}$  это решение не является асимптотически плоским. Поскольку долгое время не было оснований говорить о проявлениях космологической постоянной в наблюдаемой части окружающего мира, полагали, что значение космологической постоянной чрезвычайно мало:  $\Lambda < 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ .

**2. Метрика Вайдья** описывает пространство-время вокруг сферически-симметричного источника, испускающего высокочастотное излучение. Такая система описывается уравнением Эйнштейна, в правой части которого стоит усредненный тензор энергии-импульса высокочастотного излучения:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} P k_\mu k_\nu, \quad (2.1.35)$$

где  $k^\mu$  — изотропный вектор распространения излучения,  $P$  — плотность потока энергии в системе отсчета с 4-скоростью  $\tau^\mu$  такой, что  $k^\mu \tau_\mu = 1$ . Метрика Вайдья в координатах кривизн находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM(u)}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) (dx^0)^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1.36)$$

где  $u = x^0 - r$  — запаздывающее время,  $M(u)$  — масса, зависящая от  $u$ .

Имеется многочисленный пласт работ (см., например, библиографию в [65]), в которых исследовались решения уравнений Эйнштейна внутри

сферически-симметричных материальных источников, каковыми, например, являются звезды.

Кроме того, в гл. 5 будет приведен ряд других сферически-симметричных совместных решений уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока.

### 2.1.3. Уравнения геодезических линий в метрике Шварцшильда

Чтобы проанализировать соотношение ньютоновой теории гравитации и эйнштейновской ОТО, рассмотрим уравнения геодезических (1.3.7) в метрике Шварцшильда (2.1.27), полагая константу  $C_0$  пока неизвестной. Последовательно выпишем и решим четыре уравнения, указывая аналоги в ньютоновой теории.

1. Начнем с компоненты  $\mu = 2$ , т. е. с уравнения для угла  $\theta$ . Выбирая из (2.1.11)–(2.1.15) отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля, имеем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0. \quad (2.1.37)$$

Подставляя найденные выше значения символов Кристоффеля, находим

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0. \quad (2.1.38)$$

Пусть в начальный момент рассматриваемое тело находилось в экваториальной «плоскости» и скорость тоже лежала в этой плоскости, т. е. пусть  $\theta_0 = \pi/2$  и  $(d\theta/ds)_0 = 0$ , тогда из (2.1.38) следует, что и дальше движение тела будет происходить в этой «плоскости», т. е.

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0; \quad \frac{d\theta}{ds} = 0; \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.1.39)$$

Этот результат соответствует известному в ньютоновой теории факту, что траектория тела, движущегося в поле центральных сил, находится в одной плоскости — в плоскости Лапласа.

2. Далее рассмотрим компоненту  $\mu = 3$ , т. е. решим уравнение геодезической для угла  $\varphi$ , отличные от нуля слагаемые которого имеют вид

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (2.1.40)$$

Подставляя сюда найденные выше компоненты символов Кристоффеля, имеем

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2ctg\theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (2.1.41)$$

Воспользовавшись (2.1.39), отбросим последнее слагаемое, кроме того, умножим все уравнение на  $ds/dr$  и введем обозначение  $d\varphi/ds \equiv q(r)$ , тогда приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$q' + \frac{2}{r}q = 0, \quad (2.1.42)$$

где штрих, как и ранее, означает дифференцирование по радиальной координате. Решение этого уравнения имеет вид

$$q = \frac{\sigma_o}{r^2} \rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \sigma_o, \quad (2.1.43)$$

где  $\sigma_o$  — константа интегрирования.

В ньютоновой теории этой компоненте уравнений геодезической соответствует закон сохранения площадей (секторной скорости, момента количества движения)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sigma. \quad (2.1.44)$$

Опять имеется близкое соответствие двух теорий, причем следует положить

$$\sigma_o = \frac{\sigma}{c}. \quad (2.1.45)$$

3. Уравнение геодезической для  $\mu = 0$  имеет вид

$$\frac{d^2 x^o}{ds^2} + 2\Gamma_{o1}^o \frac{dr}{ds} \frac{dx^o}{ds} = 0 \quad (2.1.46)$$

или через функцию  $\nu(r)$  оно представляется в форме

$$\frac{d^2 x^o}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds} \frac{dx^o}{ds} = 0. \quad (2.1.47)$$

Умножая (2.1.47) на  $ds/dr$  и вводя обозначение  $dx^o/ds \equiv p(r)$ , получаем простое уравнение

$$p' + \nu' p = 0. \quad (2.1.48)$$

Его решение имеет вид

$$p = \frac{dx^o}{ds} = E_o e^{-\nu} = \frac{E_o}{1 - C_o/r}, \quad (2.1.49)$$

где  $E_o$  — константа интегрирования.

В ньютоновой механике этому соотношению соответствует закон сохранения энергии. При этом константа  $E_o$  связана со значением полной энергии частицы (суммы кинетической и потенциальной энергий).

4. Радиальная компонента геодезической ( $\mu = 1$ ) имеет сложный вид

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \Gamma_{oo}^1 \left(\frac{dx^o}{ds}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \quad (2.1.50)$$

однако нам не нужно его решать, поскольку из метрики Шварцшильда легко находится его первый интеграл. Действительно, разделив (2.1.27) на  $ds^2$ , имеем

$$1 = \left(1 - \frac{C_o}{r}\right) \left(\frac{dx^o}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - C_o/r} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2. \quad (2.1.51)$$

Подставляя сюда решения (2.1.43), (2.1.49) и перейдя, во-первых, от  $r$  к  $u = 1/r$ , и, во-вторых, от дифференцирования по  $ds$  к дифференцированию по  $d\varphi$ , используя формулы:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{d}{d\varphi} = \sigma_o u^2 \frac{d}{d\varphi}; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}, \quad (2.1.52)$$

приходим к аналогу 1-й формулы Бине в механике Ньютона

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{E_o^2 - 1}{\sigma_o^2} + \frac{C_o u}{\sigma_o^2} + C_o u^3. \quad (2.1.53)$$

Продифференцировав это выражение по  $\varphi$ , приходим к аналогу классической 2-й формулы Бине

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{C_o}{2\sigma_o^2} + \frac{3}{2} C_o u^2. \quad (2.1.54)$$

Напомним, что в ньютоновой теории 2-я формула Бине определяет радиальное ускорение через действующую на тело массы  $m$  центральную силу  $\mathcal{F}_r$ :

$$m u^2 \sigma^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right) = -\mathcal{F}_r. \quad (2.1.55)$$

Подставляя сюда силу центрального гравитирующего объекта  $\mathcal{F}_r = -GmMu^2$ , приходим к выражению

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = G \frac{M}{\sigma^2}, \quad (2.1.56)$$

где  $M$  — масса центрального объекта.

Из сравнения правой части (2.1.56) с первым слагаемым справа в (2.1.54) находим константу интегрирования  $C_o$ , ранее введенную в метрику Шварцшильда (2.1.28):

$$C_o = \frac{2GM}{c^2} \equiv r_g. \quad (2.1.57)$$

Восстанавливая из (2.1.54) классический аналог 2-й формулы Бине (умножением на  $mu^2\sigma^2$ ), приходим в случае ОТО к обобщенной центральной «силе»:

$$mu^2\sigma^2 \left( \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) = G \frac{mM}{r^2} + 3G \frac{mM}{r^4} \frac{\sigma^2}{c^2} \equiv \mathcal{F}_N + \mathcal{F}_E, \quad (2.1.58)$$

слагающейся из ньютоновой силы всемирного тяготения  $\mathcal{F}_N$  и дополнительной эйнштейновской «силы»  $\mathcal{F}_E$ , убывающей обратно пропорционально четвертой степени расстояния.

Запишем отношение эйнштейновской «силы» к ньютоновой для нерелятивистского случая:

$$\frac{\mathcal{F}_E}{\mathcal{F}_N} = \frac{3u^2\sigma^2}{c^2} \simeq \frac{(vr)^2}{r^2c^2} \simeq \left( \frac{v}{c} \right)^2, \quad (2.1.59)$$

где записана трансверсальная компонента скорости  $v \simeq r\dot{\varphi}$ . Таким образом, *эйнштейновская, дополнительная «сила» пренебрежимо мала по сравнению с ньютоновой силой для частиц, движущихся со скоростью, малой по сравнению со скоростью света.*

Следует обратить внимание на тот факт, что здесь использованы понятия силы в координатном смысле. Они существенно зависят от выбора координатной системы. Для корректной физической интерпретации необходимо использовать методы задания системы отсчета, которым посвящена следующая гл. 3 (см. разд. 3.6.2).

#### 2.1.4. Смещение перигелия Меркурия

Перепишем уравнение геодезической (2.1.54) в более компактной форме

$$u'' + u = \alpha + \beta u^2, \quad (2.1.60)$$

где  $\beta u^2 \ll \alpha$ , и

$$\alpha = G \frac{M}{\sigma^2}; \quad \beta = 3G \frac{M}{c^2}. \quad (2.1.61)$$

Будем решать его методом последовательных приближений.

**Нулевое приближение** представляет собой решение уравнения (2.1.56) для случая ньютонова закона всемирного тяготения ( $\beta = 0$ ), т. е. уравнения

$$u_o'' + u_o = \alpha. \tag{2.1.62}$$

Его решение состоит из двух частей: общего решения однородного уравнения (колебаний с единичной частотой)  $u_{oo} = C_1 \cos(\varphi + \varphi_o)$  и частного решения неоднородного уравнения  $u_{o1} = \alpha$ , так что имеем

$$u_o = u_{oo} + u_{o1} = \alpha + C_1 \cos \varphi = \alpha(1 + e \cos \varphi), \tag{2.1.63}$$

где положено, что начальная фаза  $\varphi_o = 0$ . Для случая финитного движения планеты это уравнение эллипса с эксцентриситетом  $e = C_1/\alpha < 1$ , которое можно записать в более знакомом виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \tag{2.1.64}$$

где  $p = 1/\alpha$  — фокальный параметр.

**Первое приближение** является решением уравнения (2.1.60), в правую часть которого вместо  $u$  подставлено нулевое приближение (2.1.63), т. е. решением уравнения

$$u_1'' + u_1 = \beta \alpha^2 (1 + e \cos \varphi)^2 = \alpha^2 \beta \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta e^2 \cos 2\varphi + 2\alpha^2 \beta e \cos \varphi, \tag{2.1.65}$$

где квадрат косинуса записан через косинус двойного угла по известной тригонометрической формуле.

Поскольку уравнение (2.1.65) является линейным, его решение можно представить в виде суммы трех частных решений уравнения колебаний последовательно с отдельными слагаемыми в правых частях

$$u_1 = u_{11} + u_{12} + u_{13} \tag{2.1.66}$$

и общего решения  $u_o$  (2.1.63) однородного уравнения. Для первого слагаемого имеем

$$u_{11} = \alpha^2 \beta \left( 1 + \frac{e^2}{2} \right). \tag{2.1.67}$$

Второе слагаемое находится из решения уравнения колебаний с правой частью в виде вынуждающей силы с удвоенной частотой. Оно имеет вид

$$u_{12} = -\frac{1}{6} \alpha^2 \beta e^2 \cos 2\varphi. \tag{2.1.68}$$

Третье слагаемое соответствует резонансному случаю, когда частота вынуждающей силы равна собственной частоте колебаний. Как известно,

решение такого уравнения ищется в виде  $u_{13} = C_2\varphi \sin \varphi + C_3\varphi \cos \varphi$ . Вычисляя константы интегрирования  $C_2$  и  $C_3$ , находим

$$u_{13} = \alpha^2\beta e\varphi \sin \varphi. \quad (2.1.69)$$

Собирая все части решения, имеем в данном приближении решение

$$u = \alpha(1 + e \cos \varphi) + \alpha^2\beta \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{6}\alpha^2\beta e^2 \cos 2\varphi + \alpha^2\beta e\varphi \sin \varphi. \quad (2.1.70)$$

Проанализируем вклады отдельных слагаемых. Член  $u_{11}$  приводит к незначительной деформации (сжатию) эллипса, сохраняя замкнутый характер траектории. Этот эффект чрезвычайно мал и в настоящее время не обнаружим.

Слагаемое  $u_{12}$  приводит к наложению на эллипс биений с удвоенной частотой, не меняя замкнутый характер траектории. Этот эффект также чрезвычайно мал и недоступен для обнаружения существующей аппаратурой.

Третье, резонансное слагаемое приводит к накоплению эффекта с каждым новым витком орбиты. Собирая вместе первое и последнее слагаемые справа в (2.1.70), имеем

$$u \simeq u_0 + u_{13} = \alpha(1 + e \cos \varphi + \alpha\beta e\varphi \sin \varphi) \simeq \alpha[1 + e \cos(\varphi - \alpha\beta\varphi)], \quad (2.1.71)$$

где из-за малости констант положено  $\alpha\beta\varphi \simeq \sin \alpha\beta\varphi$  и  $\cos \alpha\beta\varphi \simeq 1$  и произведен переход к косинусу разности двух углов.

Исходя из положения планеты в перигелии (на кратчайшем расстоянии от Солнца), поставим вопрос о значении угла, при котором на следующем витке будет то же самое ближайшее положение. Очевидно, это произойдет, когда аргумент косинуса изменится на  $2\pi$ , т. е. при условии

$$\varphi(1 - \alpha\beta) = 2\pi, \quad (2.1.72)$$

откуда находим

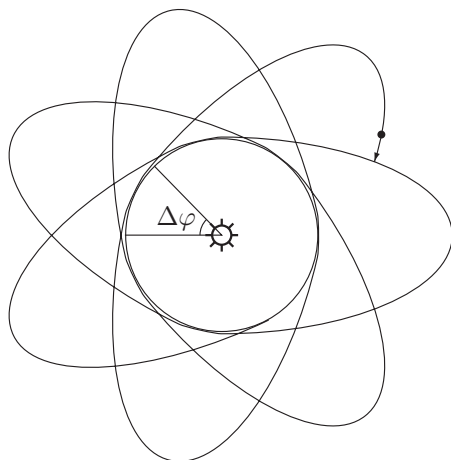
$$\varphi = \frac{2\pi}{1 - \alpha\beta} \simeq 2\pi + 2\pi\alpha\beta \equiv 2\pi + \Delta\varphi, \quad (2.1.73)$$

где, используя (2.1.61), имеем

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{G^2 M^2}{c^2 \sigma^2}. \quad (2.1.74)$$

Такое движение планеты представляет собой розетку, составленную из поворачивающегося на малый угол эллипса (см. рис. 2.2). Эту розетку можно наглядно представить как движение шарика в неглубокой чаше-





**Рис. 2.2.** Движение планеты в метрике Шварцшильда по розетке

воронке, изображенной на рисунке 2.1. Понятно, что этот шарик будет крутиться по поверхности, описывая некую кривую траекторию.

Для ближайшей к Солнцу планеты Меркурий это значение составляет  $\Delta\varphi_M \simeq 42'',9$  за столетие. Для Венеры  $\Delta\varphi_V \simeq 8'',6$ , а для Земли  $\Delta\varphi_Z \simeq 3'',8$  за столетие. Этот эффект для Меркурия был обнаружен астрономами уже в конце XIX в., но некоторое время для него не было подходящего объяснения. Оно было получено сразу же после создания ОТО и явилось первым подтверждением эйнштейновской теории гравитации.

### 2.1.5. Эффект отклонения лучей света

Другое подтверждение ОТО было получено в 1919 г. во время наблюдения солнечного затмения. Было показано, что лучи от далеких звезд, проходящие вблизи диска Солнца, искривляются, причем угол их отклонения оказался в два раза больше, чем это предсказывалось ньютоновой теорией гравитации.

Этот эффект опять можно подсчитать с помощью уравнений геодезической линии, однако в этом случае это будет изотропная геодезическая. Поскольку в (2.1.28) слева стоит нуль, то в итоговом уравнении отсутствует вклад ньютонова слагаемого и радиальное уравнение принимает вид

$$u'' + u = \beta u^2. \quad (2.1.75)$$

Опять будем решать это уравнение методом последовательных приближений.

**Нулевое приближение** получается решением уравнения (2.1.75) с нулевой правой частью

$$u''_o + u_o = 0. \quad (2.1.76)$$

Это однородное уравнение колебаний с единичной частотой. Его решение имеет вид

$$u_o = C_4 \cos(\varphi + \varphi_o) \rightarrow u_o = \frac{1}{R} \cos \varphi. \quad (2.1.77)$$

Его можно интерпретировать как свободное движение луча света по прямой линии, параллельной оси  $y$ , на расстоянии  $R$  от Солнца (см. рис. 2.3).

**Первое приближение** находится из уравнения вида (2.1.75), куда в правую часть подставлено нулевое приближение:

$$u''_1 + u_1 = \frac{\beta}{R^2} \cos^2 \varphi. \quad (2.1.78)$$

Частное решение этого уравнения можно представить в виде

$$u_1 = \frac{\beta}{3R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (2.1.79)$$

Собирая вместе нулевое и первое приближение, имеем

$$u = u_o + u_1 = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{\beta}{3R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (2.1.80)$$

Умножим левую и правую части (2.1.80) на  $rR$  и введем декартовы координаты согласно формулам:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi, \quad (2.1.81)$$

тогда (2.1.80) можно переписать в виде

$$R = x + \frac{GM}{c^2 R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + 2y^2) \rightarrow x = R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + 2y^2). \quad (2.1.82)$$

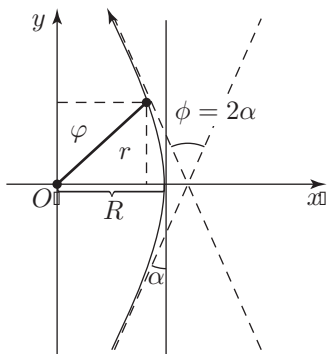
Эта траектория, симметричная относительно горизонтальной оси, изображена на рисунке 2.3.

Чтобы найти угол  $\alpha$  между асимптотой и осью  $y$ , устремим  $y$  к бесконечности, тогда имеем

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} (\pm 2y). \quad (2.1.83)$$

Отсюда легко находится приближенное значение угла  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dy} = \mp \frac{2GM}{c^2 R} \simeq \alpha. \quad (2.1.84)$$



**Рис. 2.3.** Эффект отклонения света, проходящего вблизи диска Солнца

Угол отклонения луча света равен удвоенному углу  $\alpha$ :

$$\phi = 2\alpha = \frac{4GM}{c^2 R}. \quad (2.1.85)$$

Подставляя сюда массу Солнца и вместо  $R$  радиус Солнца, находим численное значение угла отклонения лучей света, проходящих вблизи поверхности Солнца,  $\phi = 1''{,}75$ .

Легко понять, что этот эксперимент можно проводить лишь во время солнечного затмения, когда на небе вблизи Солнца видны звезды. Для этого нужно сфотографировать участок звездного неба вблизи прикрытого Луной диска Солнца, а затем сделать снимок этого же участка неба без Солнца и наложить две фотографии друг на друга. По сдвигу двух изображений звезды, оказавшейся вблизи диска, можно вычислить угол отклонения света. Как уже отмечено выше, аналогичный эффект имеет место и в ньютоновой теории гравитации, если свет рассматривать как материальную частицу, движущуюся со скоростью света и взаимодействующую с Солнцем согласно закону всемирного тяготения. Однако в ньютоновой теории эффект оказывается ровно в два раза меньше. Эксперименты, впервые проведенные в 1919 г. и неоднократно повторявшиеся позже, убедительно свидетельствуют в пользу эйнштейновского значения угла отклонения, а не ньютонового.

Впоследствии этот эффект был подтвержден в других экспериментах: при радиолокации планет Солнечной системы, при наблюдениях отклонений радиосигналов от квазаров, в виде отрицательных параллаксов далеких звезд и т. д.

В литературе часто говорят о трех классических эффектах ОТО в метрике Шварцшильда, добавляя к двум описанным выше эффектам

гравитационного красного смещения. Он состоит в том, что луч света с некоторой длиной волны  $\lambda$ , поднявшийся от источника на некоторую высоту, воспринимается приемником как свет с большей длиной волны, т. е. имеет место сдвиг частоты в красную сторону. Расчеты с использованием понятий системы отсчета (см. разд. 14.1) показывают, что этот сдвиг частот обусловлен потерей энергии светом на подъем, причем оказывается, что результат одинаков при вычислениях как в рамках ОТО, так и в ньютоновой теории гравитации. На этом основании правильнее называть *эффект гравитационного красного смещения не эффектом ОТО, а лишь проявлением принципа соответствия с ньютоновой теорией*.

Подчеркнем, что два рассмотренных эффекта количественно отличаются от следствий ньютоновой теории. Так, эффекта смещения перигелия Меркурия в принципе нет в ньютоновой теории, а эффект отклонения лучей света в ОТО в два раза больше, чем в ньютоновой теории.

## 2.2. Метрика Керра

Другим практически важным точным решением уравнений Эйнштейна является метрика Керра, описывающая искривленное пространство-время вокруг вращающегося материального источника.

Следует напомнить, что практически все астрофизические объекты (Солнце, звезды, Земля и другие планеты Солнечной системы) вращаются, т. е. метрика вокруг них отличается от метрики Шварцшильда. Очевидно, что в таком пространстве имеется выделенное направление, т. е. такая метрика является аксиально симметричной.

### 2.2.1. Анализ метрики Керра

1. Точное решение, описывающее метрику вокруг вращающегося источника, впервые было найдено Р. Керром в 1963 г. в следующем виде

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\varphi - \frac{rgr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dr + a \sin \theta d\varphi + dx^0)^2. \quad (2.2.1)$$

Это стационарная метрика, зависящая от двух констант:  $r_g$  и  $a$ .

Для практического использования оказалась более удобной иная координатная система, в которой метрика Керра была записана Р. Бой-

ером и Р. Линдквистом:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \\
 & - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2r_g r a}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta dx^0 d\varphi.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.2}$$

2. Рассмотрим, во что превращается метрика Керра при обращении в нуль одной из двух входящих в нее констант.

1) При  $a = 0$  и  $r_g \neq 0$  метрика Керра в координатах Бойера—Линдквиста переходит в метрику Шварцшильда (2.1.28) в координатах кривизн. Именно это обстоятельство обусловило использование ее именно в таком виде.

2) При  $a \neq 0$  и  $r_g = 0$  метрика Керра принимает вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - a^2 \sin^4 \theta d\varphi^2.
 \tag{2.2.3}$$

Произведя преобразование координат:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi; \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta,
 \tag{2.2.4}$$

легко убедиться, что метрика (2.2.3) в новых координатах является метрикой Минковского

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.
 \tag{2.2.5}$$

Таким образом, метрика (2.2.3) является метрикой плоского пространства-времени в эллиптических координатах, удовлетворяющих условию

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.
 \tag{2.2.6}$$

3. До получения Керром точного решения метрика вокруг вращающихся источников описывалась приближенной метрикой Лензе—Тирринга, найденной в 1918 г.:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \\
 & - \frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{4G\tilde{M}}{c^3 r} \sin^2 \theta dx^0 d\varphi,
 \end{aligned}
 \tag{2.2.7}$$

где  $\tilde{M}$  — момент количества движения центрального источника. Из сравнения (2.2.2) и (2.2.7) следует физический смысл параметра в метрике

Керра:  $a = \tilde{M}/cM$ . Отметим, что Керр в своей первой работе полагал

$$a = \frac{2}{5} \frac{\omega R^2}{c}, \quad (2.2.8)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения,  $R$  — радиус сферического тела.

Легко видеть, что метрика (2.2.2) инвариантна относительно одновременного отражения времени и изменения знака  $\omega$ , т. е.  $x^0 \rightarrow -x^0$ ;  $a \rightarrow -a$ , что также подтверждает справедливость отождествления  $a$  с физической величиной, пропорциональной моменту импульса.

4. Рассмотрим характерные для метрики Керра области пространства-времени вблизи источника.

- 1) Компонента метрики  $g_{11}$  обращается в бесконечность при  $r^2 + a^2 - r_g r = 0$ , откуда находим *радиус горизонта*

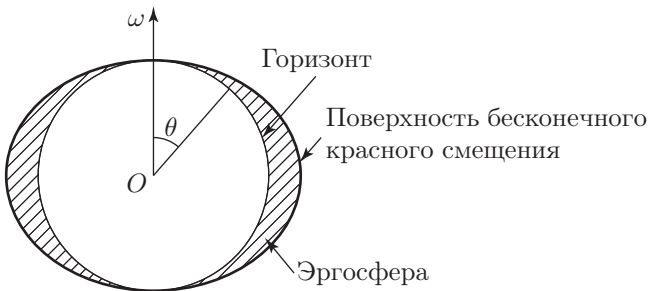
$$r_0 = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2}. \quad (2.2.9)$$

Ограничимся большим значением, т. е. случаем знака плюс.

- 2) Компонента метрики  $g_{\theta\theta}$  обращается в нуль при  $r^2 - r r_g - a^2 \cos^2 \theta = 0$ , откуда находим так называемый *радиус поверхности бесконечного красного смещения*

$$r_a = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.2.10)$$

Опять ограничимся большим корнем. Из (2.2.9) и (2.2.10) видно, что две поверхности соприкасаются в полюсах поверхности горизонта (см. рис. 2.4).



**Рис. 2.4.** Поверхности горизонта и бесконечного красного смещения, ограничивающие эргосферу

Область, ограниченная извне поверхностью бесконечного красного смещения и изнутри поверхностью горизонта, называется *эргосферой*.

5. Поясним, почему внутренняя поверхность эргосферы называется горизонтом. Для этого напомним сведения из дифференциальной геометрии. Если гиперповерхность задана уравнением  $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{const}$ , то компоненты нормали  $n_\mu$  к ней находятся из формулы

$$n_\mu = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}. \quad (2.2.11)$$

Для того чтобы некий сигнал проходил сквозь данную гиперповерхность, необходимо, чтобы нормаль была времени-подобной, т. е.  $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu > 0$ . В данном же случае метрики Керра уравнение гиперповерхности горизонта имеет вид  $f(x) = r = (r_g/2) + \sqrt{(r_g/2)^2 - a^2}$ , откуда следует, что на данной гиперповерхности

$$g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = 0, \quad (2.2.12)$$

т. е. гиперповерхность горизонта является изотропной. Более того, она является однонаправленной. Такими же свойствами обладает и горизонт в метрике Шварцшильда.

### 2.2.2. Уравнения геодезических линий в метрике Керра

Подставляя компоненты метрики Керра в уравнения геодезических линий (1.3.7), можно получить систему из четырех уравнений, аналогичную записанной для метрики Шварцшильда в разд. 2.1.3, только сложнее. Чтобы это сделать, сначала выпишем компоненты контравариантного метрического тензора в координатах Бойера—Линдквиста:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{(r^2+a^2)(r^2+a^2\cos^2\theta)+r_g r a^2 \sin^2\theta}{\Delta_1(r^2+a^2\cos^2\theta)} & 0 & 0 & \frac{r_g r a}{\Delta_1(r^2+a^2\cos^2\theta)} \\ 0 & -\frac{\Delta_1}{r^2+a^2\cos^2\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta} & 0 \\ \frac{r_g r a}{\Delta_1(r^2+a^2\cos^2\theta)} & 0 & 0 & -\frac{r^2+a^2\cos^2\theta-r_g r}{\Delta_1(r^2+a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

где использовано обозначение  $\Delta_1 = r^2 + a^2 - r_g r$ . Кроме того, учтено, что определитель метрического тензора имеет вид

$$g = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta. \quad (2.2.14)$$

В общем случае уравнения геодезических линий в метрике Керра имеют более сложный вид, нежели в метрике Шварцшильда. Ограничимся здесь более простыми случаями движения частиц в экваториальной плоскости, когда в начальный момент  $\theta = \pi/2$  и  $u^2 = d\theta/ds = 0$ .

1. Начнем с уравнения для угла  $\theta$ , которое для данного случая записывается в виде

$$\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)_0 = \frac{g^{22}}{2} \left[ \frac{\partial g_{oo}}{\partial\theta} \left(\frac{dx^o}{ds}\right)^2 + \frac{\partial g_{11}}{\partial\theta} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial\theta} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial g_{3o}}{\partial\theta} \frac{d\varphi}{ds} \frac{dx^o}{ds} \right]. \quad (2.2.15)$$

Легко убедиться, что все производные от метрического тензора, входящие в это уравнение, в экваториальной плоскости равны нулю. Отсюда следует вывод, что если тело и его скорость в начальный момент лежали в экваториальной плоскости, то и все его движение будет оставаться в этой плоскости (в плоскости Лапласа).

2. Уравнения геодезических линий для компонент  $x^o$  и  $x^3 = \varphi$  в экваториальной плоскости находятся в виде

$$\frac{d^2x^o}{ds^2} = -\frac{r_g(r^2 + a^2)}{r^2\Delta_1} \frac{dx^o}{ds} \frac{dr}{ds} + \frac{ar_g(3r^2 + a^2)}{r^2\Delta_1} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds}; \quad (2.2.16)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{ar_g}{r^2\Delta_1} \frac{dx^o}{ds} \frac{dr}{ds} - \frac{(2r^3 - r_g a^2 - 2r_g r^2)}{r^2\Delta_1} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.2.17)$$

Умножая оба уравнения на  $\Delta_1(ds/dr)$  и вводя новые обозначения:  $y = dx^o/ds$ ,  $z = d\varphi/ds$ , приходим к системе

$$\Delta_1 \frac{dy}{dr} = -\frac{r_g(r^2 + a^2)}{r^2} y + \frac{ar_g(3r^2 + a^2)}{r^2} z; \quad (2.2.18)$$

$$\Delta_1 \frac{dz}{dr} = -\frac{ar_g}{r^2} y - \frac{(2r^3 - r_g a^2 - 2r_g r^2)}{r^2} z. \quad (2.2.19)$$

Выражая из (2.2.19) величину

$$y = -\frac{r^2\Delta_1}{ar_g} z' - \frac{(2r^3 - r_g a^2 - 2r_g r^2)}{ar_g} z, \quad (2.2.20)$$

и подставляя ее в (2.2.18), приходим к уравнению для функции  $z$ :

$$r\Delta_1 z'' + 2(3r^2 - 2r_g r + a^2)z' + 2(3r - r_g)z = 0, \quad (2.2.21)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Легко убедиться, что это уравнение представимо в виде

$$z''\Phi + 2z'\Phi' + z\Phi'' = (z\Phi)'' = 0, \quad (2.2.22)$$

где  $\Phi$  функция от  $r$  вида

$$\Phi = r(r^2 + a^2 - r_g r) = r\Delta_1. \quad (2.2.23)$$



Отсюда находится решение

$$z = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{Cr - r_g\sigma_o}{r\Delta_1} \rightarrow (r^2 + a^2 - r_g r) \frac{d\varphi}{ds} = C - \frac{r_g}{r}\sigma_o, \quad (2.2.24)$$

соответствующее закону сохранения площадей (секторной скорости) в классической механике. Здесь  $\sigma_o$  и  $C$  — константы интегрирования.

Воспользовавшись соотношением (2.2.20), находим вторую неизвестную функцию

$$y = \frac{dx^o}{ds} = \frac{r^2}{\Delta_1} \frac{(C - \sigma_o)}{a} + \frac{a(C - \sigma_o)}{\Delta_1} - \frac{ar_g}{r\Delta_1}\sigma_o. \quad (2.2.25)$$

3. Чтобы можно было сравнить эти формулы с аналогичными выражениями в метрике Шварцшильда (при  $a$  стремящимся к нулю), переопределим константы интегрирования:

$$C - \sigma_o \equiv aE_o \rightarrow C = aE_o + \sigma_o. \quad (2.2.26)$$

Тогда решение представляется в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\Delta_1} \left( \frac{(r - r_g)}{r}\sigma_o + aE_o \right); \quad \frac{dx^o}{ds} = \frac{1}{\Delta_1} \left( E_o r^2 - \frac{ar_g}{r}\sigma_o + a^2 E_o \right). \quad (2.2.27)$$

Сравнивая эти формулы с (2.1.43) и (2.1.49), убеждаемся, что введенные здесь (для геодезических в метрике Керра) константы  $\sigma_o$  и  $E_o$  соответствуют так же обозначенным константам интегрирования в метрике Шварцшильда.

4. Уравнение для радиальной компоненты ( $\mu = 1$ ) в общем случае имеет довольно сложный вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} = & -\frac{\Delta_1 r_g}{2r^4} \left( \frac{dx^o}{ds} \right)^2 - \frac{(2a^2 - r_g r)}{2r\Delta_1} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1}{r} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \\ & - \frac{\Delta_1}{2r^2} \left( 2r - \frac{r_g a^2}{r^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1 r_g a}{r} \left( \frac{dx^o}{ds} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right), \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

однако его решать не обязательно. Его первый интеграл получается из выражения для квадрата интервала в метрике Керра (2.2.2). Деля его на  $ds^2$  и подставляя в него найденные выше формулы (2.2.27) (в экваториальной плоскости), приходим к выражению для квадрата радиальной скорости:

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = E_o^2 - \frac{\Delta_1 + 2\sigma_o E_o a}{r^2} - \frac{(r - r_g)}{r^3} \sigma_o^2. \quad (2.2.29)$$

Из этого выражения, переходя к переменной  $u = 1/r$  и заменяя дифференцирование по  $ds$  на дифференцирование по  $d\varphi$  согласно (2.1.52), легко прийти к обобщению на случай метрики Керра первой формулы Бине, а,

дифференцируя ее по  $d\varphi$ , можно получить обобщенную «силу» в метрике Керра при движении пробной частицы в экваториальной плоскости. Однако при этом следует не забывать, что таким образом введенная «сила» имеет координатный характер. Для корректной интерпретации подобных выражений необходимо использовать методы задания систем отсчета (см. разд. 3.6.3).

### 2.2.3. Некоторые эффекты в метрике Керра

В метрике Керра имеют место классические эффекты отклонения лучей света и смещения перигелия Меркурия, в значения которых вносятся поправки, зависящие от параметра вращения  $a$ . Эти поправки чрезвычайно малы и в данный момент вряд ли возможно их обнаружить экспериментально. Назовем несколько характерных эффектов, присущих метрике лишь вокруг вращающегося объекта.

**1. Эффект полного увлечения эргосферой.** В эргосфере никакая частица не может находиться в покое. Предположим противное, т. е. пусть  $r = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ , тогда квадрат интервала в эргосфере

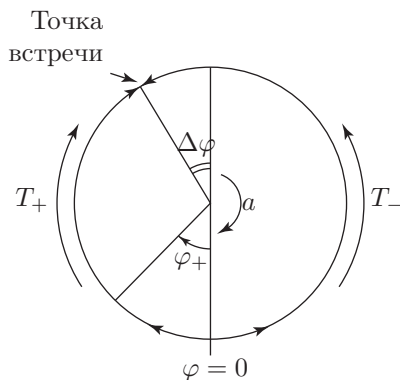
$$ds^2 = \frac{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - rr_g)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dx^0)^2 < 0, \quad (2.2.30)$$

вследствие (2.2.10), становится пространственно-подобным, т. е. координата  $x^0$  теряет времени-подобный характер. Для сохранения времени-подобности  $x^0$  необходимо наличие положительного слагаемого со смешанной компонентой метрического тензора  $g_{03}$ . Это означает, что в эргосфере частицы непременно должны вращаться, причем обязательно в направлении вращения источника.

**2. Эффект Хокинга** дает принципиальную возможность извлекать энергию из вращающейся черной дыры. Можно показать, что частицы могут пересекать внешнюю границу эргосферы, причем в обоих направлениях. Поскольку внутри эргосферы  $g_{00} < 0$ , то формально вычисляемая энергия частицы может оказаться отрицательной. На этом основан эффект извлечения энергии из черной дыры. Предположим, что существуют такие астрофизические объекты, что внешний радиус их эргосферы больше его геометрических размеров. Пусть некоторый объект (ракета) влетает в эргосферу, обладая некоторой положительной энергией. Влетев в эргосферу, пусть объект распадается на две части, одна из которых остается в эргосфере, обладая отрицательной энергией, а другая вылетает из эргосферы, теперь приобретая большую энергию, чем обладала ракета до вхождения в эргосферу.

Очевидно, при этом не происходит нарушения закона сохранения энергии. Энергия черпается из вращающейся черной дыры, которая в процессе извлечения из нее энергии данным способом будет замедлять свое вращение. При этом ее эргосфера будет уменьшаться до тех пор, пока внешний радиус эргосферы не сольется с радиусом горизонта, т. е. пока керровская черная дыра не превратится в шварцшильдовскую черную дыру.

**3. Эффект Мицкевича** [109] состоит в том, что два пробных тела, вращающихся вокруг керровского источника в экваториальной плоскости по круговым орбитам с одинаковыми значениями радиальной координаты, но в противоположных направлениях — в ту же сторону, что и керровский источник, и в противоположную, — движутся с разными скоростями, что должно проявляться в дрейфе точки встречи (см. рис. 2.5).



**Рис. 2.5.** Эффект Мицкевича. Дрейф точки встречи пробных частиц на круговых орбитах

Подсчитаем этот эффект, исходя из радиального уравнения геодезической (2.2.28), которое при  $r = \text{const}$  в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) принимает вид

$$\frac{\Delta_1 r_g}{2r^4} \left( \frac{dx^o}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1}{2r^2} \left( 2r - \frac{r_g a^2}{r^2} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{\Delta_1 r_g a}{r} \left( \frac{dx^o}{ds} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0. \quad (2.2.31)$$

Умножив это выражение на  $(2r^4/\Delta_1)(ds/d\varphi)^2$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $dx^o/d\varphi$ :

$$r_g \left( \frac{dx^o}{d\varphi} \right)^2 - 2r_g a \frac{dx^o}{d\varphi} + (r_g a^2 - 2r^3) = 0. \quad (2.2.32)$$

Его решение находится в виде

$$\frac{dx^o}{d\varphi} = \frac{r_g a \pm r \sqrt{2r_g r}}{r_g}, \quad (2.2.33)$$

где знак плюс соответствует движению тела в направлении вращения источника, а знак минус — в обратном направлении (с большей угловой скоростью).

Интегрируя это выражение по  $\varphi$  от нуля до  $2\pi$ , получаем (координатные) периоды обращения тел вокруг источника соответственно по и против направления вращения источника:

$$T_+ = \frac{2\pi}{c} \left( r \sqrt{\frac{2r}{r_g}} + a \right); \quad T_- = \frac{2\pi}{c} \left( r \sqrt{\frac{2r}{r_g}} - a \right). \quad (2.2.34)$$

Обозначая через  $\delta\varphi$  угол, характеризующий отклонение точки встречи от  $\pi/2$ , и через  $\omega_{\pm}$  — соответствующие частоты обращения тел, имеем для угла уравнение

$$\frac{\pi + \delta\varphi}{\omega_-} = \frac{\pi - \delta\varphi}{\omega_+}, \quad (2.2.35)$$

откуда находим

$$\delta\varphi = \pi \frac{\omega_- - \omega_+}{\omega_+ + \omega_-} = \pi \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{\pi a}{r} \sqrt{\frac{r_g}{2r}}. \quad (2.2.36)$$

Из выписанных выражений следует вывод, что тело, движущееся в направлении, противоположном угловой скорости вращения источника, чтобы удержаться на данной круговой орбите, должно иметь скорость, большую скорости того тела, угловая скорость движения которого совпадает с направлением угловой скорости источника. Таким образом, точка встречи смещается в сторону, противоположную направлению вращения центрального источника.

Подчеркнем, что данный эффект вычислен в координатном времени. При использовании строгих понятий систем отсчета (см. гл. 3) найденный угол будет зависеть от использованной системы отсчета. Очевидно, что в метрике Шварцшильда данный эффект отсутствует.

**4. Эффект Шиффа** [188] состоит в том, что ось гироскопа, выведенного спутником на круговую орбиту вокруг вращающегося источника (например, вокруг Земли), будет прецессировать с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , зависящей от радиуса  $R$  круговой орбиты гироскопа, его орбитальной скорости и параметров центрального источника (массы  $M$ , угловой скорости вращения и момента инерции). Этот эффект вычисляется на основе уравнений Матиссона—Палапетру. Отметим, что оценки

показывают возможность обнаружения этого эффекта современными экспериментальными средствами.

### 2.3. Однородные изотропные космологические модели

ОТО позволила физике выйти на качественно новый уровень в понимании физического мира — в ее рамках можно в принципе ставить и решать задачу описания Вселенной как целого. Конечно, нельзя забывать, что при этом производится экстраполяция наших представлений о мире максимально далеко за пределы изученной области Вселенной. Тем не менее обсуждение подобных задач необходимо, поскольку это может помочь ответить на вопрос, до каких пределов экстраполяция правомерна, когда и каким образом нужно будет изменить наши представления о природе мироздания.

#### 2.3.1. Космология. Постановка задачи

В математическом плане описание Вселенной как целого основано на решении уравнений Эйнштейна (1.4.18), в правую часть которых нужно подставить тензор энергии-импульса всей материи мира: планет, звезд, межзвездной среды и всего прочего. Ясно, что точно все это учесть невозможно, поэтому рассматривается некоторая упрощенная модель.

Во-первых, предполагается, что всю материю мира можно представить в виде сплошной среды наподобие пыли, когда в качестве отдельных пылинок выступают не отдельные звезды и даже не отдельные галактики, а скопления галактик.

Во-вторых, полагается, что во Вселенной распределение материи — пылинок однородно и изотропно, т. е. материя распределена равномерно вдоль каждого направления и одинаково по всем направлениям. Очевидно, что эти условия не выполняются в масштабах Солнечной системы, отдельной галактики или даже конкретного их скопления, однако по мере увеличения масштаба распределение материи все более становится близким к однородному и изотропному.

В-третьих, пренебрегают пекулярными движениями материальной среды, т. е. среда рассматривается как бы «вмороженной» в пространство<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup>Это соответствует использованию системы отсчета, в среднем сопутствующей материи Вселенной (см. раз. 3.6.1).

Решения уравнений Эйнштейна (без космологического члена) при выполнении названных условий впервые нашел в 1921 г. А. А. Фридман. В настоящее время *однородные изотропные космологические решения* Фридмана составляют основу космологии.

Однородное и изотропное распределение материи диктует существенное упрощение искомого вида компонент метрического тензора, которые должны обладать свойством сферической симметрии (с центром в любой точке пространства) и одинаковым образом зависеть от времени-подобной координаты. Метрика должна иметь вид

$$ds^2 = a^2(x^0) [(dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + b^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))], \quad (2.3.1)$$

где  $a(x^0)$  — функция от времени-подобной координаты  $x^0$ , характеризующей эволюцию мира, а  $b(x^1)$  — функция от одной пространственно-подобной координаты  $x^1$ , характеризующей 3-мерное пространство. Обратим внимание на то, что функция  $b^2(x^1)$  перед угловой частью теперь не должна удовлетворять второму условию из (2.1.6), налагавшемуся при выводе решения Шварцшильда, где оно выделяло единый центр симметрии.

Подставим эту метрику в уравнения Эйнштейна. Будем действовать по стандартной методике: выпишем компоненты метрики, символы Кристоффеля, тензор кривизны.

1. Метрика (2.3.1) диагональна, т. е. компоненты ковариантного метрического тензора образуют матрицу:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2(x^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(x^0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(x^0)b^2(x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(x^0)b^2(x^1)\sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Поскольку метрика диагональна, контравариантные компоненты метрического тензора находятся как обратные величины к ковариантным компонентам.

При данной специфике метрического тензора удобно 4-мерный интервал представить в привычном для специальной теории относительности  $1 + 3$ -расщепленном виде

$$ds^2 = a^2(dx^0)^2 - dl^2 \equiv a^2(dx^0)^2 - h_{ik}dx^i dx^k, \quad (2.3.3)$$

где  $h_{ik}$  следует понимать как компоненты 3-мерного метрического тензора вида:

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 b^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} b^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Здесь контравариантные 3-мерные компоненты вычислены по общему рецепту (1.2.4).

2. Символы Кристоффеля (4-мерные) находятся по формулам (1.3.8). Отличные от нуля компоненты имеют вид:

$$\Gamma_{oo}^o = \Gamma_{11}^o = \Gamma_{1o}^1 = \Gamma_{2o}^2 = \Gamma_{3o}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{22}^o = b^2 \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{33}^o = b^2 \frac{\dot{a}}{a} \sin^2 \theta; \quad (2.3.5)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{b'}{b}; \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta; \quad \Gamma_{22}^1 = -bb'; \quad (2.3.6)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -bb' \sin^2 \theta; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta,$$

где точка означает дифференцирование по  $x^o$ , а штрих — дифференцирование по  $x^1$ . Здесь специально отделены символы Кристоффеля с чисто пространственными компонентами от компонент, содержащих индекс  $o$ , поскольку из-за диагонального вида метрики они имеют одинаковый вид как в 3-мерной, так и в 4-мерной записи.

3. Компоненты тензора Риччи находятся в виде:

$${}^4R_{oo} = -\frac{3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2); \quad (2.3.7)$$

$${}^4R_{11} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2) + {}^3R_{11}; \quad (2.3.8)$$

$${}^4R_{22} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)b^2 + {}^3R_{22}; \quad (2.3.9)$$

$${}^4R_{33} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)b^2 \sin^2 \theta + {}^3R_{33}, \quad (2.3.10)$$

где выделены компоненты 3-мерного тензора Риччи, вычисляемые по общим формулам (1.4.10) через 3-мерный метрический тензор (2.3.4) и имеющие вид

$${}^3R_{11} = -2\frac{b''}{b}; \quad {}^3R_{22} = 1 - bb'' - (b')^2; \quad {}^3R_{33} = {}^3R_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.3.11)$$

4. Возьмем уравнения Эйнштейна в форме

$${}^4R_{\mu\nu} = \varkappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.3.12)$$

с общим видом тензора энергии-импульса материальной среды (1.4.21). Условие «вмороженности» материальной среды в пространство означает, что отличной от нуля будет только времени-подобная компонента скорости  $u_o$  среды.

Пока имеется в виду самый общий случай материальной среды с давлением и с учетом космологического члена. (В дальнейшем давление будет положено равным нулю.)

5. Подставляя в (2.3.12) компоненты тензора Риччи (2.3.7) — (2.3.10) с учетом формул (2.3.11), находим, что отличными от тождественного нуля будут лишь четыре диагональных уравнения Эйнштейна, которые можно представить в виде

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 + 3p) - \Lambda; \quad (2.3.13)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)h_{ik} + {}^3R_{ik} = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - p)h_{ik} + \Lambda h_{ik}. \quad (2.3.14)$$

Представление уравнений Эйнштейна с пространственно-подобными компонентами в виде (2.3.14) фактически означает доказательство важной теоремы: *однородные изотропные пространства (пространственные сечения) космологических моделей обладают свойством*

$${}^3R_{ik} = B h_{ik}, \quad (2.3.15)$$

где  $B(x^o)$  — функция, не зависящая от трех пространственных координат.

### 2.3.2. Пространства постоянной кривизны

Прежде чем решать уравнения Эйнштейна (2.3.13)–(2.3.14), проанализируем однородные изотропные пространства (пространственные сечения), удовлетворяющие свойству (2.3.15). Учитывая, что в пространствах трех измерений тензор Римана—Кристоффеля выражается через тензор Риччи и скалярную кривизну согласно формуле (1.4.12) (с заменой компонент  $g_{ik}$  на  $h_{ik}$ ), находим, что все компоненты тензора Римана—Кристоффеля алгебраически определяются функцией  $B(x^o)$  и компонентами метрического тензора  $h_{ik}$ :

$${}^3R_{.jkl}^i = \frac{B}{2}(h_l^i h_{jk} - h_k^i h_{jl}); \quad (2.3.16)$$

$${}^3R_{ik} = B h_{ik}; \quad {}^3R = -3B. \quad (2.3.17)$$

В зависимости от знака  $B$  будем различать пространства трех типов:



- а) постоянной положительной кривизны (в смысле пространственных координат), если  $B > 0$ ;
- б) постоянной отрицательной кривизны (в том же смысле), если  $B < 0$ ;
- в) нулевой кривизны, если  $B = 0$ .

Очевидно, что пространства разных типов могут различаться лишь видом функции  $b(x^1)$  в сферически-симметричной метрике (согласно (2.3.1))

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + b^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (2.3.18)$$

Выясним, каковы эти функции. Подставляя (2.3.18) в (2.3.17), получаем

$$-\frac{2b''}{b} = Ba^2; \quad 1 - (b')^2 - bb'' = a^2 b^2 B, \quad (2.3.19)$$

откуда следует уравнение для  $b(x^1)$ :

$$bb'' - (b')^2 + 1 = 0. \quad (2.3.20)$$

Возможны решения этого уравнения трех видов:

$$b_1 = \frac{1}{C_1} \sin(C_1 x^1 + C_2); \quad (2.3.21)$$

$$b_2 = \frac{1}{C_1} sh(C_1 x^1 + C_2); \quad (2.3.22)$$

$$b_3 = \pm x^1 + C_2, \quad (2.3.23)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. С помощью, например, первого уравнения из (2.3.19) находим, что первое решение соответствует пространствам положительной кривизны:

$$B = \frac{2}{a^2} > 0 \rightarrow b_1 = \frac{1}{C_1} \sin(C_1 x^1 + C_2); \quad (2.3.24)$$

второе решение соответствует пространствам отрицательной кривизны

$$B = -\frac{2}{a^2} < 0 \rightarrow b_2 = \frac{1}{C_1} sh(C_1 x^1 + C_2); \quad (2.3.25)$$

третье решение — пространствам нулевой кривизны:

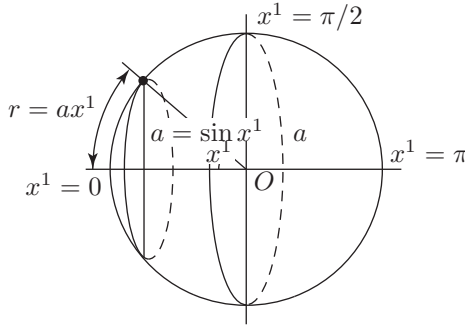
$$B = 0 \rightarrow b_3 = \pm x^1 + C_2. \quad (2.3.26)$$

Исследуем геометрические свойства этих пространств.

**1. Пространства постоянной положительной кривизны** описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (2.3.27)$$

где без ущерба для общности положено  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Параметр  $x^1$  может изменяться в пределах  $0 \leq x^1 \leq \pi$  (см. рис. 2.6).



**Рис. 2.6.** Пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана)

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат, характеризуемые параметрами  $x^1$  и  $\theta = \pi/2$ , соответственно равны  $l = 2\pi a \sin x^1$ ,  $S = 4\pi a^2 \sin^2 x^1$ . При увеличении  $x^1$  они сначала растут, достигают максимальных значений ( $l_{max} = 2\pi a$ ,  $S_{max} = 4\pi a^2$ ), затем уменьшаются до нуля. Радиус  $r(x^1)$  окружности или сферы, соответствующий параметру  $x^1$ , равен  $ax^1$ . Его максимальное значение  $r_{max} = \pi a$ . Отношение длины окружности к радиусу

$$\frac{l}{r} = 2\pi \frac{\sin x^1}{x^1} < 2\pi. \quad (2.3.28)$$

Таким образом, в данном случае мы имеем дело с геометрией на 3-мерной гиперсфере с радиусом  $a$  в 4-мерном евклидовом пространстве. Объем всего 3-мерного пространства

$$V = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^3 \sin^2 x^1 \sin \theta dx^1 d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3. \quad (2.3.29)$$

По этой причине такие пространства обычно называют *замкнутыми* или *конечными*.

**2. Пространства постоянной отрицательной кривизны** описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + sh^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (2.3.30)$$

где опять принято  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ . Параметр  $x^1$  теперь может изменяться в пределах  $0 \leq x^1 < \infty$ .

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат и с параметрами  $x^1$ ,  $\theta = \pi/2$  определяются значениями:  $l = 2\pi a sh x^1$ ,  $S = 4\pi a^2 sh^2 x^1$ . При увеличении  $x^1$  они изменяются от нуля до бесконечности. По-прежнему  $r = ax^1$  и может иметь сколь угодно большое

значение;

$$\frac{l}{r} = 2\pi \frac{shx^1}{x^1} > 2\pi. \tag{2.3.31}$$

Объем пространства бесконечен. По этой причине пространства постоянной отрицательной кривизны называют *открытыми*. Они описываются *геометрией Лобачевского*, которую можно рассматривать как геометрию на гиперboloиде в 4-мерном евклидовом пространстве, отчего ее также называют *гиперболической*.

**3. Пространства нулевой кривизны** описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + (x^1)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \tag{2.3.32}$$

т. е. являются плоскими или евклидовыми пространствами с хорошо известными свойствами. Напомним, что в евклидовом пространстве

$$\frac{l}{r} = 2\pi. \tag{2.3.33}$$

**2.3.3. Однородные изотропные модели Вселенной**

Вернемся к 4-мерному пространству-времени, описываемому уравнениями (2.3.13) и (2.3.14), где космологическая постоянная  $\Lambda$  может быть положительной, отрицательной и нулевой. Кроме того, возможны пространственные сечения трех типов. Итого, мы имеем девять возможных вариантов моделей однородной изотропной Вселенной. Сюда следует добавить различные виды уравнений состояния материи (соотношений между  $p$  и  $\rho$ ). Рассмотрим подробнее несколько таких вариантов.

**1. Закрытая модель Фридмана** соответствует условиям:

$$B = \frac{2}{a^2} > 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \tag{2.3.34}$$

В этом случае уравнения (2.3.13) и (2.3.14) принимают вид

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}; \tag{2.3.35}$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a}a + \dot{a}^2) + \frac{2}{a^2} = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}. \tag{2.3.36}$$

Вычитая одно уравнение из другого, находим

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + a^2 = 0. \tag{2.3.37}$$

Производя замену  $\dot{a}^2 = z(a)$ , получаем решение

$$z(a) = (C_1 - a)a; \quad a = \frac{C_1}{2}[1 - \sin(C_2 + x^o)], \quad (2.3.38)$$

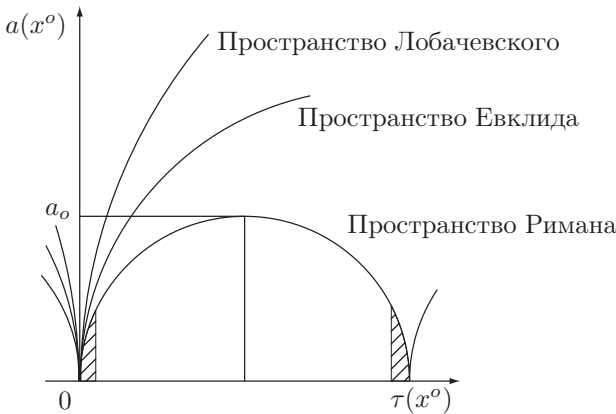
где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Выбирая  $C_2$  так, чтобы при  $x^o = 0$  было  $a = 0$ , т. е.  $C_2 = \pi/2$ , и обозначая  $C_{1/2} = a_o$ , имеем

$$a = a_o(1 - \cos x^o). \quad (2.3.39)$$

Интервал физического времени  $d\tau$  определяется через времени-подобную координату  $x^o$  выражением  $d\tau = adx^o$ . Отсюда находим изменение времени через  $x^o$ :

$$\tau = a_o(x^o - \sin x^o). \quad (2.3.40)$$

Уравнения (2.3.39) и (2.3.40) определяют в плоскости  $(a, \tau)$  циклоиду в параметрическом виде. Таким образом, полученное решение описывает модель с закрытыми пространственными сечениями, радиус кривизны которых «пульсирует» во времени (см. рис. 2.7).



**Рис. 2.7.** Эволюция трех однородных изотропных космологических моделей Фридмана

Плотность материи получаем, например, из (2.3.35):

$$\rho = \frac{6}{\kappa a_o^2 c^2 (1 - \cos x^o)^3}. \quad (2.3.41)$$

При  $x^o = 0, 2\pi \dots$  (моменты времени  $\tau = 0, 2\pi a_o \dots$ ) плотность материи становится бесконечной, т. е. имеют место особенности. Это

говорит о том, что правомерно рассматривать только один цикл циклоиды. Около особых точек, по-видимому, выводы ОТО теряют силу. Следует ожидать, что вблизи них при сверхплотных состояниях материи доминируют закономерности квантовой теории и физики элементарных частиц.

**2. Открытая модель Фрийдмана** соответствует условиям:

$$B = -\frac{2}{a^2} < 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \quad (2.3.42)$$

Учитывая их, уравнения (2.3.13) и (2.3.14) можно записать в виде

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}; \quad (2.3.43)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a}a + \dot{a}^2) - \frac{2}{a^2} = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}. \quad (2.3.44)$$

Из них получаем уравнение для  $a(x^o)$

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 - a^2 = 0. \quad (2.3.45)$$

Решение имеет вид

$$a = \frac{C_1}{2} \left( \frac{1}{2}[C_2 \exp x^o + \frac{1}{C_2} \exp(-x^o)] - 1 \right), \quad (2.3.46)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Выбирая  $C_2 = 1$  и обозначая  $C_1/2 = a_o$ , находим зависимость  $a(\tau)$  в параметрическом виде

$$a = a_o(chx^o - 1); \quad (2.3.47)$$

$$\tau = a_o(shx^o - x^o). \quad (2.3.48)$$

Выбирая область изменения  $x^o$ :  $-\infty < x^o < 0$ , приходим к сжимающейся открытой модели Фрийдмана. При  $0 < x^o < \infty$  получаем расширяющуюся открытую модель Фрийдмана. Из уравнения (2.3.43) находим закон изменения плотности материи:

$$\rho = \frac{6}{\varkappa a_o^2 c^2 (chx^o - 1)^3}. \quad (2.3.49)$$

При  $\tau \rightarrow 0$  ( $x^o \rightarrow 0$ ) плотность материи, как и в закрытой модели, стремится к бесконечности, что следует интерпретировать так, что закономерности классической ОТО теряют силу в окрестности сингулярности.

**3. Открытая плоская модель Фридмана** соответствует условиям:

$$B = 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \quad (2.3.50)$$

Учитывая их, уравнения (2.3.13) и (2.3.14) можно записать в виде

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}; \quad (2.3.51)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a}a + \dot{a}^2) = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}. \quad (2.3.52)$$

Из них получаем уравнение для  $a(x^0)$

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 = 0. \quad (2.3.53)$$

Решение имеет вид

$$a = (C_1 x^0 + C_2)^2, \quad (2.3.54)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Выбирая  $C_2 = 0$  и обозначая  $C_1^2 = a_0$ , находим

$$\left( a = a_0(x^0)^2; \quad \tau = \frac{a_0}{3}(x^0)^3 \right) \rightarrow \tau = \frac{1}{3\sqrt{a_0}}a^{3/2}. \quad (2.3.55)$$

**4. Статический цилиндрический мир Эйнштейна** явился первой космологической моделью Вселенной, построенной на основе ОТО. В тот момент Эйнштейн полагал, что однородное изотропное космологическое решение возможно лишь при добавлении в его уравнения космологического члена  $\Lambda g_{\mu\nu}$ . По этой причине величина  $\Lambda$  получила название *космологической постоянной*.

Космологической модели Эйнштейна соответствуют условия:

$$\dot{a} = 0 \text{ (статичность); } \quad \Lambda \neq 0; \quad p = 0. \quad (2.3.56)$$

Подставляя эти условия в (2.3.13) и (2.3.14), находим

$$0 = \frac{\varkappa\rho c^2}{2} - \Lambda; \quad (2.3.57)$$

$$B = \frac{\varkappa\rho c^2}{2} + \Lambda. \quad (2.3.58)$$

Отсюда получаем, что пространственное сечение (пространство) в этой модели имеет постоянную положительную кривизну (закрытая модель):

$$B = \frac{2}{a^2} = \varkappa\rho c^2 > 0; \quad \Lambda > 0; \quad a = \text{const}; \quad (2.3.59)$$

кроме того,

$$\rho = \frac{2}{\kappa c^2 a^2} = \frac{2\Lambda}{\kappa c^2}; \quad \Lambda = \frac{1}{a^2}. \quad (2.3.60)$$

Учитывая, что объем мира конечен, легко подсчитать массу всей материи в модели Эйнштейна:

$$M = \rho V = \frac{4\pi^2 a}{\kappa c^2}. \quad (2.3.61)$$

**5. Модель де Ситтера** представляет собой другой вариант статической Вселенной. Она описывает пустой мир (без материи), но с отличной от нуля космологической постоянной. Эту метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 + \Lambda r^2/3} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.3.62)$$

где выражение с космологической постоянной часто записывается иначе:

$$\Lambda \frac{r^2}{3} = -\frac{r^2}{R^2}. \quad (2.3.63)$$

Для сравнения метрики де Ситтера с ранее записанными в этом разделе удобнее ее переписать в иных видах.

1) Преобразованием координаты

$$r = R \sin x^1 \quad (2.3.64)$$

метрику (2.3.62) можно привести к виду

$$ds^2 = \cos^2 x^1 (dx^0)^2 - R^2 \left( (dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (2.3.65)$$

напоминающему метрику закрытой модели Вселенной (2.3.27).

2) Более рельефно проявляется смысл метрики де Ситтера при переходе к пяти новым координатам:

$$\begin{aligned} y_1 &= r \sin \theta \cos \varphi; & y_2 &= r \sin \theta \sin \varphi; & y_3 &= r \cos \theta; \\ y_4 + y_0 &= R e^{x^0/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}; & y_4 - y_0 &= R e^{-x^0/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}, \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

позволяющим переписать (2.3.62) в виде

$$ds^2 = dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2 - dy_4^2, \quad (2.3.67)$$

где на пять переменных наложено одно соотношение связи

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = -R^2. \quad (2.3.68)$$

Это соотношение определяет пространство-время как 4-мерную гиперповерхность в 5-мерном многообразии.

- 3) Преобразование координат, предложенное Леметром и Робертсоном,

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} e^{-x^o/R}; \quad x'^o = x^o + R \ln \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad (2.3.69)$$

приводит метрику (2.3.65) к виду

$$ds^2 = (dx'^o)^2 - e^{-2x^o/R} (dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \varphi^2)) \quad (2.3.70)$$

или после еще одного очевидного преобразования — к виду

$$ds^2 = (dx^o)^2 - e^{-2x^o/R} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.3.71)$$

Отметим, что этот вид метрики формально не является статическим, однако это не меняет ее существа, отраженного, например, видом (2.3.62).

**6. Прочие однородные изотропные модели Вселенной.** Не приводя подробных выкладок, изобразим на рис. f:2.8 эволюцию во времени всех девяти возможных вариантов однородных изотропных моделей, причем с учетом обсуждаемых далее данных наблюдений укажем лишь те модели, которые хотя бы на отдельных этапах описывают расширение Вселенной. На всех графиках по оси ординат отложены значения  $a$ , а по оси абсцисс значения  $\tau$ .

Сделаем несколько замечаний.

- 1) Статическое состояние однородной изотропной Вселенной невозможно (при  $\Lambda \leq 0$ ) или оказывается неустойчивым (при  $\Lambda > 0$ ) — в модели Эйнштейна.
- 2) Отрицательная космологическая постоянная соответствует, если можно так выразиться, усилению космического притяжения, что приводит к неизбежности замены расширения сжатием.
- 3) Положительная космологическая постоянная соответствует некоему космическому отталкиванию.
- 4) При  $\Lambda > 0$ ,  $B > 0$ , как видно из рис. 2.8, имеется несколько возможностей: неустойчивое статическое состояние, описываемое моделью Эйнштейна; ускоренное расширение от неустойчивого статического состояния; замена сжатия расширением; замедленное расширение; замена расширения сжатием (аналог закрытой модели Фридмана); извечное расширение от сингулярного состояния сначала с замедлением, а затем с ускорением.

### 2.3.4. Космологическое красное смещение

1. На приведенном ниже рисунке учтены лишь такие случаи эволюции Вселенной, которые хотя бы на некоторых этапах соответствуют



	Пространство Римана $V > 0$	Пространство Евклида $V = 0$	Пространство Лобачевского $V < 0$
$\Lambda > 0$			
$\Lambda = 0$			
$\Lambda < 0$			

Рис. 2.8. Однородные изотропные космологические модели

расширению, что соответствует открытому в конце 20-х годов XX в. Э. Хабблом космологическому красному смещению в спектрах далеких звезд. Этот факт интерпретируется как эффект Доплера, обусловленный разбеганием галактик от любого положения наблюдателя.

Рассмотрим этот эффект на основе космологических моделей Фридмана<sup>1)</sup>. Для этого выпишем квадрат интервала вдоль изотропной геодезической линии в метрике Фридмана (2.3.1). Выберем сферические координаты с началом в точке наблюдения так, чтобы звезда-источник излучения лежала в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ), причем пусть  $\varphi = 0$  и пусть ее радиальная координата  $x^1 = r$ . Так как материя «вморожена» в пространство, то в процессе эволюции Вселенной координаты звезды меняться не будут. В этом случае из квадрата интервала получаем

$$a^2(x^0) ((dx^0)^2 - (dx^1)^2) = 0. \quad (2.3.72)$$

<sup>1)</sup> Отметим, что более корректное рассмотрение данного эффекта производится на основе методов задания систем отсчета, рассмотренных в следующей гл. 3.

Отсюда находим

$$dx^o = \pm dx^1 \rightarrow x^o \mp x^1 = Const. \quad (2.3.73)$$

Выпишем также условие изотропности волнового вектора излучения  $k^\mu$ , который для случая распространения вдоль изотропной геодезической в выбранной координатной системе имеет отличные от нуля лишь две компоненты  $k^o$  и  $k^1$ :

$$k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow a^2 ((k^o)^2 - (k^1)^2) = 0; \rightarrow k^o = \pm k^1. \quad (2.3.74)$$

2. Уравнения изотропных геодезических в данной метрике при учете значений символов Кристоффеля (2.3.5)–(2.3.6) и соотношения компонент (2.3.74) сводятся к двум совпадающим уравнениям (компоненты «0» и «1»):

$$k^\sigma \nabla_\sigma k^\mu = 0 \rightarrow k^o \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^o} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) k^o + 2k^o \frac{\dot{a}}{a} \right] = 0. \quad (2.3.75)$$

Учтем, что физическое (наблюдаемое) значение энергии излучения определяется величиной (см. разд. 3.6.1)

$$\varepsilon = ak^o, \quad (2.3.76)$$

уравнение (2.3.75) можно привести к виду

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^o} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) (a\varepsilon) = 0. \quad (2.3.77)$$

Решение этого уравнения

$$a\varepsilon = f(x^o \mp x^1), \quad (2.3.78)$$

где  $f(x^o \mp x^1)$  — функция, определяющая форму светового сигнала.

3. Переходя от энергии  $\varepsilon = h\nu$  к частотам  $\nu$  и учитывая, что форма сигнала остается неизменной, приходим к соотношению частот в моменты испускания ( $x^o = x_{(1)}^o$ ) и в момент наблюдения ( $x^o = x_{(2)}^o$ ):

$$\nu_1 a(x_{(1)}^o) = \nu_2 a(x_{(2)}^o) \rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{a(x_{(1)}^o)}{a(x_{(2)}^o)}. \quad (2.3.79)$$

Поскольку изменение параметра  $\delta x^o$  за время распространения сигнала от звезды до наблюдателя полагается малым по сравнению с его абсолютным значением  $x^o$  (от начала эволюции), можно разложить  $a(x_{(1)}^o)$  в ряд по разности значений:

$$a(x_{(1)}^o) \sim a(x_{(2)}^o) - \dot{a} \delta x^o. \quad (2.3.80)$$

Подставляя это выражение в (2.3.79), находим

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a} \delta x^o. \quad (2.3.81)$$

Величине  $\delta x^o$  соответствует расстояние от излучателя до приемника  $l = ac\delta x^o$ . Отсюда получаем окончательную формулу

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a^2} \frac{l}{c} \equiv -H \frac{l}{c}. \tag{2.3.82}$$

При расширении Вселенной (при  $\dot{a} > 0$ ) изменение частоты отрицательное (красное смещение), а при сжатии — положительное (фиолетовое смещение).

Коэффициент пропорциональности  $H$  в (2.3.82) назван именем открывшего его Хаббла. По современным оценкам постоянная Хаббла имеет значение  $H = \dot{a}/a^2 = 71 \pm 4 \text{ км/с} \cdot \text{млн с} \simeq 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ .

4. Заметим, что при наблюдении космологического красного смещения производится сравнение частоты полученного сигнала с частотой излучения, создаваемого однотипной установкой. Условием однотипности является совпадение интервалов двух процессов в местах излучения и наблюдения. В частности, для интервалов событий излучения и наблюдения (в одной и той же точке излучения но с разными значениями времени-подобных координат) имеем

$$ds_1 = a(x_{(1)}^o)(\Delta x^o)_1 = a(x_{(2)}^o)(\Delta x^o)_2 = ds_2, \tag{2.3.83}$$

т. е. частота принятого излучения  $\nu_2$  в точке наблюдения должна сравниваться именно с частотой  $\nu_1$  однотипного излучения в этой точке.

Из формулы (2.3.83) также видно, что величина характерного *координатного времени* однотипного излучения  $(\Delta x^o)_2$  в точке наблюдения окажется меньше координатного времени  $(\Delta x^o)_1$  в момент испускания. Такие же соотношения должны быть и для размеров излучателя и приемника излучения. Поскольку при рассмотрении космологических моделей было принято условие «вмороженности» материи галактик (точнее, даже скоплений галактик) в пространство, то оказывается, что процесс расширения Вселенной (разбегания галактик) сопровождается уменьшением координатных размеров атомов (излучателей и приемников).

### 2.3.5. Критическая плотность и возраст Вселенной

1. Возникает естественный вопрос, какой из этих трех моделей Фридмана описывается наш мир? Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к уравнениям Эйнштейна для однородных изотропных моделей (2.3.13), (2.3.14) при  $\Lambda = 0$  и  $p = 0$ . Умножим (2.3.14) на  $h^{ik}$  и сложим с (2.3.13).

В результате получим

$$B = 2 \left( \frac{\kappa \rho c^2}{3} - H^2 \right). \quad (2.3.84)$$

Отсюда находим, что пространство замкнуто ( $B > 0$ ), если

$$\rho > \frac{3H^2}{\kappa c^2} \equiv \rho_{cr} \sim 2 \cdot 10^{-29}, \quad (2.3.85)$$

и пространство открыто ( $B > 0$ ), если

$$\rho < \frac{3H^2}{\kappa c^2} \sim 2 \cdot 10^{-29} \quad (2.3.86)$$

(в граммах на кубический сантиметр).

В настоящий момент плотность наблюдаемой части Вселенной оценивается значением  $\rho \sim 5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ . Экстраполируя эти данные на всю Вселенную, приходим к выводу о соответствии данным наблюдений открытой модели Фридмана, где пространство описывается геометрией Лобачевского. Однако, скорее всего, при оценке  $\rho$  учитывается не вся материя. Неоднократно высказывались гипотезы о существовании новых видов материи (черных дыр, нейтрино с не равной нулю массой покоя и др.). По мере открытия новых объектов оценка средней плотности будет приближаться к критической. Окончательный вывод делать рано, но ряд астрофизических данных свидетельствует в пользу средней плотности, равной критической, т. е. к тому, что наш мир в целом (в сопутствующей системе отсчета) в среднем плоский.

2. Зная характер эволюции мира, можно сделать некоторые выводы о возрасте Вселенной. Если бы она всегда расширялась в наблюдаемом темпе, то для расширения до современного состояния в сопутствующей системе отсчета понадобилось бы  $T_1 \sim 1/H \sim 10^{10}$  лет. На самом деле, как видно из графиков на рисунке 2.7, в ранние этапы расширение должно было быть более быстрым, поэтому следует брать значение  $T_2 \sim (2/3)T_1$ . Это небольшой возраст, сравнимый с оценками возраста земной коры, даваемого геологами. Выход из этого противоречия ищется на основе более сложных космологических моделей и учета неких дополнительных обстоятельств.

3. В задачу данной книги не входит обсуждение последних астрофизических данных о факторах эволюции Вселенной. Заметим лишь, что они свидетельствуют о ряде трудностей классической геометрофизической картины устройства мира в целом. Для их преодоления

оказались задействованы практически все возможные параметры используемой теории, в том числе и значение космологической постоянной. Концы с концами удастся связать, лишь привлекая гипотезы о наличии в космосе материи с неизвестными загадочными свойствами, называемой «темной материей» и «темной энергией» (см., например, [182]). Такие гипотезы фактически перекладывают трудности из геометрии в физику микромира. Не исключено, что подобные обстоятельства свидетельствуют о пределах применимости постулатов ОТО или постулатов, принятых при построении космологических моделей.

Более того, согласно универсальному правилу трактовки возникающих в физике бесконечностей, появление сингулярностей в космологических решениях в окрестностях «начала» или «конца» следует воспринимать как свидетельства того, что в этих областях эйнштейновская ОТО теряет силу.

# Монадный метод описания систем отсчета



Анализ основ ОТО показал, что к двум названным Фокком идеям, или к трем положениям Эйнштейна, следует добавить еще один блок идей, выявляющий роль систем отсчета в теории гравитации. Только после этого исчезнут неоднократно возникавшие недоразумения и ОТО будет отвечать своему названию — корректно описывать явления относительно произвольных систем отсчета. Отметим, что Эйнштейн и другие авторы нередко смешивали принципиально разные понятия координатных систем и систем отсчета. Например, Эйнштейн писал: *«Общие законы природы должны быть выражены через уравнения, справедливые во всех координатных системах, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общековариантными)»* (курсив А. Э.). Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворит и общему постулату относительности. Ибо в совокупности *всех* подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем» [191, с. 459].

При изложении основ ОТО подчеркивалось, что назначение координат ограничено нумерацией точек-событий, а выбор координатной системы обусловлен соображениями удобства и, если это специально не оговорено, не имеет физического смысла. Однако все введенные в теорию объекты: векторы и тензоры произвольного ранга, через которые описываются физические величины, имеют компоненты, зависящие от выбора системы координат (способа нумерации точек), что порождает ряд вопросов. Каким образом можно сопоставить компоненты тензоров с величинами, которые измеряются наблюдателем (экспериментатором)? Какие величины поддаются измерению? Как зависят результаты измерений от состояния движения наблюдателя?

Следовательно, *понятие системы отсчета не сводится к простой разновидности координатных систем, а представляет собой дополнительную структуру, вводимую в математический аппарат ОТО.*

---

Между понятием системы отсчета и той или иной совокупностью систем координат можно установить определенное соответствие, а priori не существующее. Этой же точки зрения придерживался В. А. Фок: «Понятие физической системы отсчета (лаборатории) не равносильно, в общем случае, понятию системы координат, даже если отвлекаться от всех свойств лаборатории, кроме ее движения, как целого» [13]. То же утверждает Н. В. Мицкевич: «Часто путают понятие системы отсчета и понятие системы координат. Однако между этими понятиями нет ничего общего...» [112].

Методы описания систем отсчета в ОТО были разработаны в 50–70-х гг. XX в. в трудах главным образом отечественных авторов: А. Л. Зельманова, О. С. Иваницкой, Н. В. Мицкевича, В. И. Родичева и других, в том числе и автора данной книги [29]. Главные результаты этих исследований на основе моноадного метода представлены в данной главе.

### 3.1. Понятие системы отсчета

Метафизический анализ (см. [41]) показывает, что любая физическая теория имеет дело с элементами (материальными образованиями или событиями) трех тесно связанных между собой видов: рассматриваемых объектов (событий), окружающего эти объекты мира и тела (системы) отсчета. В первых двух главах были соответственно рассмотрены первый и второй (на примере точных решений) виды понятий. Данная глава посвящена изложению третьей составляющей всякой теории на основе моноадного метода, обобщающего на случай искривленного пространства-времени традиционно понимаемые системы отсчета в классической теории (ньютоновой или в специальной теории относительности).

Уже из специальной теории относительности хорошо известно, что промежутки времени, расстояния между точками-событиями и компоненты тензорных величин в сравниваемых системах отсчета существенно зависят от относительной скорости этих систем отсчета. Назначением методов задания системы отсчета является описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя.

Прежде всего, уточним, что собой представляет наблюдатель (тело отсчета) и какой минимально возможной измерительной аппаратурой он располагает. Анализ показывает, что таким минимумом можно считать наличие у него (собственных) часов и возможность измерять временные составляющие тензорных величин, отделяя их от иных, пространственно-подобных компонент. Подчеркнем, что наблюдатель обладает этими

возможностями именно в месте своего расположения, т. е. на своей времени-подобной мировой линии. Что касается других точек многообразия, то здесь используется традиционно применяемый прием — полагается, что имеется континуум наблюдателей, каждый из которых принимает и обрабатывает информацию на своей мировой линии.

Поскольку каждому наблюдателю соответствует своя времени-подобная мировая линия и их пересечение означало бы, что в одной точке окажется два или больше наблюдателей, ограничиваются случаями, когда мировые линии, соответствующие разным наблюдателям, не пересекаются. В математике такую совокупность линий, когда через каждую точку проходит одна и только одна линия, принято называть *конгруэнцией линий*. В данном случае будем использовать конгруэнцию времени-подобных мировых линий.

Задание конгруэнции мировых линий влечет за собой возможность определения в каждой точке вектора  $\tau^\mu$ , касательного к соответствующей линии. Так как теория опирается на определение лишь одного вектора в каждой точке, данный метод получил название *монадного*<sup>1)</sup>. Вдоль вектора монады определяется время системы отсчета, а ортогонально монаде — 3-мерное пространственное сечение. Таким образом, если в основу математического аппарата ОТО положен принцип 4-мерной симметрии пространственных и временной координат, то методы задания систем отсчета опираются на обратную процедуру — на 1 + 3-расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на время и ортогональное ему пространственное сечение (локально или глобально).

Сделаем несколько замечаний.

1. Монадный метод нацелен на *разделение временных и пространственных компонент* тензорных величин, однако с его помощью нельзя ввести наблюдаемые величины по отдельным пространственно-подобным направлениям. Для решения таких задач необходимо наделять наблюдателя большими возможностями, что описывается посредством более полных — диадных и тетрадных методов, рассмотренных в гл. 6.

---

<sup>1)</sup>Монадный метод возник в 30-х годах в рамках 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма как метод выделения из 5-мерного многообразия 4-мерного пространства-времени. В рамках 4-мерия для расщепления многообразия на время и 3-мерное пространство этот метод (в объеме алгебры) впервые был применен К. Эккартом в 1940 г. Затем элементы монадного метода развивались и использовались в работах Б. Лифа, А. Ульмана, Ф. Пирани, Г. Денена и других авторов. В полном виде монадный метод в специальной (хронометрической) калибровке впервые был построен А. Л. Зельмановым [66] и затем независимо в трудах Э. Шмутцера и К. Катанео.



2. Использование аппарата, основанного на *континууме наблюдателей*, представляет собой идеализацию, применяемую при описании систем отсчета как в ньютоновой механике, так и в специальной теории относительности. Кроме того, следует иметь в виду, что переход от дискретного (конечного) множества реально осуществимых приборов наблюдателя к континууму идеализированных приборов-наблюдателей представляет собой процедуру такого же рода, как переход от дискретного множества материальных частиц или событий к континууму точек пространства-времени, когда только в части из них реализуются события.

3. Особо подчеркнем, что *приборы-наблюдатели предполагаются пробными*, т. е. не влияющими на геометрию пространства-времени.

4. Математический аппарат монадного метода задания систем отсчета целесообразно представить в виде следующих *четырёх частей*:

- 1) алгебры монадного метода;
- 2) определения монадных физико-геометрических тензоров, под которыми будем понимать тензорные величины, построенные из составляющих метрического тензора и их первых производных (в некотором смысле они выполняют роль символов Кристоффеля, однако являются настоящими тензорами);
- 3) определения монадных операторов дифференцирования (монадный анализ);
- 4) записи основных соотношений, уравнений и тождеств ОТО через монадные величины и операторы.

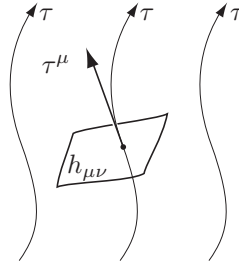
## 3.2. Алгебра монадного метода

Монадный метод можно построить в общековариантном виде, однако для практических целей оказывается более удобным использовать монадный метод в специальных видах координатных систем. Ниже будут подробно рассмотрены два специальных их вида (две калибровки), которые называются методами хронометрических и кинеметрических инвариантов. Общековариантный монадный метод будет излагаться параллельно с методами хронометрических и кинеметрических инвариантов.

### 3.2.1. Алгебра общековариантного монадного метода

1. В одном и том же многообразии можно определить бесконечно много времени-подобных конгруэнций, каждой из которых соответствует своя система отсчета.

Пусть выбрана некая времени-подобная конгруэнция, тогда в каждой точке пространства-времени можно определить *единичный вектор*  $\tau^\mu$  вдоль касательной к соответствующей мировой линии (см. рис. 3.1).



**Рис. 3.1.** Локальное 1 + 3-расщепление пространства-времени

Вектор  $\tau^\mu$  имеет вполне определенный физический смысл, — его следует понимать как 4-скорость  $u^\mu$  соответствующего наблюдателя (прибора):

$$\tau^\mu \equiv u^\mu = \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)_c, \quad (3.2.1)$$

где  $dx^\mu$  и  $ds$  взяты вдоль выбранной мировой линии системы отсчета, что отображено значком «с» снизу. По определению, вектор  $\tau^\mu$  обладает свойством 4-скорости (нормировки)

$$\tau^\mu \tau_\mu = g_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = 1. \quad (3.2.2)$$

2. Продемонстрируем, как в рамках монадного метода математически осуществляется переход от произвольных тензорных величин к наблюдаемым *времени-подобным величинам* в избранной системе отсчета. Определим временную составляющую произвольного тензора  $B_{\mu \dots}^{\nu \dots}$  как проекцию этого тензора по всем индексам на векторное поле  $\tau^\mu$ :

$$B = B_{\mu \dots}^{\nu \dots} \tau_\nu \dots \tau^\mu \dots \quad (3.2.3)$$

3. Для определения *пространственно-подобных* (и смешанных) компонент представим метрический тензор в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (3.2.4)$$

где  $h_{\mu\nu}$  — очевидно, тензорная величина. Тогда справедливо также соотношение  $g^{\mu\nu} = \tau^\mu \tau^\nu - h^{\mu\nu}$ , где  $h^{\mu\nu} = h_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$ . Отсюда и из (3.2.2) следует ортогональность  $\tau_\nu$  и  $h^{\mu\nu}$ :

$$\tau_\mu h^{\mu\nu} = \tau_\mu (\tau^\mu \tau^\nu - g^{\mu\nu}) = 0. \quad (3.2.5)$$

Легко видеть, что справедливы также соотношения:  $\tau^\mu h_{\mu\nu} = \tau^\mu h_\mu^\nu = \tau_\mu h_\nu^\mu = 0$ , где  $h_\mu^\nu = h_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$ .

Назовем *пространственно-спроецированным тензором* следующую величину, сопоставленную с произвольным тензором  $B_{\mu\cdots}^{\nu\cdots}$ :

$$\tilde{B}_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots} = H_{\nu\cdots\beta\cdots}^{\alpha\cdots\mu\cdots} B_{\mu\cdots}^{\nu\cdots}, \quad (3.2.6)$$

где введен оператор пространственного проецирования

$$H_{\nu\cdots\beta\cdots}^{\alpha\cdots\mu\cdots} = (-1)^{n+m} \underbrace{h_{\nu}^{\alpha} \dots}_{m} \underbrace{h_{\beta}^{\mu} \dots}_{n}. \quad (3.2.7)$$

Термин *пространственно-спроецированный* определен относительно системы отсчета и обоснован тем, что свертка по любому индексу тензора  $\tilde{B}_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots}$  с вектором  $\tau_{\mu}$  (временным направлением системы отсчета), по определению, равна нулю:  $\tilde{B}_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots}\tau_{\alpha} = \tilde{B}_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots}\tau^{\beta} = 0$ . Из произвольного тензора  $B_{\mu\sigma\cdots}^{\nu\lambda\cdots}$  ранга  $m+n$  можно образовать пространственно-спроецированные тензоры меньшего ранга («смешанные компоненты»), например:

$$\tilde{B}_{\beta\gamma\cdots}^{\alpha\cdots} = (-1)^{n+m-1} B_{\mu\sigma\cdots}^{\nu\lambda\cdots} \tau_{\nu} \underbrace{h_{\lambda}^{\alpha} \dots}_{m-1} \underbrace{h_{\beta}^{\mu} h_{\gamma}^{\sigma} \dots}_{n}. \quad (3.2.8)$$

В монодном методе оперируют исключительно со скалярами и пространственно-спроецированными тензорами типа (3.2.3), (3.2.6) и (3.2.8).

4. Образует из произвольного смещения  $dx^{\mu}$  временную и пространственные составляющие:  $d\tau = \tau_{\mu} dx^{\mu}$ ;  $d\tilde{x}^{\nu} = -h_{\mu}^{\nu} dx^{\mu}$ ; тогда квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = (\tau_{\mu}\tau_{\nu} - h_{\mu\nu})dx^{\mu}dx^{\nu} = d\tau^2 - h_{\mu\nu}d\tilde{x}^{\mu}d\tilde{x}^{\nu} \equiv d\tau^2 - dl^2. \quad (3.2.9)$$

Тензор  $h_{\mu\nu}$  следует понимать как метрический тензор локального пространственно-подобного 3-мерного сечения, ортогонального  $\tau^{\mu}$  (рис. 3.1).

Несмотря на то, что 4-мерный тензор  $h_{\mu\nu}$  в общем случае имеет 10 компонент, вследствие условия (3.2.5) независимыми являются только шесть. Кроме того, поскольку  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ , имеем

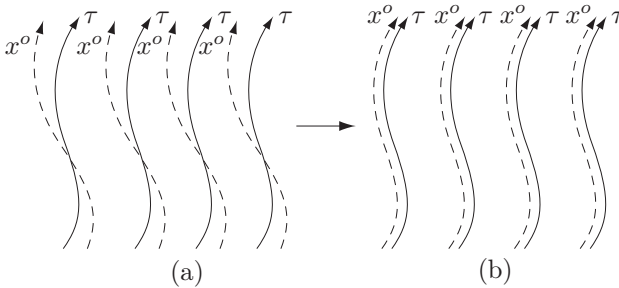
$$h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = (\tau^{\mu}\tau^{\nu} - g^{\mu\nu})(\tau_{\mu}\tau_{\nu} - g_{\mu\nu}) = 3, \quad (3.2.10)$$

как и положено метрическому тензору в 3-мерном пространстве.

5. Заметим, что поднимать и опускать индексы у пространственно-спроецированных тензоров можно как 4-мерным метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ , так и 3-мерным тензором  $h_{\mu\nu}$  со знаком минус. Именно этим объясняется наличие коэффициента  $(-1)^{n+m}$  в операторе пространственного проецирования (3.2.7).

### 3.2.2. Метод хронометрических инвариантов

1. При практическом применении монадного метода возникает ряд вопросов, главным из которых является задание конгруэнции мировых линий системы отсчета. Их можно определять при помощи специальных уравнений, однако можно поступать проще, используя уже готовые конгруэнции времени-подобных линий  $x^o$  координатной системы. Всегда можно специальным образом так подобрать координатную систему, чтобы конгруэнция линий  $x^o$ , задаваемая условиями  $x^i = \text{const}^i$ , совпадала с конгруэнцией мировых линий используемой системы отсчета (см. рис. 3.2). Назовем координатные системы, таким образом



**Рис. 3.2.** (а) В общем случае имеются две конгруэнции времени-подобных линий:  $\tau$  и  $x^o$  ( $x^i = \text{const}^i$ ). (б) В хронометрических системах координат конгруэнции  $\tau$  и  $x^o$  совпадают

приспособленные к системе отсчета, *хронометрическими*. В них вектор  $\tau^\mu$  имеет только одну отличную от нуля компоненту — с индексом «о», т. е.  $\tau^\mu = \{\tau^o, 0, 0, 0\}$ . Учитывая условие нормировки (3.2.2), находим контравариантные компоненты монады («калибруем» монаду хронометрическим образом):

$$g_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu = g_{oo}\tau^o\tau^o = 1 \rightarrow \tau^\mu = \frac{g_o^\mu}{\sqrt{g_{oo}}}. \quad (3.2.11)$$

2. Из алгебраических соотношений (3.2.4) легко выразить компоненты  $\tau_\mu$  и  $h_{\mu\nu}$  через компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \tau^\nu g_{\mu\nu} = \frac{g_{o\mu}}{\sqrt{g_{oo}}}; \quad h_o^\mu = 0; \quad h_i^o = \frac{g_{oi}}{g_{oo}}; \quad h_k^i = -g_k^i; \\ h^{ik} &= -g^{ik}; \quad h^{oi} = -g^{oi}; \quad h^{oo} = \frac{1}{g_{oo}}(1 - g_{oo}g^{oo}). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Обратим особое внимание на ковариантные компоненты тензора  $h_{\mu\nu}$ :

$$h_{ik} = \frac{g_{oi}g_{ok}}{g_{oo}} - g_{ik}; \quad h_{o\mu} = 0; \quad (3.2.13)$$

у которых отличны от нуля лишь компоненты с пространственными индексами  $i, k = 1, 2, 3$ , как и следовало ожидать от 3-мерного метрического тензора.

3. Условие совпадения конгруэнций  $\tau$  и  $x^o$  выделяет не одну, а целый класс хронометрических систем координат, связанных друг с другом специальными *хронометрическими преобразованиями координат*. Эти преобразования находятся из условия  $\tau^i = 0$  во всех хронометрических системах координат:

$$\tau^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \tau^\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial x^o} \tau^o = 0 \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^o} = 0, \quad (3.2.14)$$

и имеют вид:

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad (3.2.15)$$

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \quad (3.2.16)$$

4. Хронометрические преобразования дополняются до произвольных допустимых (1.1.1) следующими преобразованиями:

$$x'^i = x'^i(x^o, x^1, x^2, x^3), \quad (3.2.17)$$

которые приводят к расщеплению единой конгруэнции на две: исходную конгруэнцию  $\tau$ , совпадавшую с конгруэнцией  $x^o$ , остающуюся неизменной, и новую времени-подобную конгруэнцию  $x'^o$ . Если новую координатную конгруэнцию  $x'^o$  объявить совпадающей с конгруэнцией другой системы отсчета  $\tau'$ , то тогда можно сказать, что преобразованиями координат (3.2.17) описывается переход от одной системы отсчета к другой. Однако при этом не следует забывать, что *сами по себе преобразования координат автоматически не означают перехода к новой системе отсчета, — о переходе можно говорить лишь после отождествления второй координатной конгруэнции с конгруэнцией новой системы отсчета*. Но последнего можно и не делать.

Таким образом, наряду с хронометрическими системами координат, привязанными к какой-то исходной конгруэнции системы отсчета, можно говорить и о *хронометрической системе отсчета*, определяемой конгруэнцией линий времени ( $x^i = \text{const}^i$ ) заданной системы координат. Преобразования (3.2.17) описывают переходы между хронометрическими системами отсчета, а (3.2.15) и (3.2.16) оставляют в рамках одной и той же хронометрической системы отсчета.

5. В хронометрических системах координат проецирование произвольного тензора  $B_{\nu \dots}^{\mu \dots}$  ранга  $m + n$  на направление  $\tau$ , вследствие калибровки (3.2.11), состоит в следующем:

$$B = B \underbrace{\left. \begin{matrix} \mu \dots \\ \nu \dots \end{matrix} \right\}^m}_n \tau_\mu \dots \tau^\nu \dots = \frac{B_{oo \dots o}}{(g_{oo})^{(n+m)/2}}. \quad (3.2.18)$$

Все контравариантные «пространственные» компоненты  $B^{i\dots k}$  произвольного тензора являются пространственно-спроецированными:

$$B^{i\dots k} = B^{\overbrace{\mu\dots\nu}^n} (-1)^n \underbrace{h_\mu^i \dots h_\nu^k}_n = B^{i\dots k}, \quad (3.2.19)$$

так как, согласно (3.2.12),  $h_o^i = 0$ ,  $h_k^i = -g_k^i$ . Все ковариантные компоненты пространственно-спроецированных тензоров имеют только 3-мерные компоненты и образуются опусканием индексов у компонент (3.2.19) посредством 3-мерного метрического тензора  $h_{ik}$ :

$$\tilde{B}_{\underbrace{i\dots k}_n} = (-1)^n B^{\overbrace{j\dots s}^n} \underbrace{h_{ji} \dots h_{sk}}_n, \quad (3.2.20)$$

так как, согласно (3.2.12),  $h_o^\alpha = 0$ ,  $h_{oo} = h_{oi} = 0$ ,  $\tilde{B}_{0\mu\dots\nu} = (-1)^n B_{\alpha\beta\dots\gamma} h_o^\alpha h_\mu^\beta \dots h_\nu^\gamma = 0$ .

Аналогично из произвольного тензора  $B_{\alpha\dots\beta}^{\mu\dots\nu}$  ранга  $n$  можно образовать компоненты пространственно-спроецированных тензоров меньшего ранга  $m$ , например:

$$\tilde{B}^{\overbrace{i\dots k}_m} = (-1)^m B_{\mu\dots\lambda}^{\nu\dots\sigma} \underbrace{\tau^\mu \dots}_{n-m} \underbrace{h_\nu^i \dots h_\lambda^k}_m = \frac{B_{o\dots o}^{i\dots k}}{(g_{oo})^{(n-m)/2}}. \quad (3.2.21)$$

Из рассмотренного следует, что в хронометрических системах координат пространственно-спроецированные тензоры соответствующего ранга определяются величинами только с 3-мерными компонентами ( $i, k \dots = 1, 2, 3$ ) этого же ранга, согласно формулам (3.2.19)–(3.2.20), а времени-спроецированные компоненты — ковариантными компонентами с индексом 0 согласно (3.2.18). Выпавшие из рассмотрения контравариантные пространственно-спроецированные компоненты с индексом 0 линейно выражаются через рассмотренные величины и не представляют самостоятельного интереса, например:

$$\tilde{B}^o = -B^\mu h_\mu^o = -B^i h_i^o = -\frac{g_{oi}}{g_{oo}} B^i. \quad (3.2.22)$$

6. Указанные выше спроецированные величины в хронометрических системах координат обладают замечательными свойствами: они инвариантны при произвольных преобразованиях координаты  $x^o$  (3.2.15) и ковариантны относительно чисто пространственных преобразований координат (3.2.16). Первое называют свойством хронометрической инвариантности, а сами величины (3.2.18) — (3.2.21) — *хронометрически инвариантными* (*х. и.*) *3-тензорами* или, иначе, *хронометрическими инвариантами* [66].

Это свойство указанных величин продемонстрируем на примере произвольного вектора  $B^\mu$ . Рассмотрим изменения различных его компонент при преобразованиях (3.2.15) и (3.2.16):

$$\begin{aligned} B'_o &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^o} B_\mu = \frac{\partial x^o}{\partial x'^o} B_o; \\ B'_k &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} B_\mu = \frac{\partial x^o}{\partial x'^k} B_o + \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i; \\ B'^o &= \frac{\partial x'^o}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^o}{\partial x^o} B^o + \frac{\partial x'^o}{\partial x^i} B^i \\ B'^k &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} B^i. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $g'_{oo} = g_{oo}(\partial x^o/\partial x'^o)^2$ , убеждаемся в инвариантности  $B_o/\sqrt{g_{oo}}$ . Очевидно, что  $B^k$  ковариантно относительно 3-мерных преобразований. Компоненты из 2-й и 3-й строк не обладают свойством хронометрической инвариантности.

В хронометрической инвариантности  $h_{ik}$  убедиться нетрудно. Легко показать также, что произведение хронометрически инвариантных величин также хронометрически инвариантно.

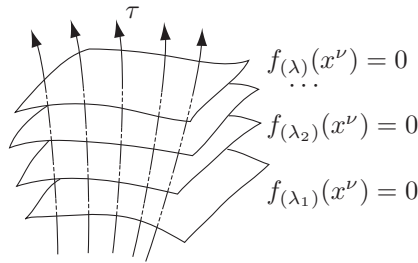
### 3.2.3. Метод кинематических инвариантов

1. Имеется иной способ привязки координатных систем к конгруэнции системы отсчета, также связанный с выделением группы координатных преобразований. Однако этот способ, в отличие от случая хронометрической калибровки, не является универсальным, а пригоден лишь для описания привилегированного класса так называемых *нормальных систем отсчета*, в какой-то мере заменяющих инерциальные системы отсчета в механике Ньютона или в специальной теории относительности.

Для нормальных систем отсчета характерно не локальное, как в методе хронометрических инвариантов, а глобальное расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на направления времени и на совокупность ортогональных времени 3-мерных пространственных гиперповерхностей, которые в общем случае задаются одним уравнением

$$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0, \quad (3.2.23)$$

где  $\lambda$  — некий параметр, нумерующий гиперповерхности данной совокупности. Из уравнения (3.2.23) легко найти нормали к пространственным гиперповерхностям, которые пропорциональны времени-подобной мона-



**Рис. 3.3.** Глобальное 1 + 3-расщепление пространства-времени в нормальных системах отсчета на линии времени и совокупность 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей

де данной системы отсчета (рис. 3.3):

$$b(x)\tau_\mu = \frac{\partial f_{(\lambda)}(x^\nu)}{\partial x^\mu}, \quad (3.2.24)$$

где  $b(x)$  — скалярная функция координат.

Воспользуемся тем, что при так или иначе заданной координатной системе всегда можно определить совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей, для которой нумерующим параметром  $\lambda$  является координата  $x^o$ , тогда имеем

$$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0 \rightarrow x^o = \text{const}. \quad (3.2.25)$$

Подставляя это уравнение гиперповерхностей в (3.2.24), находим, что в таком случае  $\tau_i = 0$ . Координатные системы, привязанные к нормальной конгруэнции мировых линий системы отсчета посредством уравнений пространственных гиперповерхностей с нормальными вдоль  $\tau_\mu$ , назовем *кинематрическими*.

2. Учитывая условия нормировки  $\tau_\mu \tau_\nu g^{\mu\nu} = 1$ , находим ковариантные компоненты  $\tau_\mu$  («калибруем» монаду кинематрическим образом):

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^o}{\sqrt{g^{oo}}}. \quad (3.2.26)$$

Из алгебраических соотношений (3.2.4) однозначно выражаются все компоненты  $\tau^\mu$  и тензора  $h_{\mu\nu}$  через компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \tau^\mu &= \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}}; & h_\mu^o &= 0; & h_o^i &= \frac{g^{oi}}{g^{oo}}; \\ h_i^k &= -g_i^k; & h_{ik} &= -g_{ik}; & h_{oi} &= -g_{oi}; & h_{oo} &= \frac{1 - g_{oo}g^{oo}}{g^{oo}}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$



Отдельно выпишем компоненты контравариантного 3-мерного метрического тензора

$$h^{ik} = \frac{g^{oi}g^{ok}}{g^{oo}} - g^{ik}; \quad h^{o\mu} = 0, \quad (3.2.28)$$

имеющего отличными от нуля лишь компоненты с пространственными индексами. Легко видеть, что формулы (3.2.26)–(3.2.28) аналогичны соответствующим формулам (3.2.11)–(3.2.13) в методе хронометрических инвариантов, отличаясь от них заменой ковариантных индексов на контравариантные.

3. Кинеметрическая система координат определена неоднозначно; для одной и той же нормальной конгруэнции  $\tau$  имеется набор кинеметрических координатных систем, определяемых из условия:

$$\tau'_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \tau_\alpha = \frac{\partial x^o}{\partial x'^i} \tau_o = 0 \rightarrow \frac{\partial x^o}{\partial x'^i} = 0. \quad (3.2.29)$$

Отсюда следует, что координатные системы, кинеметрическим образом привязанные к одной и той же нормальной системе отсчета, связаны преобразованиями:

$$x'^o = x'^o(x^o); \quad (3.2.30)$$

$$x'^i = x'^i(x^o, x^1, x^2, x^3). \quad (3.2.31)$$

Назовем эти преобразования *кинеметрическими*.

4. Легко видеть, что в этих формулах координаты  $x^o$  и пространственные  $x^i$  переставлены местами с соответствующими координатами в хронометрических преобразованиях (3.2.15)–(3.2.16). Преобразования (3.2.31) оказались дополнительными к хронометрическим; ранее они описывали переходы между хронометрическими системами отсчета, а теперь они соответствуют преобразованиям внутри одной и той же нормальной системы отсчета. Дополнительными к кинеметрическим являются преобразования

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3), \quad (3.2.32)$$

где в качестве аргумента обязательно присутствуют координаты с пространственным индексом. Такое преобразование исходной кинеметрической системы координат приводит к новой совокупности пространственно-подобных гиперповерхностей  $x'^o = \text{const}$ , к которой можно определить по формулам (3.2.26) новую ортогональную к ним конгруэнцию времени-подобных линий  $\tau'$ , где  $\tau'_\mu = g'^o_\mu / \sqrt{g'^{oo}}$ . С этой времени-подобной конгруэнцией можно связать вторую нормальную систему отсчета, тогда преобразование координат (3.2.32) описывает переход между нормальными системами отсчета, но только при соглашении, что с исходной и результирующей системами координат связаны системы

отсчета согласно калибровке (3.2.26). Систему отсчета, ассоциированную со взятой координатной системой согласно формулам (3.2.26)–(3.2.28), назовем *кинеметрической системой отсчета*.

Следовательно, преобразования координат (3.2.30), (3.2.31) соответствуют одной и той же кинеметрической системе отсчета, а (3.2.32) описывают переходы между различными кинеметрическими системами отсчета. Различие между преобразованиями (3.2.17) и (3.2.32) еще раз свидетельствует о том, что *переходы между системами отсчета связаны с преобразованиями координат только при наличии дополнительных соглашений, причем последние могут быть различными*.

5. В кинеметрических системах координат проецирование произвольного тензора  $B_{\nu \dots}^{\mu \dots}$  ранга  $m + n$  на направление  $\tau$  состоит в определении величины

$$B = B \underbrace{\begin{matrix} \mu \dots \\ \nu \dots \end{matrix}}_m \tau_{\mu} \dots \tau^{\nu} \dots = \frac{B^{oo \dots o}}{(g^{oo})^{(m+n)/2}}. \quad (3.2.33)$$

Все ковариантные «пространственные» компоненты  $B_{ik \dots}$  произвольного тензора автоматически являются пространственно-спроецированными:

$$\tilde{B}_{i \dots k} = B_{\mu \dots \nu} (-1)^n h_i^{\mu} \dots h_k^{\nu} = B_{\mu \dots \nu} g_i^{\mu} \dots g_k^{\nu} = B_{i \dots k}, \quad (3.2.34)$$

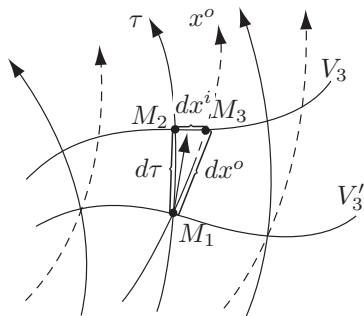
так как, согласно (3.2.27),  $h_i^o = 0$ ,  $h_i^{\mu} = -g_i^{\mu}$ . Все контравариантные компоненты пространственно-спроецированных тензоров имеют только индексы 1, 2, 3 и образуются поднятием индексов у компонент (3.2.34) посредством 3-мерного метрического тензора  $h^{ik}$ .

Из произвольного тензора  $B_{\nu \dots}^{\mu \dots}$  ранга  $n$  можно построить компоненты пространственно-спроецированных тензоров меньшего ранга  $m$ , например:

$$\tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} i \dots k \end{matrix}}_m = \frac{B \underbrace{\begin{matrix} o \dots o \\ i \dots k \end{matrix}}_{n-m}}{(g^{oo})^{(n-m)/2}}. \quad (3.2.35)$$

6. Пространственно-спроецированные тензоры в кинеметрических системах координат обладают свойством кинеметрической инвариантности: они инвариантны при преобразованиях (3.2.30) и пространственно-ковариантны относительно преобразований координат (3.2.31). Эти величины будем называть *кинеметрически инвариантными (к. и.) тензорами* [29, 67].

Как и в случае метода хронометрических инвариантов, продемонстрируем свойства кинеметрической инвариантности на примере произвольного вектора  $B^{\mu}$ . Рассмотрим изменения различных его компонент



**Рис. 3.4.** Соотношение конгруэнций линий  $\tau$  и  $x^o$  в методе кинематрических инвариантов

при преобразованиях (3.2.30) и (3.2.31):

$$\begin{aligned}
 B'_o &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^o} B_\mu = \frac{\partial x^o}{\partial x'^o} B_o + \frac{\partial x^k}{\partial x'^o} B_k; \\
 B'_k &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} B_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i; \\
 B'^o &= \frac{\partial x'^o}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^o}{\partial x^o} B^o; \\
 B'^k &= \frac{\partial x'^k}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^k}{\partial x^o} B^o + \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} B^i.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $g'^{oo} = g^{oo}(\partial x'^o/\partial x^o)^2$ , убеждаемся в инвариантности  $B^o/\sqrt{g^{oo}}$ . Очевидно, что  $B_k$  ковариантно относительно 3-мерных преобразований. Компоненты 1-й и 4-й строк не обладают свойством кинематрической инвариантности.

7. Отметим также, что с одной и той же координатной системой можно связать несколько систем отсчета, в частности хронометрическую и кинематрическую, причем в общем случае они будут отличаться друг от друга (см. рис. 3.4). Рассмотрим переход из точки  $M_1$  на одной пространственно-подобной гиперповерхности  $V_3$  к точкам  $M_2$  и  $M_3$ , лежащим на близкой гиперповерхности  $V'_3$ , причем точка  $M_2$  лежит на одной линии  $\tau$  с точкой  $M_1$ , а  $M_3$  на одной линии  $x^o$  с точкой  $M_1$ . Точки  $M_2$  и  $M_3$  характеризуются одной и той же координатой  $x'^o$ , а точки  $M_1$  и  $M_3$  имеют одинаковые пространственные координаты  $x^i$ . Найдем разность пространственных координат точек  $M_2$  и  $M_3$ . Так как вектор  $\tau^\mu$ , касательный к  $\tau$  в точке  $M_1$ , имеет компоненты  $\{\sqrt{g^{oo}}; g^{oi}/\sqrt{g^{oo}}\}$ , малое смещение вдоль него на величину  $d\tau = \tau_\mu dx^\mu = dx^o/\sqrt{g^{oo}}$  соответствует

разности координат  $x_2^i$  и  $x_3^i$ :

$$dx^i = \tau^i d\tau = \frac{g^{oi}}{g^{oo}} dx^o. \quad (3.2.36)$$

Угол наклона линии  $\tau$  к линии  $x^o$  определяется отношением длин смещений  $M_1 M_2 = d\tau$  и  $M_1 M_3 = ds = \sqrt{g_{oo}} dx^o$ :

$$\cos \alpha = \frac{M_1 M_2}{M_1 M_3} = \frac{1}{\sqrt{g_{oo} g^{oo}}}. \quad (3.2.37)$$

Очевидно, если смешанные компоненты метрического тензора  $g^{oi}$  равны нулю, конгруэнции  $\tau$  и  $x^o$  совпадают.

### 3.3. Монадные физико-геометрические тензоры

Так же, как из  $g_{ik}$  дифференцированием по координатам были получены символы Кристоффеля, из первых производных от  $\tau^\mu$  и  $h_{ik}$  можно получить несколько новых величин. Три из них являются тензорами. Они характеризуют системы отсчета и названы *физико-геометрическими тензорами*.

#### 1. Определение монадных физико-геометрических тензоров

Введем монадные физико-геометрические тензоры формальным образом. Для этого возьмем ковариантную производную от  $\tau_\mu$  и представим ее в виде суммы симметричной и антисимметричных частей:

$$\tau_{\mu;\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}) + \frac{1}{2}(\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}). \quad (3.3.1)$$

Так как нас интересуют лишь пространственно-спроецированные тензоры и скаляры, спроецируем два полученных тензора посредством  $\tau^\mu$  и  $h^\mu_\alpha$  всеми возможными способами:

$$(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu})\tau^\mu\tau^\nu = 0; \quad (\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu})\tau^\mu\tau^\nu = 0; \quad (3.3.2)$$

$$a_\alpha \equiv -(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu})\tau^\nu h^\mu_\alpha = -(\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu})\tau^\mu h^\nu_\alpha = \tau^\nu(\tau_{\alpha,\nu} - \tau_{\nu,\alpha}); \quad (3.3.3)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu})h^\mu_\alpha h^\nu_\beta; \quad (3.3.4)$$

$$d_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}(\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu})h^\mu_\alpha h^\nu_\beta = \frac{1}{2}(\tau^\lambda h_{\alpha\beta,\lambda} + h_{\alpha\lambda}\tau^\lambda_{,\beta} + h_{\beta\lambda}\tau^\lambda_{,\alpha}). \quad (3.3.5)$$

Таким образом, получились три тензорные величины<sup>1)</sup>:  $a_\alpha$ ,  $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ ,  $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}$ . Дифференцирование  $h_{\alpha\beta}$  по координатам не приводит к но-

<sup>1)</sup>Здесь и ниже приняты обозначения монадных физико-геометрических тензоров, отличные от зельмановских и использованных в наших прежних работах [29, 32, 36], т. е. произведены переобозначения:  $F_\alpha \equiv a_\alpha$ ,  $A_{\alpha\beta} \equiv \omega_{\alpha\beta}$ ,  $D_{\alpha\beta} \equiv d_{\alpha\beta}$ .

вым величинам, так как

$$h_{\alpha\beta;\sigma} = (g_\alpha^\lambda \tau_\beta + g_\beta^\lambda \tau_\alpha)(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma} + a_\lambda \tau_\sigma); \quad h_{\alpha\beta;\sigma} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = 0. \quad (3.3.6)$$

Выпишем несколько полезных соотношений:

$$\tau_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} - d_{\mu\nu} + a_\mu \tau_\nu; \quad \tau^\mu \tau_{\mu;\nu} = 0; \quad \tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = a^\mu; \quad (3.3.7)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}) + \frac{1}{2}(\tau_\mu a_\nu - \tau_\nu a_\mu). \quad (3.3.8)$$

Поясним *физический смысл* введенных тензоров. По определению, система отсчета представляет собой некую безмассовую сплошную среду из приборов, а  $\tau_\mu$  является 4-скоростью этих приборов. Тогда антисимметричный тензор  $\omega_{\alpha\beta}$  следует считать *тензором угловой скорости вращения*, а симметричный тензор  $d_{\alpha\beta}$  — *тензором скоростей деформаций* системы отсчета.

Для определения физического смысла  $a_\alpha$  заметим, что выражение  $\tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = a^\mu$  определяется изменением касательного вектора постоянной длины при смещении его вдоль мировой линии, что может быть лишь ортогональным к этому вектору. Из теоретической механики известно, что такая величина представляет собой вектор ускорения. Очевидно, что для случая, когда мировые линии системы отсчета являются геодезическими,  $a_\mu = 0$ . Таким образом, вектор  $a_\mu$  следует интерпретировать как вектор ускорения системы отсчета относительно локально геодезической системы отсчета с осью времени вдоль  $\tau^\mu$ .

Данная здесь физическая интерпретация монадных тензоров подкрепляется видом уравнений геодезических линий и иных соотношений в монадном виде, записанных ниже.

## 2. Геометрический смысл монадных тензоров

Напомним, что для конгруэнции мировых линий в 4-мерном пространстве-времени в каждой точке можно определить четверку ортонормированных векторов:  $\tau^\mu$ ,  $l^\mu$ ,  $\beta^\mu$ ,  $\gamma^\mu$ , образующих так называемую сопровождающую тетраду. Для нее имеют место формулы Френе—Серре:

$$\tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = R_{(1)} l^\mu; \quad (3.3.9)$$

$$\tau^\nu l_{;\nu}^\mu = R_{(2)} \beta^\mu + R_{(1)} \tau^\mu; \quad \tau^\nu \beta_{;\nu}^\mu = R_{(3)} \gamma^\mu - R_{(2)} l^\mu; \quad \tau^\nu \gamma_{;\nu}^\mu = -R_{(3)} \beta^\mu, \quad (3.3.10)$$

где вектор  $\tau^\mu$  направлен вдоль мировой линии, а векторы  $l^\mu$ ,  $\beta^\mu$ ,  $\gamma^\mu$  являются соответственно первой, второй и третьей нормальными к линии в рассматриваемой точке. Коэффициенты  $R_{(1)}$ ,  $R_{(2)}$ ,  $R_{(3)}$  в геометрии

называются первой, второй и третьей кривизнами соответствующей линии. Они обеспечивают ортонормированность введенных векторов:

$$l_\mu l^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = -1; \quad \tau_\mu l^\mu = \tau_\mu \beta^\mu = \dots = l_\mu \beta^\mu = 0. \quad (3.3.11)$$

Из уравнения (3.3.7) и (3.3.9) находим

$$R_{(1)} l^\mu = a^\mu \rightarrow R_{(1)}^2 = -a_\mu a^\mu, \quad (3.3.12)$$

т. е. вектор  $a^\mu$  определяет первую кривизну мировой линии и направлен вдоль первой нормали к ней. Вторая и третья кривизны определяются через первые и вторые производные от  $a_\mu$ .

Конгруэнцию времени-подобных мировых линий системы отсчета можно охарактеризовать четырьмя скалярами, к которым наряду с первой кривизной (3.3.12) относятся следующие три:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \tau_{;\mu}^\mu = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} d_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} d; \quad (3.3.13)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} (\tau_{\mu;\nu} - \tau_{\nu;\mu}) \tau^{\mu;\nu} + \frac{1}{4} R_{(1)}^2 = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}; \quad (3.3.14)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} (\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}) \tau^{\mu;\nu} - \varepsilon^2 + \frac{1}{4} R_{(1)}^2 = \frac{1}{2} \left( d_{\mu\nu} d^{\mu\nu} - \frac{1}{2} d^2 \right), \quad (3.3.15)$$

определяющими соответственно *растяжение, вращение и сдвиг конгруэнции*.

Отметим, что из тензора скоростей деформаций можно выделить бесследовую часть

$$\tilde{d}_{\mu\nu} \equiv d_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} d \rightarrow \tilde{d}_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.16)$$

Данные здесь физическая и геометрическая интерпретации трех моноадных тензоров обусловили их название — моноадные физико-геометрические тензоры.

### 3. Физико-геометрические тензоры в хронометрической калибровке

Запишем моноадные физико-геометрические тензоры в хронометрических системах координат (в хронометрической калибровке). Очевидно, что они хронометрически инвариантны и имеют вид:

$$\begin{aligned} {}^* a_i &= \tau^0 (\tau_{i,0} - \tau_{0,i}); \\ {}^* \omega_{ik} &= \frac{1}{2} (\tau_{i,k} - \tau_{k,i}) + \frac{1}{2} ({}^* a_k \tau_i - {}^* a_i \tau_k); \\ {}^* d_{ik} &= \frac{1}{2} \tau^o h_{ik,o}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой слева сверху будем обозначать моноадные величины и операторы в хронометрической калибровке.

#### 4. Физико-геометрические тензоры в кинеметрической калибровке

Используя значения составляющих метрического тензора в кинеметрической калибровке, из определений (3.3.3)–(3.3.5) находим выражения для физико-геометрических тензоров:

$${}^*a_i = \tau_o \tau_{,i}^o; \quad {}^*\omega_{ik} \equiv 0; \quad (3.3.18)$$

$${}^*d_{ik} = \frac{1}{2} \left( \tau^\mu \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\mu} + h_{\alpha k} \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^i} + h_{i\alpha} \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^k} \right). \quad (3.3.19)$$

Здесь и в дальнейшем будем помечать пятиконечной звездочкой слева сверху величины и операторы в кинеметрической калибровке, в отличие от шестиконечной звездочки, принятой в методе хронометрических инвариантов. Из (3.3.18) следует чрезвычайно важное свойство нормальных систем отсчета, — в них тождественно равен нулю тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Это позволяет считать нормальные системы отсчета преимущественными (выделенными) в искривленном пространстве-времени, т. е. в некотором смысле назвать их *аналогом инерциальных систем отсчета в плоском пространстве-времени*.

### 3.4. Монадные операторы дифференцирования

Аналогично тому, как в римановой геометрии (в ОТО), имеющей дело с тензорными величинами, операторы частного дифференцирования были заменены на операторы ковариантного дифференцирования, так и в монадном методе, имеющем дело лишь со скалярами и пространственно-спроецированными тензорами, операторы частного и ковариантного дифференцирования должны быть заменены на операторы, которые, действуя на пространственно-спроецированные тензоры (и скаляры), приводят опять к пространственно-спроецированным тензорам, т. е. не выводят за пределы класса тех величин, в терминах которых записывается теория.

Как и выше, введем такие монадные операторы сначала в общековариантном виде, а затем перейдем к двум частным калибровкам.

#### 1. Общековариантные операторы

Из оператора ковариантного дифференцирования  $\nabla_\sigma$ , оператора пространственного проецирования  $H_{\mu\dots\beta\dots}^{\nu\dots\alpha\dots}$  и вектора  $\tau^\sigma$  можно образовать два характерных для монадного метода оператора дифференцирования, не выводящие за пределы класса пространственно-спроецированных тензоров:

$$\tilde{\nabla}_T \tilde{B}_{\beta\dots}^{\nu\dots} \equiv H_{\mu\dots\beta\dots}^{\nu\dots\alpha\dots} \tau^\sigma (\nabla_\sigma \tilde{B}_{\alpha\dots}^{\mu\dots}); \quad \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{B}_{\beta\dots}^{\nu\dots} \equiv -H_{\mu\dots\beta\dots}^{\nu\dots\alpha\dots} h_\lambda^\sigma (\nabla_\sigma \tilde{B}_{\alpha\dots}^{\mu\dots}). \quad (3.4.1)$$

Первый из них следует назвать *оператором ковариантного временного дифференцирования*, а второй — *оператором ковариантного пространственного дифференцирования*.

Однако в моноадном методе вместо ковариантного временного дифференцирования используется другой оператор, называемый *оператором моноадного временного дифференцирования*  $\partial_T$ , связанный с первым соотношением:

$$\partial_T \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ \nu \dots \\ \beta \dots \end{matrix}}_m = \tilde{\nabla}_T \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_{n} + \underbrace{(\omega^\nu_\sigma - d^\nu_\sigma) \tilde{B} \underbrace{\sigma \dots}_m}_{n} + \dots - \underbrace{(\omega^\sigma_\beta - d^\sigma_\beta) \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_m}_{m} - \dots \quad (3.4.2)$$

Очевидно, что этот оператор общековариантен. Использование именно этого оператора обусловлено рядом обстоятельств, прежде всего, тем, что при записи тензорных выражений общей теории относительности в моноадном виде он оказывается в тех местах, где в соответствующих ньютоновых или спецрелятивистских выражениях обычно пишется дифференцирование по времени<sup>1)</sup>.

Оператор моноадного временного дифференцирования можно записать в форме:

$$\partial_T \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ \nu \dots \\ \beta \dots \end{matrix}}_m = \tau^\sigma \frac{\partial \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_{n}}{\partial x^\sigma} - \underbrace{N^\nu_\sigma \tilde{B} \underbrace{\sigma \dots}_m}_{n} - \dots + \underbrace{N^\sigma_\beta \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_m}_{m} + \dots, \quad (3.4.3)$$

где

$$N^\nu_\mu = \frac{\partial \tau^\nu}{\partial x^\mu} - \tau^\nu a_\mu \quad (3.4.4)$$

— своеобразная связность временного дифференцирования. В общем случае этот оператор зависит от ранга и ковариантности дифференцируемых величин.

Оператор ковариантного пространственного дифференцирования представляется виде:

$$\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ \nu \dots \\ \beta \dots \end{matrix}}_m = -h^\sigma_\lambda \left[ \frac{\partial \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_{n}}{\partial x^\sigma} + \underbrace{(L^\nu_{\delta\sigma} + h^\nu_{\delta\sigma}) \tilde{B} \underbrace{\delta \dots}_n}_{n} + \dots + \underbrace{(L^\delta_{\alpha\sigma} h^\alpha_\beta + h^\delta_{\beta,\sigma}) \tilde{B} \underbrace{\nu \dots}_m}_{m} + \dots \right], \quad (3.4.5)$$

<sup>1)</sup> Другим важным обстоятельством, заставляющим выделить этот оператор, является то, что так определенное выражение оказывается пространственно-спроецированным оператором Ли — важным оператором в дифференциальной геометрии. Об этом более подробно будет сказано в гл. 4.



где

$$L_{\delta\sigma}^{\nu} = \frac{h^{\nu\lambda}}{2}(h_{\lambda\delta,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\delta} - h_{\delta\sigma,\lambda}) \quad (3.4.6)$$

— «связность» ковариантного пространственного дифференцирования.

Выпишем результат действия введенных операторов на 3-мерный метрический тензор:

$$\partial_T h_{\mu\nu} = 2d_{\mu\nu}; \quad \partial_T h^{\mu\nu} = -2d^{\mu\nu}; \quad \tilde{\nabla}_{\lambda} h_{\mu\nu} = 0, \quad (3.4.7)$$

т. е. действие оператора ковариантного пространственного дифференцирования на 3-мерный метрический тензор, как и следовало ожидать, дает ноль.

Ковариантные производные от произвольных тензоров всегда можно записать через введенные здесь монадные операторы и физико-геометрические тензоры. Например, для произвольного вектора  $B_{\nu}$  (не спроецированного) имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} B_{\nu} = \nabla_{\mu}(B\tau_{\nu} + \tilde{B}_{\nu}) = \tau_{\nu}(\tau_{\mu}\partial_T B - \tilde{\nabla}_{\mu} B) - (\omega_{\mu\nu} + d_{\mu\nu} - \tau_{\mu}a_{\nu})B + \\ + (\tilde{\nabla}_{\mu} + \tau_{\mu}\partial_T)\tilde{B}_{\nu} - (\tau_{\mu}(\omega_{\nu}^{\lambda} - d_{\nu}^{\lambda}) + \tau_{\nu}(\omega_{\mu}^{\lambda} - d_{\mu}^{\lambda}) + \tau_{\mu}\tau_{\nu}a^{\lambda})\tilde{B}_{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

## 2. Операторы в хронометрической калибровке

В хронометрической калибровке вследствие того, что  $*N_i^k = 0$ , существенно упрощается оператор монадного временного дифференцирования (3.4.3):

$$*\partial_T \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} = \tau^o \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^o} = \frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^o}. \quad (3.4.9)$$

Он не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины.

Для записи монадного пространственного ковариантного дифференцирования учтем, что в формуле (3.4.5) теперь  $h_{k,\sigma}^i = 0$ , а 3-мерные связности можно представить в виде

$$-h_i^{\sigma} h_s^{\nu} L_{\nu\sigma}^k \equiv \Delta_{is}^k = \frac{h^{kl}}{2} (*\partial_i h_{ls} + *\partial_s h_{li} - *\partial_l h_{is}), \quad (3.4.10)$$

где  $\Delta_{is}^k$  — дополнительная к монадным физико-геометрическая величина; значком  $*\partial_i$  здесь обозначен новый хронометрически инвариантный оператор пространственного дифференцирования:

$$*\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{oi}}{g_{oo}} \frac{\partial}{\partial x^o}, \quad (3.4.11)$$

также не зависящий от ранга и ковариантности дифференцируемой величины<sup>1)</sup>. В результате для оператора  ${}^*\tilde{\nabla}_s$  (3.4.5) получаем выражение

$${}^*\tilde{\nabla}_s \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ k \dots \\ l \dots \end{matrix}}_m = {}^*\partial_s \tilde{B}_{l \dots}^k + \underbrace{\Delta_{si}^k \tilde{B}_{l \dots}^{i \dots}}_n + \dots - \underbrace{\Delta_{sl}^i \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots}}_m - \dots \equiv {}^*\nabla_s \tilde{B}_{l \dots}^k. \quad (3.4.12)$$

### 3. Операторы в кинеметрической калибровке

В кинеметрической калибровке монадный оператор временного дифференцирования зависит от ранга и ковариантности дифференцируемых величин:

$${}^*\partial_T \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ i \dots \\ k \dots \end{matrix}}_m = \sqrt{g^{oo}} \frac{\partial \tilde{B} \begin{matrix} n \\ i \dots \\ k \dots \end{matrix}}{\partial x^o} + \frac{g^{os}}{\sqrt{g^{oo}}} \frac{\partial \tilde{B}_{k \dots}^{i \dots}}{\partial x^s} \underbrace{- N_s^i \tilde{B}_{k \dots}^{s \dots} - \dots + N_k^s \tilde{B}_{s \dots}^{i \dots} + \dots}_m, \quad (3.4.13)$$

где

$$N_{s \cdot}^i = -h_{\sigma}^i \tau_{,s}^{\sigma} = \tau_{,s}^i - \tau^{i*} a_s.$$

Вид ковариантной пространственной производной от пространственно-спроецированных тензоров полностью идентичен 3-мерной ковариантной производной от 3-мерного тензора:

$${}^*\tilde{\nabla}_l \tilde{B} \underbrace{\begin{matrix} n \\ i \dots \\ k \dots \end{matrix}}_m = \frac{\partial \tilde{B}_{k \dots}^{i \dots}}{\partial x^l} + \underbrace{L_{sl}^i \tilde{B}_{k \dots}^{s \dots}}_n + \dots - \underbrace{L_{kl}^s \tilde{B}_{s \dots}^{i \dots}}_m + \dots, \quad (3.4.14)$$

где

$$L_{kl}^s = \frac{h^{si}}{2} \left( \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i} \right) \quad (3.4.15)$$

— 3-мерные символы Кристоффеля.

## 3.5. Монадный вид геометрических уравнений и тождеств

Все введенные в предыдущих главах общеквариантные выражения можно представить в монадном виде, т. е. записать их исключительно через пространственно-спроецированные тензоры (и скаляры), физико-геометрические тензоры и операторы монадного дифференцирования,

<sup>1)</sup> В 3-й части книги будет показано, что именно этот оператор соответствует «удлиненным» производным в калибровочных моделях физических взаимодействий.

причем это всегда можно сделать как в общековариантном виде, так и в специальных групповых калибровках. Отдельно рассмотрим важнейшие из введенных выше уравнений.

### 3.5.1. Уравнения геодезических линий

1. Для записи уравнений геодезических линий, прежде всего, учтем, что символы Кристоффеля представляются в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = L_{\alpha\beta}^{\mu} + \frac{1}{2} \left( h_{\alpha,\beta}^{\mu} + h_{\beta,\alpha}^{\mu} \right) + d_{\alpha\beta}\tau^{\mu} + a^{\mu}\tau_{\alpha}\tau_{\beta} - \frac{1}{2}\tau^{\mu} \left( a_{\alpha}\tau_{\beta} + a_{\beta}\tau_{\alpha} \right) + \left( \tau_{\alpha}\omega_{\beta}^{\mu} + \tau_{\beta}\omega_{\alpha}^{\mu} \right) - \frac{1}{2} \left( \tau_{\alpha}\tau_{,\beta}^{\mu} + \tau_{\beta}\tau_{,\alpha}^{\mu} \right), \quad (3.5.1)$$

где трехмерные символы Кристоффеля  $L_{\alpha\beta}^{\mu}$  записаны в (3.4.15). Очевидно, поскольку символы Кристоффеля не являются тензорами, то в их записи присутствуют «лишние», т. е. не тензорные слагаемые. Кроме того, введем ряд 3-мерных обозначений:

$$v^{\mu} \equiv \frac{-h_{\nu}^{\mu} dx^{\nu}}{\tau_{\alpha} dx^{\alpha}} = -h_{\nu}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad (3.5.2)$$

— пространственные компоненты скорости частицы;

$$ds = d\tau \sqrt{1 - v^2}; \quad m \equiv m_o \frac{\tau_{\alpha} dx^{\alpha}}{ds} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.5.3)$$

— динамическая масса частицы ( $m_o$  — масса покоя);

$$p^{\mu} = -m_o h_{\alpha}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{ds} = mv^{\mu} \quad (3.5.4)$$

— компоненты 3-импульса.

После несложных выкладок получаем выражение для 4-мерной скорости через 3-мерные скорости:

$$w^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds} = \frac{\tau^{\mu} + v^{\mu}}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3.5.5)$$

2. Уравнения геодезических линий в монадном виде представляются следующим образом:

$$\frac{Dm}{d\tau} \equiv \left( \partial_T m + v^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} m \right) = a_{\mu} p^{\mu} - d_{\mu\nu} p^{\mu} v^{\nu}; \quad (3.5.6)$$

$$\frac{Dp^{\nu}}{d\tau} \equiv \left( \partial_T p^{\nu} + v^{\mu} \tilde{\nabla}_{\mu} p^{\nu} \right) = -m a^{\nu} - 2p^{\mu} \left( \omega_{\mu}^{\nu} - d_{\mu}^{\nu} \right). \quad (3.5.7)$$

В левых частях этих уравнений стоит оператор, имеющий смысл субстанциальной временной производной в механике сплошных сред.

Первое из этих выражений описывает изменение кинетической энергии ( $mc^2$ ) тела в неинерциальной системе отсчета. Как видно из (3.5.6),

оно определяется ускорением системы отсчета  $a_\mu$  и тензором скоростей деформаций  $d_{\mu\nu}$ .

Второе уравнение описывает изменение 3-мерного импульса в неинерциальной системе отсчета. Сравним это выражение с уравнением движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета в ньютоновой механике

$$\frac{d\vec{p}_{\text{отн}}}{dt} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{кор}}, \quad (3.5.8)$$

где, напомним, кориолисово ускорение  $\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}\vec{v}_{\text{отн}}]$  (или в 3-мерных тензорных обозначениях  $a_{\text{кор}}^i = 2\omega_{,j}^i v^j$ ) определяется через угловую скорость вращения классической системы отсчета  $\vec{\omega}$  и относительной скоростью материальной точки  $\vec{v}_{\text{отн}}$ . В формуле (3.5.8) также содержится переносная сила инерции и реальная сила  $\vec{F}$ , действующая на точку. Понятно, что в уравнениях геодезической отсутствуют реальные силы. Из сравнения правых частей (3.5.7) и (3.5.8) находим подтверждение ранее произведенной интерпретации физико-геометрических тензоров:  $a^\nu$  — ускорение;  $\omega_{,\beta}^\nu$  — тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Третий тензор — скоростей деформаций  $d_{\mu\nu}$ , входящий в (3.5.7), в известных уравнениях ньютоновой механики отсутствует, поскольку там используется твердотельное определение классических систем отсчета, невозможное в ОТО.

3. Чтобы записать уравнения изотропных геодезических линий (1.3.27), введем проекции волнового вектора:  $\varepsilon = k^\mu \tau_\mu$  — энергия изотропного излучения;  $\tilde{k}^\nu = -k^\mu h_\mu^\nu$  — пространственно-подобная часть (импульс) волнового вектора;  $l^\nu = \tilde{k}^\nu / \varepsilon$  — направление распространения изотропного излучения ( $l^\mu \tau_\mu = 0$ ). Используя эти обозначения, находим, что две проекции уравнения (1.3.27) записываются следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} (\partial_T \varepsilon + l^\mu \tilde{\nabla}_\mu \varepsilon) = a_\mu l^\mu - d_{\mu\nu} l^\mu l^\nu; \quad (3.5.9)$$

$$\frac{d\tilde{k}^\nu}{d\tau} = \partial_T \tilde{k}^\nu + l^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = -\varepsilon a^\nu - 2(\omega_{,\mu}^\nu - d_{\nu\mu}) \tilde{k}^\mu. \quad (3.5.10)$$

4. Представим уравнения движения и спина дипольных частиц (уравнения Матиссона—Папаетру (1.5.28)–(1.5.29)) в монодном виде. Пространственно-спроецированные по обоим индексам уравнения спина (1.5.28) в общековариантном монодном виде записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \partial_T S^{\mu\nu} + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S^{\mu\nu} = & -S^{\lambda\nu} (\omega_{,\lambda}^\mu - d_\lambda^\mu) - S^{\mu\lambda} (\omega_{,\lambda}^\nu - d_\lambda^\nu) + \\ & + [(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma}) v^\sigma + a_\lambda] (S^{\lambda\mu} v^\nu - S^{\lambda\nu} v^\mu), \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

а смешанная проекция записывается в форме

$$\begin{aligned} v_\beta \left[ v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma S^{\beta\nu} + \partial_T S^{\beta\nu} + 2S^{\lambda\nu} \omega_{,\lambda}^\beta - S^{\beta\lambda} (d_\lambda^\nu - \omega_{,\lambda}^\nu) \right] - S^{\lambda\nu} a_\lambda = \\ = - [(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma}) v^\sigma + a_\lambda] S^{\lambda\beta} \left( \frac{\delta_\beta^\nu}{u^2} - v_\beta v^\nu \right) u, \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где использованы обозначения:

$$u = \tau_\alpha u^\alpha; \quad v^\sigma = -\frac{u^\lambda}{u} h_\lambda^\sigma. \quad (3.5.13)$$

Как уже отмечалось, система уравнений Матиссона—Папапетру является неполной. Дополнительные условия Кориналдези—Папапетру (1.5.30) в монадных обозначениях представляются в виде

$$S^{\mu\nu} \tau_\mu = 0, \quad (3.5.14)$$

что, в частности, означает, что тензор спина является пространственно-спроецированным в системе отсчета, сопутствующей данной частице, где  $\tau^\mu = u^\mu$ . В этой системе отсчета уравнения спина (1.5.29) автоматически оказываются пространственно спроецированными, так как представляются в виде:

$$(g_\mu^\alpha - u^\alpha u_\mu)(g_\nu^\beta - u^\beta u_\nu) \frac{DS^{\mu\nu}}{D_s} = 0 \rightarrow h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \frac{DS^{\mu\nu}}{D_s} = 0, \quad (3.5.15)$$

где  $h_\mu^\alpha$  — 3-мерный метрический тензор пространственного сечения, ортогонального мировым линиям трубки рассматриваемой частицы.

5. Уравнения движения дипольных частиц в монадном виде распадаются на скалярное и пространственно-спроецированную части:

$$(\partial_T \tilde{m} + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{m}) - \tilde{P}^\lambda [(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma}) v^\sigma + a_\lambda] = -\frac{v^\sigma}{2} S^{\mu\nu} Y_{\sigma\mu\nu}; \quad (3.5.16)$$

$$\begin{aligned} (\partial_T \tilde{P}^\alpha + v^\sigma \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{P}^\alpha) + \tilde{m} [(\omega_{,\sigma}^\alpha - d_\sigma^\alpha) v^\sigma + a_\alpha] + \tilde{P}^\lambda (\omega_{,\lambda}^\alpha - d_\lambda^\alpha) = \\ = \frac{1}{2} S^{\mu\nu} (Y_{,\mu\nu}^\alpha - v^\sigma Z_{\sigma\mu\nu}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

где введены величины:

$$\tilde{m} = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{S^{\lambda\beta} v_\beta}{(1-v^2)} [(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma}) v^\sigma + a_\lambda]; \quad (3.5.18)$$

$$\tilde{P}^\alpha = \frac{m_o v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{S^{\lambda\beta}}{(1-v^2)^{3/2}} [(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma}) v^\sigma + a_\lambda] [\delta_\beta^\alpha (1-v^2) - v_\beta v^\alpha]; \quad (3.5.19)$$

$Y_{\mu\nu}^\alpha$  и  $Z_{\sigma\mu\nu}^\alpha$  — проекции тензора Римана—Кристоффеля, определенные ниже в (3.5.27) — (3.5.28). Эти уравнения обобщают записанные ранее уравнения геодезических линий (3.5.6)–(3.5.7) в монадном виде (переходят в них при равном нулю тензоре спина).

### 3.5.2. Уравнения Эйнштейна и тождества

1. Прежде всего, запишем проекции компонент тензора Риччи на направления  $\tau$  и пространственное сечение:

$${}^4R_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu = (\partial_T d - d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + (\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda); \quad (3.5.20)$$

$$-{}^4R_{\mu\nu}h_\alpha^\nu\tau^\mu = \tilde{\nabla}_\alpha d - \tilde{\nabla}_\lambda(\omega_\alpha^\lambda + d_\alpha^\lambda) - 2a_\lambda\omega_\alpha^\lambda; \quad (3.5.21)$$

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu &= -(\partial_T - d)d_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\alpha a_\beta + \tilde{\nabla}_\beta a_\alpha - 2a_\alpha a_\beta) + \\ &+ (d_{\alpha\lambda} + \omega_{\alpha\lambda})(d_\beta^\lambda + \omega_\beta^\lambda) + (d_{\alpha\lambda}d_\beta^\lambda - 3\omega_{\alpha\lambda}\omega_\beta^\lambda) + {}^3\tilde{R}_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

где  ${}^3R_{\alpha\beta} = {}^3R_{\alpha\lambda\beta}^\lambda$  — 3-мерный тензор Риччи;  $d = -d_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$ .

Из этих выражений скалярная кривизна в монодном виде записывается следующим образом:

$${}^4R = 2\partial_T d - (d^2 + d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}) - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + 2(\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda) + {}^3R, \quad (3.5.23)$$

где  ${}^3R = -h^{\alpha\beta}{}^3R_{\alpha\beta}$ . Напомним, что во всех формулах индексы поднимаются и опускаются посредством  $g^{\mu\nu}$  (или, что равносильно для пространственно-спроецированных величин, посредством  $-h^{\mu\nu}$ ).

2. Проекция уравнений Эйнштейна на монодные составляющие метрического тензора находятся в виде:

$$\begin{aligned} \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R\right)\tau^\mu\tau^\nu &= \frac{1}{2}(d^2 - d_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta}) + \frac{3}{2}\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}{}^3R = \\ &= \varkappa T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu; \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

$$\begin{aligned} -\left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R\right)\tau^\mu h_\alpha^\nu &= \tilde{\nabla}_\alpha d - \tilde{\nabla}_\lambda(\omega_\alpha^\lambda + d_\alpha^\lambda) - 2a_\lambda\omega_\alpha^\lambda = -\varkappa T_{\mu\nu}\tau^\mu h_\alpha^\nu; \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

$$\begin{aligned} \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R\right)h_\alpha^\mu h_\beta^\nu &= (\partial_T - d)d_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\partial_T d + (d_{\alpha\lambda} + \omega_{\alpha\lambda})(d_\beta^\lambda + \omega_\beta^\lambda) + \\ &+ (d_{\alpha\lambda}d_\beta^\lambda - 3\omega_{\alpha\lambda}\omega_\beta^\lambda) - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(d^2 + d_{\mu\nu}d^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\alpha a_\beta + \tilde{\nabla}_\beta a_\alpha - 2a_\alpha a_\beta) + h_{\alpha\beta}(\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda) + \\ &+ \left({}^3R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}{}^3R\right) = \varkappa T_{\mu\nu}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu. \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

Скалярная часть спроецированных уравнений Эйнштейна (3.5.24) допускает простую физическую интерпретацию. Поскольку справа стоит плотность энергии системы в физических терминах  $T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu$ , то левую

часть следует понимать как представление физической плотности энергии через геометрические понятия. Поскольку  $d_{\mu\nu}$  есть временная производная от 3-мерного метрического тензора, то слагаемые, содержащие квадратично  $d_{\mu\nu}$ , естественно интерпретировать как геометрическую «кинетическую энергию» системы. Слагаемые с квадратичной комбинацией тензора угловой скорости вращения  $\omega_{\mu\nu}$  следует трактовать как энергию системы, обусловленную вращением, а оставшееся слагаемое, пропорциональное скалярной трехмерной кривизне, не содержащее временных производных, тогда следует понимать как геометрическую «потенциальную энергию» системы.

3. Из тензора Римана–Кристоффеля  ${}^4R_{\beta\mu\nu}^\alpha$  всеми возможными способами проецирования можно получить три пространственно-спроецированных тензора:

$$Z_{\cdot\delta\gamma\sigma}^\lambda \equiv H_{\alpha\delta\gamma\sigma}^{\lambda\beta\mu\nu} {}^4R_{\beta\mu\nu}^\alpha = {}^3\tilde{R}_{\cdot\delta\gamma\sigma}^\lambda - 2\omega_{\cdot\delta}^\lambda \omega_{\gamma\sigma} + (d_\sigma^\lambda + \omega_{\sigma\cdot}^\lambda)(d_{\gamma\delta} + \omega_{\gamma\delta}) - (d_\gamma^\lambda + \omega_{\gamma\cdot}^\lambda)(d_{\sigma\delta} + \omega_{\sigma\delta}); \quad (3.5.27)$$

$$Y_{\delta\gamma\sigma} \equiv {}^4R_{\beta\mu\nu}^\alpha \tau_\alpha h_\delta^\beta h_\gamma^\mu h_\sigma^\nu = -2a_\delta \omega_{\gamma\sigma} + \tilde{\nabla}_\sigma (d_{\gamma\delta} + \omega_{\gamma\delta}) - \tilde{\nabla}_\gamma (d_{\sigma\delta} + \omega_{\sigma\delta}); \quad (3.5.28)$$

$$X_{\sigma\gamma} \equiv {}^4R_{\beta\mu\nu}^\alpha \tau_\alpha \tau^\mu h_\sigma^\beta h_\gamma^\nu = \partial_T d_{\sigma\gamma} + (d_\sigma^\lambda + \omega_{\sigma\cdot}^\lambda)(d_{\gamma\lambda} + \omega_{\gamma\lambda}) + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\sigma a_\gamma + \tilde{\nabla}_\gamma a_\sigma - 2a_\sigma a_\gamma). \quad (3.5.29)$$

4. Используя предыдущие формулы, запишем тождества Риччи:

$$\partial_T \omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_\mu a_\nu - \tilde{\nabla}_\nu a_\mu); \quad (3.5.30)$$

$$(\tilde{\nabla}_\nu + a_\nu) \omega_{\mu\beta} + (\tilde{\nabla}_\beta + a_\beta) \omega_{\nu\mu} + (\tilde{\nabla}_\mu + a_\mu) \omega_{\beta\nu} = 0; \quad (3.5.31)$$

$$Z_{\mu\nu\sigma\lambda} + Z_{\mu\lambda\nu\sigma} + Z_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0. \quad (3.5.32)$$

Тождества Бианки в монадном виде выглядят громоздко.

5. Все выписанные выше соотношения в общековариантном виде легко записать в *хронометрической калибровке*. Для этого достаточно везде заменить 4-мерные (греческие) индексы на 3-мерные (латинские), а в обозначениях физико-геометрических тензоров и монадных операторов слева сверху поставить звездочку, означающую, что эти величины взяты в хронометрической калибровке.

6. В *кинеметрической калибровке* все формулы упрощаются, поскольку в ней тензор угловой скорости вращения обращается в нуль. Кроме того, необходимо сделать переобозначения, как и в случае перехода к хронометрической калибровке.

Отметим, что в кинеметрической калибровке, поскольку 3-мерная связность переходит в 3-мерные символы Кристоффеля, 3-мерный тензор Риччи записывается в общепринятом виде

$${}^3R_{ik} = \frac{\partial L_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial L_{il}^k}{\partial x^k} + L_{ik}^l L_{ls}^s - L_{il}^s L_{ks}^l. \quad (3.5.33)$$

Метод кинеметрических инвариантов можно понимать как способ выделения в 4-мерном римановом пространстве-времени 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей. С позиций известной в дифференциальной геометрии теории вложения  $n - 1$ -мерных гиперповерхностей в риманово пространство размерности  $n$  [134] тензор скоростей деформаций  $d_{ik}$  представляет собой второй характерный тензор 3-мерной гиперповерхности в 4-мерном многообразии.

В теории вложения условия интегрируемости так называемых дери-вационных уравнений приводят к уравнениям Гаусса

$${}^3R_{iksr} = {}^4R_{iksr} + (d_{is}d_{rk} - d_{ir}d_{ks}) \quad (3.5.34)$$

и к уравнениям Петерсона—Кодацци

$${}^4R_{ik\beta\tau} = {}^*\nabla_k d_{is} - {}^*\nabla_i d_{sk}. \quad (3.5.35)$$

Легко видеть, что эти уравнения совпадают в кинеметрической калибровке с проекциями тензора Римана—Кристоффеля (3.5.27) и (3.5.28). Из (3.5.34) следует, что 3-мерный тензор Римана—Кристоффеля складывается из двух частей: первая часть обусловлена кривизной вмещающего 4-мерного пространства-времени, спроецированного на 3-мерную гиперповерхность, а вторая часть связана с искривленностью самой гиперповерхности в 4-мерном многообразии. Уравнения Петерсона—Кодацци выражают через 4-мерный тензор Римана—Кристоффеля отклонения тензора  ${}^*\nabla_k d_{is}$  от симметрии по всем трем индексам.

Спроецированную на  $\tau$  левую часть уравнений Эйнштейна (3.5.24) в кинеметрической калибровке можно получить из уравнений Гаусса, а смешанные компоненты тензора Эйнштейна (3.5.25) — сверткой уравнений Петерсона—Кодацци.

### 3.6. Монадный метод в точных решениях уравнений Эйнштейна

Применим монадный метод для интерпретации эффектов в рассмотренных выше точных решениях уравнений Эйнштейна. Отметим, что три физически наиболее важных решения уравнений Эйнштейна: Шварцшильда, Керра и Фридмана — оказались тесно связанными



с проявлениями трех ключевых характеристик используемых систем отсчета, соответственно, вектора ускорения  $a_k$ , тензора угловой скорости вращения  $\omega_{ik}$  и тензора скоростей деформаций  $d_{ik}$ .

### 3.6.1. Монадный метод в метриках Фридмана

1. Начнем с рассмотрения метрик Фридмана, где, строго говоря, уже при постановке задачи их нахождения оказалось необходимым понятие системы отсчета. Действительно, постулируемые свойства однородности и изотропии (одинаковости по всем направлениям) пространства неявно предполагают глобальное расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на направление времени и ортогональное ему пространственное сечение, о свойствах которого идет речь. Исходя из изложенного выше, делаем вывод, что метрики Фридмана рассматриваются в нормальных системах отсчета, для описания которых следует использовать метод кинематрических инвариантов. Монадные составляющие метрического тензора находятся в виде

$$\begin{aligned} \tau_o &= \frac{1}{\tau^o} = a(x^o); & h_{11} &= \frac{1}{h^{11}} = a^2(x^o); \\ h_{22} &= \frac{1}{h^{22}} = a^2 b^2; & h_{33} &= \frac{1}{h^{33}} = a^2 b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

2. Как известно, в нормальных системах отсчета тензор угловой скорости вращения тождественно равен нулю. Условия однородности и изотропии пространственных сечений означают отсутствие выделенных направлений, что приводит к обращению в нуль вектора ускорения системы отсчета. Таким образом, метрики Фридмана описываются лишь тензором скоростей деформаций системы отсчета, компоненты которого и монадные производные от них сразу же легко находятся из вида метрики (2.3.1):

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \tau^o h_{ik,o} = \frac{\dot{a}}{a^2} h_{ik}; \quad d = -\frac{3\dot{a}}{a^2}; \quad (3.6.2)$$

$$\tilde{\nabla}_k d_{ij} = 0; \quad \partial_T d_{ik} = \frac{\ddot{a}}{a^3} h_{ik}; \quad \partial_T d = -\frac{3}{a^4} (\ddot{a} - 2\dot{a}^2). \quad (3.6.3)$$

3. Уравнения Эйнштейна для данных метрик существенно упрощаются:

$$\partial_T d - d_{ik} d^{ik} = \varkappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tau^\mu \tau^\nu - \Lambda; \quad (3.6.4)$$

$$-(\partial_T - d) d_{ik} + 2d_i^l d_{kl} + {}^3 R_{ik} = \varkappa \left( T_{ik} + \frac{1}{2} h_{ik} T \right) + h_{ik} \Lambda. \quad (3.6.5)$$

Подставляя в уравнения (3.6.5) значения из (3.6.2)–(3.6.3), сразу же находим важное свойство однородных и изотропных моделей (2.3.17), т. е. формулу, выражающую тензор Риччи пространственных сечений через компоненты их метрики.

4. В связи с наличием правой части выписанных уравнений Эйнштейна обратим внимание на определение монадным методом энергии (и импульса) материальных систем. Без использования монадного метода возникает неоднозначность, в частности, в определении плотности энергии материальных систем. Принято считать плотностью энергии времени-подобные компоненты тензора энергии-импульса, однако таких несколько:  $T_{oo}$ ,  $T^{oo}$ ,  $T_o^o$ . Какую из них считать плотностью энергии? В общем случае эти компоненты различны. Даже выбрав одну из них, проблему решить не удастся, так как возникает следующий вопрос, в какой координатной системе следует писать эту компоненту? Монадный метод позволяет однозначно решить этот вопрос. Плотностью энергии следует считать инвариантную величину  $T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$ , которую в нормальных системах отсчета следует писать в виде

$$\rho c^2 = T^{oo}\tau_o\tau_o = \frac{T^{oo}}{g^{oo}}. \quad (3.6.6)$$

При использовании метода хронометрических инвариантов плотность энергии должна записываться иначе:  $T_{oo}/g_{oo}$ .

5. В решениях Фридмана используется нормальная система отсчета, сопутствующая среднему распределению материи во Вселенной, т. е. в данном случае система отсчета реализуется не идеальными приборами, не влияющими на вид метрики, а материализована средой, заполняющей мир и определяющей метрику. Как уже отмечалось, это означает «вмороженность» среды в пространство. Постулируется, что пекулярными движениями материи можно пренебречь, и вся динамика материи описывается эволюцией пространственных сечений, т. е. тензором скоростей деформаций  $d_{ik}$ . При этом, переходя от (3.6.4) к проекции уравнения Эйнштейна  $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R = \varkappa T_{\mu\nu}$  на монаду, приходим к соотношению (без космологического члена)

$$\frac{1}{2}(d^2 - d_{ik}d^{ik}) - \frac{1}{2}{}^3R = \varkappa T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu, \quad (3.6.7)$$

которое можно трактовать как перезапись плотности физической энергии (справа) через геометрические термины (слева). Как уже отмечалось, первое слагаемое слева нужно трактовать как плотность кинетической энергии, а второе слагаемое (с 3-мерной скалярной кривизной) — как плотность потенциальной энергии материи.

6. В предыдущей главе при интерпретации эволюции трех космологических моделей фактически уже были использованы представления о физическом времени в формулах  $d\tau = a(x^o)dx^o$ . Без монадного метода возникает соблазн использовать в качестве физического времени либо времени-подобную координату  $x^o$ , либо какую-то другую функцию от  $x^o$ .

7. Космологическое красное смещение можно получить из скалярной компоненты уравнений изотропной геодезической (3.5.9), которая в метриках Фридмана в сопутствующей системе отсчета принимает вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = -d_{ik} l^i l^k. \quad (3.6.8)$$

При учете значений компонент тензора скоростей деформаций (3.6.2) и условия  $h_{ik} l^i l^k = 1$  это уравнение принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\dot{a}}{a} dx^o, \quad (3.6.9)$$

решением которого является

$$\varepsilon = \frac{C_o}{a(x^o)}. \quad (3.6.10)$$

Это выражение соответствует решению (2.3.78). Дальнейшие рассуждения, совпадающие с изложенными в гл. 2, приводят к ранее приведенной формуле (2.3.82) для космологического красного смещения.

### 3.6.2. Монадный метод в метрике Шварцшильда

1. Поскольку метрика Шварцшильда рассматривалась в диагональном виде (2.1.28), то оказывается безразличным, какой метод (хронометрических или кинеметрических инвариантов) использовать для анализа этой метрики в системе отсчета, непосредственно вводимой описанными выше способами. Выберем метод хронометрических инвариантов, тогда имеем монадные составляющие метрического тензора

$$\tau_o = \frac{1}{\tau^o} = e^{\nu/2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}; \quad h_{11} = \frac{1}{1 - 2GM/c^2 r}; \quad h_{22} = r^2; \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (3.6.11)$$

2. В хронометрически определенной из метрики Шварцшильда в координатах кривизн (2.1.28) системе отсчета из трех физико-геометрических тензоров отличным от нуля является лишь вектор ускорения,

имеющий компоненты:

$$a_1 = -\frac{GM}{c^2 r^2 (1 - 2GM/c^2 r)} \simeq -\frac{GM}{c^2 r^2} = -\frac{g}{c^2}; \quad a_2 = a_3 = 0, \quad (3.6.12)$$

где  $g = GM/r^2$  — ускорение свободного падения в ньютоновой теории гравитации. Таким образом, хронометрически определенная в координатах кривизн система отсчета характеризуется радиальным значением вектора ускорения, равного (с точностью до константы  $c^2$ ) ускорению свободного падения. Она описывает явления с точки зрения зависшей (неподвижной) системы отсчета. Напомним, что вектор  $a_\mu \neq 0$  означает, что система отсчета не является геодезической. Для нас, находящихся на поверхности Земли, негеодезичность нашей системы отсчета обеспечивается негравитационными силами реакции опоры. В этой интерпретации проявляется принцип эквивалентности тяготения и эффекта неинерциальности системы отсчета.

Ранее отмечалось, что при использовании монадного метода наблюдаемыми величинами следует считать скаляры, тогда как выражение (3.6.12) таковым не является, однако это легко исправить, сопоставив радиальной компоненте ускорения скаляр

$$a_i a_k h^{ik} = (a_1)^2 h^{11} = \frac{G^2 M^2}{c^4 r^4 (1 - 2GM/c^2 r)} \equiv a^2(1). \quad (3.6.13)$$

Заметим, что этот скаляр обращается в бесконечность на гравитационном радиусе источника искривления.

Раскладывая в ряд получившуюся наблюдаемую величину, имеем

$$c^2 a(1) \simeq -\frac{GM}{r^2} - \frac{G^2 M^2}{c^2 r^3}, \quad (3.6.14)$$

т. е. к ньютоновому ускорению свободного падения  $g$  добавляется эйнштейновское ускорение, обратно пропорциональное третьей степени расстояния. Отметим расхождение с выражением для полученной в «координатном представлении» эйнштейновской «силы», убывающей обратно пропорционально четвертой степени расстояния (радиальной координаты). Это расхождение связано именно с координатным характером ускорения в (2.1.58), которое необходимо пересчитать на инвариантное выражение согласно (3.6.13).

3. Монадный метод предназначен не для получения точных решений уравнений Эйнштейна, а лишь для интерпретации метрик и эффектов

в них. Тем не менее выпишем в монадном виде уравнения Эйнштейна для данной метрики:

$$\tilde{\nabla}_k a^k - a_k a^k = 0; \quad (3.6.15)$$

$$\frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_i a_k + \tilde{\nabla}_k a_i) - a_i a_k + {}^3R_{ik} = 0. \quad (3.6.16)$$

Отсюда сразу следует, что  ${}^3R = 0$ . Легко показать, что, не зная вида функции  $h_{11}(r)$ , из равенства нулю 3-мерной скалярной кривизны с помощью стандартных формул можно получить уравнение

$$r h'_{11} + h_{11}^2 - h_{11} = 0, \quad (3.6.17)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Из (3.6.17) получается решение

$$h_{11} = (1 - C_0/r)^{-1}, \quad (3.6.18)$$

определяющее метрику Шварцшильда.

4. Скалярная компонента уравнения изотропной геодезической (3.5.9) в метрике Шварцшильда имеет вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = a_1 l^1 = a(1) = \frac{GM}{c^2 r^2 \sqrt{1 - 2GM/c^2 r}}. \quad (3.6.19)$$

Учитывая, что для изотропной радиальной геодезической  $d\tau = dr / \sqrt{1 - 2GM/c^2 r}$ , находим для этого случая решение

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}}, \quad (3.6.20)$$

где  $\varepsilon_0$  — константа интегрирования.

5. Применим полученное решение для объяснения эффекта гравитационного красного смещения в метрике Шварцшильда. Пусть положение источника света характеризуется координатой  $r_1$ , а приемник находится в точке с координатой  $r_2 > r_1$  при тех же значениях угловых координат, тогда, согласно (3.6.20), имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r_1}} > \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r_2}}, \quad (3.6.21)$$

т. е. свет, приходящий в более удаленные точки, будет иметь меньшую энергию и, соответственно, частоту. Другими словами, спектр приходящего излучения будет сдвинут в красную сторону по сравнению со спектром аналогичного излучения, испущенного в точке наблюдения. Относительная разность частот определяется формулой

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \simeq - \frac{GM(r_2 - r_1)}{c^2 r_1 r_2}. \quad (3.6.22)$$

Конечно, при этом постулируется, что аналогично испущенные кванты в момент рождения всегда имеют одинаковую частоту.

В теории тяготения Ньютона красное смещение спектра в рассматриваемом приближении определяется той же величиной. Этот эффект можно трактовать как потерю энергии светом при преодолении ньютонова гравитационного притяжения, т. е.

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -mg\Delta h \simeq -\frac{\varepsilon_1 GM}{c^2} \frac{(r_2 - r_1)}{r^2} \quad (3.6.23)$$

для не слишком большого перепада высот, когда  $r \sim r_1 \sim r_2$ . Здесь введена эффективная масса фотона, согласно формулам  $\varepsilon_1 = mc^2 = h\nu$ .

Гравитационное красное смещение имеет место и в тех случаях, когда свет приходит на Землю от звезды, на поверхности которой

$$\frac{M_{\text{звезды}}}{R_{\text{звезды}}} > \frac{M_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}}}. \quad (3.6.24)$$

6. Для массивной частицы скалярная компонента уравнений геодезических линий (3.5.6) в метрике Шварцшильда принимает вид

$$\frac{dm}{d\tau} = a_1 p^1 = -\frac{\tau_{o,1}}{\tau_o} m \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.6.25)$$

Оно имеет смысл теоремы изменения кинетической энергии  $m$  тела в неинерциальной системе отсчета. Решение уравнения имеет вид

$$m = \frac{E}{c^2 \tau_o} = \frac{E}{c^2 \sqrt{1 - 2GM/c^2 r}}, \quad (3.6.26)$$

где константа интегрирования обозначена символом  $E/c^2$ . При  $r \gg r_g$  и скоростях  $v \ll c$ , используя соотношения:

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_o + \frac{m_o v^2}{2c^2} + \dots; \\ \frac{1}{\tau_o} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r}} = 1 + \frac{GM}{c^2 r} + O(r_g/r)^2; \\ E &\equiv E_o + m_o c^2; \quad E_o \ll m_o c^2, \end{aligned}$$

приходим в низшем приближении к известному закону сохранения энергии в ньютоновой механике

$$\frac{m_o v^2}{2} - \frac{GM m_o}{r} = E_o. \quad (3.6.27)$$

7. Компонента уравнений геодезических линий (3.5.7) для угла  $\theta$  опять приводит к закону сохранения плоскости Лапласа, а уравнение

для угла  $\varphi$  дает закон сохранения момента количества движения (в физическом времени), поскольку из

$$\frac{dp^3}{d\tau} + \frac{2p^3v^1}{r} = 0 \quad (3.6.28)$$

находится решение в виде

$$p^3 = \frac{\sigma m_o}{r^2} \rightarrow mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = m_o \sigma, \quad (3.6.29)$$

где постоянная интегрирования обозначена символом  $\sigma m_o$ . Вместо радиальной компоненты уравнений геодезических линий (3.5.7) опять следует воспользоваться выражением для квадрата интервала, только теперь в монадном виде.

8. Очевидно, метрику Шварцшильда можно записать в различных координатных системах. В частности, преобразованиями координат вида (3.2.17), не входящими в выделенные преобразования (3.2.15) и (3.2.16) метода хронометрических инвариантов, метрику Шварцшильда можно привести к виду

$$ds^2 = (dx'^o)^2 - \frac{(dr')^2}{[(3/2r_g)(r' - x'^o)]^{2/3}} - \left(\frac{3}{2}(r' - x'^o)\right)^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.6.30)$$

Отсюда видно, что система отсчета, образованная из метрики в данных координатах хронометрическим образом, является свободно падающей, поскольку в ней  $*a_i = 0$ , однако в ней отличен от нуля тензор скоростей деформаций ( $*d_{ik} \neq 0$ ). Легко также видеть, что в данной системе отсчета отсутствует особенность на гравитационном радиусе.

### 3.6.3. Монадный метод в метрике Керра

Для метрики Керра, записанной в одной и той же координатной системе Бойера—Линдквиста, можно определить хронометрическим и кинеметрическим способом две различные системы отсчета. Рассмотрим их отдельно.

1. В хронометрическом способе определенной системе отсчета составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\tau^\mu = \frac{g_o^\mu}{\sqrt{1 - r_g r / \rho^2}}; \quad \tau_\mu = \left\{ \sqrt{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}; 0; 0; \frac{r_g r a \sin^2 \theta}{\rho^2 \sqrt{1 - r_g r / \rho^2}} \right\};$$

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 \Delta_1}{\rho^2 - r_g r} \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta_1 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (3.6.31)$$

где использованы обозначения:  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ;  $\Delta_1 = r^2 + a^2 - r_g r$ .

По формулам (3.3.16) находим компоненты вектора ускорения

$$a_1 = \frac{r_g(\rho^2 - 2r^2)}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)}; \quad a_2 = \frac{r_g(\rho^2 - 2r^2) \sin 2\theta}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)}; \quad a_3 = 0, \quad (3.6.32)$$

и компоненты тензора угловой скорости вращения системы отсчета:

$$\omega_{12} = 0; \quad \omega_{13} = -\frac{r_g a(\rho^2 - 2r^2) \sin^2 \theta}{2\rho(\rho^2 - r_g r)^{3/2}}; \quad \omega_{23} = -\frac{r_g r a \Delta_1 \sin 2\theta}{2\rho(\rho^2 - r_g r)^{3/2}}. \quad (3.6.33)$$

Тензор скоростей деформаций тождественно равен нулю  $d_{ik} = 0$ .

2. В кинематрическом способе определенной системе отсчета находим следующие значения составляющих метрического тензора:

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^0 \sqrt{\rho^2 \Delta_1}}{\sqrt{\Delta_2}}; \quad \tau^\mu = \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\rho^2 \Delta_1}}; \quad 0; \quad 0; \quad \frac{r_g r a}{\sqrt{\rho^2 \Delta_1 \Delta_2}} \right\};$$

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} \rho^2/\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \end{pmatrix}, \quad (3.6.34)$$

где  $\Delta_2 = \rho^2(r^2 + a^2) + r_g r a^2 \sin^2 \theta$ .

Отсюда получаем значения физико-геометрических тензоров:

$$a_1 = \frac{r_g}{2\rho^2 \Delta_1 \Delta_2} [(r^2 + a^2)^2 (a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 2r^3 r_g a^2 \sin^2 \theta];$$

$$a_2 = \frac{a^2 \sin 2\theta r_g r (r^2 + a^2)}{2\rho^2 \Delta_2}; \quad a_3 = 0. \quad (3.6.35)$$

$$d_{13} = -r_g a [2r^2(r^2 + a^2) + \rho^2(r^2 - a^2)] \frac{\sin^2 \theta}{2\rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta_1 \Delta_2}};$$

$$d_{23} = \frac{r_g r a^3 \sin^3 \theta \cos \theta \sqrt{\Delta_1}}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta_2}}; \quad d_{11} = d_{12} = d_{22} = d_{33} = 0. \quad (3.6.36)$$

Тензор угловой скорости вращения, очевидно, равен нулю. Легко видеть, что эти значения физико-геометрических тензоров существенно отличаются от аналогичных выражений в хронометрической калибровке.



3. Запишем уравнения геодезических линий в метрике Керра в хронометрической калибровке монадного метода. В самом общем виде скалярная составляющая уравнения (3.5.7) записывается следующим образом

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{r_g[(\rho^2 - 2r^2)p^1 + ra^2 \sin 2\theta p^2]}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)}. \quad (3.6.37)$$

Пространственное уравнение, соответствующее углу  $\theta$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp^2}{d\tau} + \frac{\sin 2\theta}{2\rho^2} \left( \frac{a^2}{\Delta_1} p^1 v^1 - a^2 p^2 v^2 - \frac{[\rho^2(\rho^2 - r_g r) + r_g r a^2 \sin^2 \theta] \Delta_1}{(\rho^2 - r_g r)^2} p^3 v^3 \right) + \\ + \frac{2r}{\rho^2} p^1 v^2 + \frac{r_g r a \Delta_1 \sin 2\theta}{\rho^3 (\rho^2 - r_g r)^{3/2}} p^3 - \frac{m r_g r a^2 \sin 2\theta}{2\rho^4 (\rho^2 - r_g r)} = 0. \end{aligned} \quad (3.6.38)$$

Другие две компоненты пространственно-подобных уравнений в самом общем виде записываются громоздко (см. [29, с. 100]).

4. Ограничимся случаем движения частицы в экваториальной «плоскости», т. е. когда в начальный момент сама частица и ее скорость характеризуются значениями:  $\theta = \pi/2$ ,  $v^2 = d\theta/d\tau = 0$ . Подставляя эти значения в (3.6.38), сразу же находим, что вся траектория тела лежит в экваториальной «плоскости» (в плоскости Лапласа).

Скалярная составляющая уравнений геодезических линий (3.6.37) приводит в точности к тому же решению (3.6.26), что и в метрике Шварцшильда.

Уравнение геодезической линии для угла  $\varphi$  в данном случае существенно упрощается. Его удастся проинтегрировать отдельно от других уравнений, т. е. решение оказывается проще приведенных выше в координатном виде (см. разд. 2.2). Выбирая константы  $E/c^2$  и  $\sigma m_o$ , соответствующие при  $a = 0$  случаю метрики Шварцшильда (см. (3.6.26) и (3.6.29)), приходим к обобщению закона сохранения момента количества движения:

$$\left( r^2 + \frac{a^2}{1 - r_g/r} \right) m \frac{d\varphi}{d\tau} = \sigma m_o \pm \frac{E a r_g}{c^2 r (1 - r_g/r)}. \quad (3.6.39)$$

При этом знак у второго члена справа зависит от соотношения направлений вращения источника и пробного тела. Знак плюс соответствует случаю, когда направления  $a$  и  $\sigma$  совпадают.

5. В гл. 2 был рассмотрен ряд эффектов в метрике Керра, в частности, эффект Мицкевича — дрейф точки встречи двух пробных тел, вращающихся навстречу друг другу по круговым орбитам в экваториальной плоскости вокруг источника. Были вычислены (координатные) периоды

обращения двух тел (см. (2.2.34)). На основе приведенных выше формул можно рассчитать периоды обращения тел в хронометрической и кинеметрической (полученных из координатных систем Бойера—Линдквиста) системах отсчета. Так, в *хронометрической системе отсчета* имеем выражения для периодов:

$$T_{\pm} = \frac{2\pi r}{c\sqrt{(r_g/2)(r-r_g)}} \left( (r-r_g) \pm a\sqrt{\frac{r_g}{2r}} \right), \quad (3.6.40)$$

где плюс соответствует частице, движущейся в направлении вращения источника, а минус — частице, вращающейся в противоположном направлении. Отсюда следует другое, по сравнению с (2.2.36), значение угла смещения точки встречи:

$$\delta\varphi = \frac{a\pi}{r} \frac{\sqrt{r_g/2r}}{(1-r_g/r)}. \quad (3.6.41)$$

В *кинеметрической системе отсчета* имеем значения для периодов вращения:

$$T_{\pm} = \frac{2\pi}{c} \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - r_g r}}{\sqrt{(r_g/2)[r + (a^2/r^2)(r + r_g)]}} \left( r \pm a\sqrt{\frac{r_g}{2r}} \right). \quad (3.6.42)$$

Легко видеть, что угол смещения точки встречи двух тел в кинеметрической системе отсчета совпадает с координатным значением, найденным в (2.2.36).

### 3.6.4. Монадный метод в метрике Геделя и ее обобщениях

1. В дополнение к трем рассмотренным выше точным решениям уравнений Эйнштейна выпишем еще одно решение — **метрику Геделя**, описывающую однородную анизотропную космологическую модель:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 + \frac{1}{2}e^{2\Lambda x} dy^2 - dz^2 - 2e^{\Lambda x} dy dx^0. \quad (3.6.43)$$

Эта метрика является решением уравнений Эйнштейна с правой частью при наличии космологического члена

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\mu}R = \varkappa(T_{\nu}^{\mu} + \Lambda g_{\nu}^{\mu}), \quad (3.6.44)$$

где в тензоре энергии-импульса материи  $p = 0$ ,  $\rho \neq 0$ . Наличие космологического члена принципиально важно: без него данное решение теряет смысл.

Важным свойством этой метрики является тот факт, что через каждую точку пространства-времени проходит, по крайней мере, одна времени-подобная замкнутая мировая линия.

Данная метрика записана в системе отсчета, сопутствующей материи, когда  $u^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$ . Легко подсчитать значения физико-геометрических тензоров в хронометрической по отношению к используемым координатам в (3.6.43) системе отсчета:

$$a_i = 0; \quad d_{ik} = 0; \quad \omega_{12} = \frac{\Lambda}{2} e^{\Lambda x}; \quad \omega_{13} = \omega_{23} = 0, \quad (3.6.45)$$

т. е. отсутствуют деформации и ускорение, однако в каждой точке отлична от нуля угловая скорость вращения системы отсчета вокруг оси, параллельной  $x^2 = y$ . Модуль угловой скорости вращения находится в виде

$$\omega^2 = 4\pi G\rho = \frac{\Lambda^2}{2}. \quad (3.6.46)$$

Эта метрика демонстрирует качественно новый вид вращения, отличный от твердотельного случая, обычно рассматриваемого в классической механике.

Метрикой (3.6.43) описывается также случай, когда давление отлично от нуля и связано с плотностью соотношением  $p = \rho$ .

2. Простейшее **обобщение метрики Геделя** имеет вид [89]

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - ke^{2\Lambda x} dy^2 - dz^2 - 2e^{\Lambda x} dy dx^0, \quad (3.6.47)$$

где коэффициент  $k$ , названный *параметром причинности*, лежит в пределах  $-1 < k < \infty$ . (Для метрики Геделя  $k = -1/2$ .) Данное название параметра обусловлено тем, что при  $k = 0$  радиус замкнутых времени-подобных мировых линий обращается в нуль. В этом и других более общих случаях найден вид тензора энергии-импульса внешней материи.

3. **Метрика Кречета** [89] имеет вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - a^2(x^0)(dx^2 + ke^{2\Lambda x} dy^2 + dz^2) - 2e^{\Lambda x} a(x^0) dy dx^0, \quad (3.6.48)$$

где  $a(x^0)$  — некоторая функция времени-подобной координаты. Она представляет собой еще более существенное обобщение метрик Геделя (3.6.43) и (3.6.47), характеризуемое тем, что в ней отличны от нуля все физико-геометрические тензоры в хронометрической системе отсчета:

$$a_i = (0, -\dot{a}e^{\Lambda x}, 0); \quad \omega_{12} = \frac{\Lambda a}{2}; \quad \omega_{13} = \omega_{23} = 0; \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{\Lambda}{2\sqrt{k+1}}; \quad (3.6.49)$$

$$d_{ik} = \begin{pmatrix} a\dot{a} & 0 & 0 \\ 0 & a\dot{a}(1+k)e^{2\Lambda x} & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{a} \end{pmatrix} \rightarrow d = \frac{3\dot{a}}{a}. \quad (3.6.50)$$

Характерно, что в этих моделях тензор сдвига  $\sigma_{ik} = 0$ .

4. Наконец, **обобщенная метрика Кречета** зависит от двух функций от  $x^0$ :

$$ds^2 = (dx^0)^2 - a^2(x^0)(dx^2 + ke^{2\Lambda x}dy^2 + dz^2) - 2e^{\Lambda x}b(x^0)dydx^0, \quad (3.6.51)$$

где новая функция  $b(x^0) \neq a(x^0)$ . Показано, что далеко не всякий вид материи приводит к метрике такого вида.

В этой метрике векторы ускорения и угловой скорости вращения выражаются формулами (3.6.49) с заменой функции  $a(x^0)$  на  $b(x^0)$ , а скаляры представляются в виде:

$$d = \frac{2\dot{a}}{a} + \frac{ka\dot{a} + b\dot{b}}{ka^2 + b^2}; \quad \sigma = \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{(b\dot{a} - a\dot{b})}{a\sqrt{ka^2 + b^2}}; \quad \omega = \frac{b\Lambda}{2a\sqrt{ka^2 + b^2}}. \quad (3.6.52)$$

### 3.7. Некоторые выводы и замечания

1. Для того чтобы ОТО соответствовала названию, данному Эйнштейном, ее *необходимо дополнить математическим аппаратом описания систем отсчета*. Сами системы отсчета представляют собой дополнительную к метрике структуру (вектор 4-скорости  $\tau^\mu$  и производные от него величины), характеризующую движение наблюдателя. Проецирование геометрических и физических величин на 4-скорость наблюдателя и ортогональные ей пространственные направления позволяют найти физически интерпретируемые скалярные величины, не зависящие от выбора координатной системы.

2. Координатные системы и системы отсчета являются принципиально различными понятиями, в общем случае *никак не связанными друг с другом*. Однако методы хронометрических и кинеметрических инвариантов убеждают в плодотворности использования специальных классов координатных систем, привязанных к конгруэнции линий системы отсчета. В этих случаях связь между двумя понятиями имеет специально оговоренный — условный — характер.

3. В работе [29] были проанализированы *переходы между парами систем отсчета*, заданными хронометрическим или кинеметрическим образом. Там же приведены формулы, соответствующие известным в специальной теории относительности преобразованиям Лоренца.

4. Методом хронометрических инвариантов описываются *произвольные системы отсчета*, в которых могут быть отличными от нуля все три физико-геометрических тензора. Выделим частные виды систем отсчета, в которых равен нулю один или два физико-геометрических тензора.

- 1) В *нормальных системах отсчета*, описываемых методом кинематрических инвариантов, равен нулю тензор угловой скорости вращения ( $\omega_{\mu\nu} = 0$ ). Такие системы отсчета можно определить в любой метрике.
- 2) *Геодезические системы отсчета* задаются геодезической конгруэнцией времени-подобных мировых линий. В них  $a_\mu = 0$ . Заметим, что не во всяком пространстве-времени возможно задание геодезической системы отсчета в конечной 4-мерной области, однако такую систему отсчета всегда можно определить в окрестности 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности. За ее пределами в общем случае геодезические линии могут пересекаться.
- 3) *Синхронными системами отсчета* называются нормальные геодезические системы отсчета. Они характеризуются условиями:  $\omega_{\mu\nu} = 0$ ;  $a_\mu = 0$ . Для них справедливо сделанное выше замечание о возможности задания геодезических систем отсчета.
- 4) В *киллинговых системах отсчета*, определенных ниже (в разд. 4.3), равен нулю тензор скоростей деформаций ( $d_{\mu\nu} = 0$ ).
5. В нашу задачу не входило подробное рассмотрение применения монадного метода для описания и интерпретации многочисленных реалистических или мыслимых эффектов ОТО. (Ряд таких вычислений можно найти в работах, упомянутых в [29].) В частности там приведены вычисления эффекта М. Ф. Широкова: сравнения периодов ортогональных колебания пробных тел в спутниках без сноса как в метрике Шварцшильда, так и в метрике Керра, а также эффектов колебания маятников в метрике Керра, вычисления эффекта Мицкевича и эффекта Шиффа по изменению ориентации оси вращения гироскопа, вращающегося вокруг источника метрики Керра. Подробному рассмотрению вопросов применения методов описания систем отсчета можно было бы посвятить отдельную книгу.

6. Особый интерес представляют системы отсчета, связанные с конкретными физическими обстоятельствами, в частности, ассоциированные с материей в правой части уравнений Эйнштейна. Таковыми, например, являются сопутствующие материи системы отсчета, используемые при рассмотрении однородных изотропных космологических моделей (решений Фридмана).

# Четырехмерная картина мира



Общепринятая картина физического мира опирается на представления о фоновом 4-мерном искривленном пространстве-времени, в которое, согласно ОТО Эйнштейна, погружены материальные объекты, искривляющие пространство-время. К этому нужно добавить, что на фоне пространства-времени определены также бозонные физические поля, переносящие все виды физических взаимодействий, кроме геометрического гравитационного. Таким образом, построенная на основе 4-мерной ОТО картина мира определяется тремя категориями: искривленным пространством-временем, частицами (материальными объектами) и бозонными физическими полями.

Данная часть посвящена описанию свойств трех названных категорий. В гл. 4 рассмотрены наиболее важные свойства категории искривленного пространства-времени (римановой геометрии), не требующие его расщепления на сечения меньших размерностей. В гл. 5 охарактеризованы способы описания электромагнитного поля в искривленном 4-мерном пространстве-времени и приведены соответствующие им переформулировки ОТО. В отдельную гл. 6 выделены вопросы расщепления пространства-времени, т. е. выделения отдельных размерностей. Этот материал обобщает и конкретизирует монадный метод задания систем отсчета, изложенный в гл. 3. В последней, 7-й главе этой части рассмотрено описание фермионных полей (частиц) в рамках 4-мерного искривленного пространства-времени ОТО.

В дальнейшем будет показано, что представленная в этой части 4-мерная картина мира является лишь усеченным (приближенным) наброском более совершенного геометрического миропонимания, которое можно построить, развивая и обобщая геометрические идеи ОТО.

Изложенный здесь материал будет существенно использован как при построении более полного геометрического миропонимания, так и при обсуждении так называемых парадигмальных проблем ОТО.

---

# Искривленное (риманово) пространство-время



Рассмотрение в рамках ОТО категории искривленного пространства-времени отдельно от категории помещаемой в него материи в виде частиц (тел) и полей переносчиков физических взаимодействий характерно для редукционистского подхода к реальности, в рамках которого частям единого целого придается самостоятельный статус.

В этой главе более подробно рассмотрены основные понятия и закономерности римановой геометрии, составляющей математическое основание ОТО<sup>1)</sup>, и, прежде всего, ключевое понятие римановой геометрии — мероопределение. Далее предлагается взглянуть на риманову геометрию с позиций более общих дифференциальных геометрий Схоутена, некоторые из которых развивались с целью геометризации электромагнитного поля в рамках четырех измерений. Для этого использовано важное понятие параллельного переноса.

В данной главе четыре координаты пространства-времени рассматриваются симметричным образом, а материал излагается примерно в том же плане, что и в гл. 1: обсуждаются метрический тензор, коэффициенты связности, обобщающие символы Кристоффеля, операторы дифференцирования, тензор кривизны.

При наличии векторных полей в римановой геометрии возникают новые операторы дифференцирования — производные Ли, через которые более корректно определяются симметрии римановых пространств, в частности сферическая или аксиальная симметрии, соответствующие метрикам Шварцшильда, Керра и другим точным решениям уравнений Эйнштейна.

Большое значение для понимания возможностей римановой геометрии имеет алгебраический анализ матрицы из компонент тензора Римана—Кристоффеля, произведенный А. З. Петровым. В этой главе изложены основные положения алгебраической классификации пространств

---

<sup>1)</sup>Более подробное рассмотрение ряда вопросов, затронутых в этой главе, можно найти в монографиях: [107, 129, 134, 190].

---

Эйнштейна, которые сыграли важную роль в процессе поиска точных решений уравнений Эйнштейна.

Здесь же охарактеризованы некоторые виды соответствий между искривленными пространственно-временными многообразиями, а именно, конформные и геодезические соответствия.

## 4.1. Метрика пространства-времени и ее обобщения

Ключевым понятием классической геометрии является числовая функция  $ds$  — метрика, задаваемая для двух близких точек  $x_{(1)}$  и  $x_{(2)} = x_{(1)} + dx$  (между двумя физическими событиями) в пространстве-времени.

### 4.1.1. Концептуальные вопросы введения метрики

В дополнение к материалу разд. 1.2 более подробно остановимся на концептуальных вопросах, связанных с понятием метрики.

1. Прежде всего, следует напомнить, что уже в мемуаре Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» ставился вопрос о «внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». По этому поводу Риман писал, «что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное» [136, с. 32]. Завершается это обсуждение словами: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день».

На этот момент мемуара Римана обратил внимание А. Эйнштейн, писавший: «Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами. Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики» [194, с. 181]. Это еще с одной стороны оправдывает название этой книги «Геометрофизика».

В настоящий момент можно более определенно сказать о причине возникновения метрических отношений. В классической теории (геометрии и физике) понятие метрики в конце концов обусловлено счетом осуществившихся событий, тогда как аналог метрики в микромире действительно связан с физическими взаимодействиями.



2. Другой принципиально важный вопрос, также обсуждавшийся в мемуаре Римана, связан с обоснованием квадратичного характера метрики. Поясним это, введя для двух близких точек, отличающихся малыми значениями координат  $x_{(2)}^\mu - x_{(1)}^\mu = dx^\mu$ , скалярную двухточечную функцию  $I(x, x + dx)$ , часто называемую *мировой функцией*. Разложим эту функцию в бесконечный ряд по разностям координат:

$$I(x, x + dx) = I(x, x) + A_\mu(x)dx^\mu + g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + B_{\mu\nu\sigma}(x)dx^\mu dx^\nu dx^\sigma + \dots, \quad (4.1.1)$$

где зависящие от координат коэффициенты разложения определяют метрику. В геометрии на мировую функцию накладывается ряд требований. Первое из них состоит в том, что функция обращается в нуль, если ее аргументы совпадают:

$$I(x_{(1)}, x_{(2)} = x_{(1)}) = 0. \quad (4.1.2)$$

Это требование исключает нулевой член разложения в (4.1.1).

Другое важное требование состоит в симметрии аргументов мировой функции:

$$I(x_{(1)}, x_{(2)}) = I(x_{(2)}, x_{(1)}). \quad (4.1.3)$$

Это требование исключает все нечетные слагаемые в (4.1.1) и приводит к тому, что разложение следует брать в виде

$$I(x, x + dx) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \tilde{g}_{\mu\nu\sigma\lambda}dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\lambda + \dots \quad (4.1.4)$$

В римановой геометрии теория строится лишь на первом слагаемом из этого разложения, т. е. постулируется

$$I(x, x + dx) \equiv ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (4.1.5)$$

т. е. элемент длины между двумя близкими точками задается корнем квадратным из квадратичной формы

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \equiv F(x^\alpha, dx^\beta). \quad (4.1.6)$$

Однако имеется цикл работ Д. Г. Павлова (см. [122]), где используются возможности геометрий типа Бервальда—Моора, в которых метрика задается вторым слагаемым справа в (4.1.4).

3. Как уже отмечалось в разд. 1.2, для определения скалярной метрической функции (интервала) между двумя точками существенна лишь симметричная часть метрического тензора, тем не менее Эйнштейн в последние годы жизни анализировал физические возможности метрической теории с несимметричным метрическим тензором  $g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{<\mu\nu>}$ . Назовем несколько особенностей такой теории.

- 1) Симметричная и антисимметричная части метрического тензора преобразуются независимо друг от друга. Это послужило основанием для попыток связать симметричную и антисимметричную части с различными физическими понятиями: симметричную часть — с метрическим тензором ОТО, а антисимметричную часть с тензором электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ .
- 2) В такой теории ко- и контравариантные тензоры однозначно не связаны друг с другом, так как в общем случае теперь  $A_\mu g^{\mu\nu} \neq A_\mu g^{\nu\mu}$ . При поднятии и опускании индексов необходимо специально оговаривать, каким образом это делается.
- 3) В общем случае коэффициенты связности (обобщенные символы Кристоффеля), вводимые через компоненты метрического тензора, уже не будут симметричными по паре индексов, что соответствует переходу к пространствам с кручением (см. разд. 4.2).

4. Имеется серия работ по исследованию так называемых *биметрических теорий гравитации*, в которых используется не одна метрика, а две, т. е. два метрических тензора  $g_{\mu\nu}$  и  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . Наиболее известна биметрическая теория Н. Розена, где вторая метрика вводится постулативно. Отличительная особенность подобных теорий заключается в том, что разность символов Кристоффеля, образованных из соответствующих метрик, является тензорной величиной, которую предлагается использовать для описания «силовой гравитации». Чаще всего в качестве второй метрики выбирается метрика пространства-времени Минковского.

Серьезные возражения против таких теорий связаны с неясностью физического смысла и с проблемой наблюдаемости второй метрики.

5. Неоднократно поднимался вопрос о возможности обоснования сигнатуры  $(+ - - -)$  и размерности  $n = 4$  классического пространства-времени, однако в рамках общей теории относительности эти вопросы вряд ли возможно решить. Продвинуться в их решении удастся лишь в рамках геометрий большей размерности, что будет рассмотрено в третьей и четвертой частях книги.

6. Наконец, упомянем еще об одной важной проблеме, которая поднималась уже в мемуаре Римана, — о виде метрических отношений в микромире. Риман писал, что «вопрос о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежит к числу праздных (...) Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение,

если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления» [136, с. 32]. Этот вопрос более подробно рассмотрен в третьей и четвертой частях данной книги.

### 4.1.2. Геометрия Финслера

1. В римановой геометрии с мероопределением (1.2.1), как и в называвшейся в мемуаре Римана возможностью построения геометрий с элементом длины в виде корня четвертой степени из формы четвертого порядка, метрика зависела лишь от координат, однако можно построить более общие виды геометрий, где метрика  $F(x^\alpha, y^\beta)$  (скалярная метрическая функция, заменяющая мировую функцию  $I(x^\alpha)$ ) зависит также от некоего векторного аргумента  $y^\beta$ , в качестве которого чаще всего рассматривают скорость частицы  $u^\beta$  или производную  $y^\beta = dx^\beta/d\tau$  от координат по некому параметру  $\tau$  вдоль траектории частицы. Такая геометрия названа *геометрией Финслера*<sup>1)</sup>, положившего начало ее исследований в своей диссертации 1918 г.

Легко понять, что аргумент  $y^\beta$  приводит к анизотропии (зависимости от направления) в мероопределении в каждой точке многообразия.

2. В качестве физически важного примера, приводящего к финслеровой геометрии, назовем случай движения электрически заряженной частицы с зарядом  $q$  и массой  $m$  в электромагнитном поле, описываемом векторным потенциалом  $A_\beta(x)$ . Как известно, лагранжиан такой частицы представляется в виде

$$L(x^\alpha, u^\beta) = \sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta} + \frac{q}{mc^2} A_\beta u^\beta. \quad (4.1.7)$$

3. Из обширного множества возможностей мероопределения в финслеровых геометриях выделяется случай, когда функция  $F(x, y)$  является *однородной функцией первой степени по векторам  $y^\beta$* , т. е. когда

$$F(x, y) \equiv F(x^\alpha, ky^\beta) = kF(x^\alpha, y^\beta) \quad (4.1.8)$$

при любом  $k > 0$ . Легко видеть, что в приведенном примере выполняется это условие.

4. В геометрии Финслера определяются компоненты ковариантного *финслерова метрического тензора* по формуле

$$f_{\mu\nu}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^\mu \partial y^\nu}. \quad (4.1.9)$$

<sup>1)</sup>В развитие геометрии Финслера внесли значительный вклад Д. Синг, Д. Тейлор, Л. Бервальд. Особенно существенными были работы Э. Картана. В нашей стране эта геометрия развивалась В. В. Вагнером, Б. Л. Лаптевым, П. К. Рашевским, А. Е. Левашевым, Г. С. Асановым и рядом других авторов. Довольно полную библиографию по этому вопросу можно найти в [4] и [144]. Другой вариант финслеровых геометрий развивается Д. Г. Павловым [122]. Он существенно отличается от первого, принимая к исследованиям многоточечных геометрий В. Я. Скоробогатко [150].

Поскольку дифференцирование по векторам является векторной операцией, то нетрудно убедиться, что так определенная величина является тензором при допустимых координатных преобразованиях.

Из теорем Эйлера об однородных функциях следует

$$f_{\mu\nu}y^\mu y^\nu = F^2(x, y). \quad (4.1.10)$$

Очевидно, финслерово пространство является римановым, если выполняется условие

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial y^\sigma} = 0. \quad (4.1.11)$$

5. Контравариантному вектору  $y^\beta$  можно соотнести ковариантный вектор, который, согласно (4.1.10), можно представить в виде

$$y_\sigma = f_{\sigma\beta}y^\beta = F(x, y)\frac{\partial F(x, y)}{\partial y^\sigma}. \quad (4.1.12)$$

Выражая обратно  $y^\beta$  через  $y_\sigma$  и подставляя в  $F(x, y)$ , получаем функцию

$$H(x^\alpha, y_\sigma) = F(x^\alpha, y^\beta(y_\sigma)), \quad (4.1.13)$$

которая позволяет построить контравариантные компоненты финслерова метрического тензора

$$f^{\mu\nu}(x^\alpha, y_\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2(x^\alpha, y_\sigma)}{\partial y_\mu \partial y_\nu}. \quad (4.1.14)$$

6. В финслеровой геометрии вводятся уравнения геодезических линий, свои коэффициенты связности, также зависящие от вектора  $y^\beta$ , компоненты тензора кривизны и другие величины и соотношения, которые при отсутствии зависимости финслеровой метрики от вектора  $y^\beta$  превращаются в соответствующие выражения римановой геометрии. Исследования математического аппарата финслеровой геометрии и ее возможных физических приложений продолжаются в работах ряда авторов (см., например, [4, 5, 144]).

7. Отметим, что в настоящее время нет веских экспериментальных оснований для перехода к финслеровым геометриям, однако ожидается, что исследование такой возможности может оказаться полезным в будущем для описания анизотропии меропределения в окрестности некоторых точек.

## 4.2. Параллельный перенос и геометрии Схоутена

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с сопоставлениями свойств пространственно-временного многообразия в близких точках, что основывается на процедуре параллельного переноса смещений или тензорных величин. Эта процедура позволяет под новым углом зрения взглянуть на понятие ковариантного дифференцирования.

### 4.2.1. Геометрии Схоутена

1. В самом общем случае параллельный перенос малого смещения  $AB$  с компонентами  $\delta x^\mu$  из точки  $A$  в близкую точку  $C$  (вдоль малого смещения  $AC$  с компонентами  $dx^\mu$ ) приводит к новому смещению  $CD$  с компонентами (см. рис. 4.1)

$$\delta \tilde{x}^\mu = \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (4.2.1)$$

где  $K_{\alpha\beta}^\mu$  — коэффициенты связности, зависящие от координат.

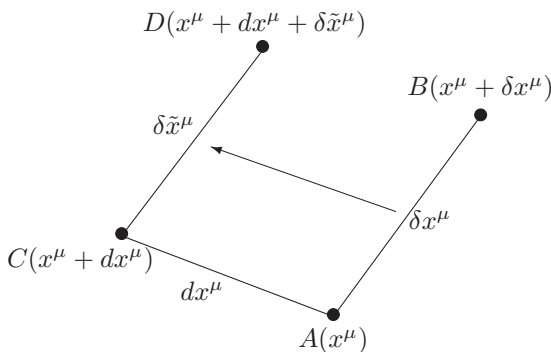


Рис. 4.1. Параллельный перенос одного малого смещения вдоль другого

2. Определим длину результирующего смещения  $CD$

$$(ds^2)_{(CD)} = g_{\mu\nu}(C) \delta \tilde{x}^\mu \delta \tilde{x}^\nu. \quad (4.2.2)$$

Используя определение (4.2.1) и разлагая  $g_{\mu\nu}(C)$  в ряд Тейлора (с точностью до первого порядка малости включительно), имеем

$$\begin{aligned} (ds^2)_{(CD)} &= \left( g_{\mu\nu}(A) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \right) \left( \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta \right) \left( \delta x^\nu - K_{\lambda\rho}^\nu dx^\lambda \delta x^\rho \right) \simeq \\ &\simeq (ds^2)_{(AB)} + \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - K_{\sigma\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - K_{\sigma\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} \right) dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu \equiv \\ &\equiv (ds^2)_{(AB)} + g_{\mu\nu|\sigma} dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu, \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

где  $g_{\mu\nu|\sigma}$  обозначает ковариантную производную метрического тензора относительно обобщенных коэффициентов связности  $K_{\alpha\beta}^\lambda$ , заменяющих в (4.2.3) символы Кристоффеля. Таким образом, *обобщенная ковариантная производная от метрического тензора определяет изменение*

длины смещения при параллельном переносе:

$$(ds^2)_{(CD)} - (ds^2)_{(AB)} = g_{\mu\nu|\sigma} dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu \equiv Q_{\mu\nu\sigma} \delta x^\mu \delta x^\nu dx^\sigma. \quad (4.2.4)$$

3. Рассмотрим частный случай параллельного переноса (4.2.3), при котором сохраняется длина переносимого смещения, т. е. при выполнении условия

$$g_{\mu\nu|\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - K_{\sigma\mu,\nu} - K_{\sigma\nu,\mu} = 0. \quad (4.2.5)$$

Добавляя к этому соотношению еще два с соответствующим образом переставленными индексами и знаками, приходим к выражению, связывающему коэффициенты связности  $K_{\mu\nu,\sigma}$  и символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} [(K_{\nu\mu,\sigma} + K_{\mu\nu,\sigma}) + (K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\sigma\nu,\mu}) + (K_{\mu\sigma,\nu} - K_{\sigma\mu,\nu})]. \quad (4.2.6)$$

Из (4.2.6) следует, что обобщенные коэффициенты связности совпадают с символами Кристоффеля, если они симметричны по нижней паре индексов.

4. Обсудим геометрический смысл антисимметричной части обобщенных коэффициентов связности. Для этого, внося соответствующие изменения в (4.2.1), параллельно перенесем малое смещение AC вдоль малого смещения AB согласно формуле

$$d\tilde{x}^\mu = dx^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha dx^\beta. \quad (4.2.7)$$

В итоге получим новое смещение  $BD'$ , где точка  $D'$  имеет координаты

$$D'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu + d\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu + dx^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha dx^\beta, \quad (4.2.8)$$

где  $x^\mu$  — координаты точки A (см. рис. 4.2). Учитывая, что координаты точки  $D$ , полученной в результате первого переноса, имеют значения:

$$D^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta\tilde{x}^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (4.2.9)$$

находим компоненты малого смещения

$$D^\mu - D'^\mu = (K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) dx^\beta \delta x^\alpha \equiv 2S_{\alpha\beta}^\mu dx^\beta \delta x^\alpha, \quad (4.2.10)$$

где, согласно строгой теореме частного, величина

$$S_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} (K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) \quad (4.2.11)$$

является тензором. Она называется *тензором кручения*. Как показано на рисунке 4.2, *тензор кручения ответствен за нарушение правила*

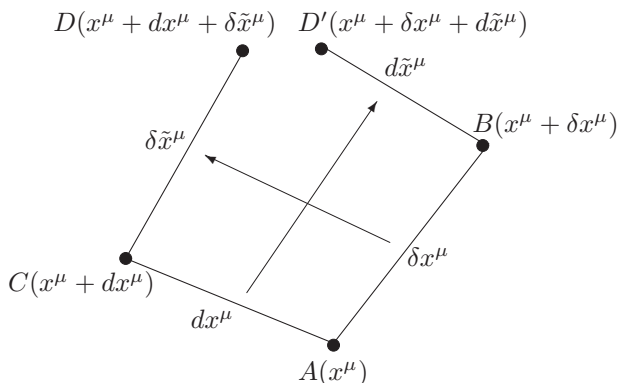


Рис. 4.2. Геометрический смысл тензора кручения

параллелограмма (во втором приближении по малым компонентам смещений).

5. В конце 20-х годов XX в. Я. А. Схоутен [153] проанализировал дифференциальные геометрии, удовлетворяющие ряду естественных условий, и показал, что в самом общем случае такие геометрии характеризуются тремя и только тремя тензорами — «схоутенами»:

- 1) ковариантной производной от метрического тензора из (4.2.3), называемой *тензором неметричности* или *сегментарной кривизной*,
- 2) тензором кручения  $S^\mu_{\alpha\beta}$ , определенным в (4.2.11),
- 3) разностью обобщенных коэффициентов связности для переноса ко- и контравариантных величин

$$W^\mu_{\alpha\beta} = K^\mu_{\alpha\beta} - \tilde{K}^\mu_{\alpha\beta}, \quad (4.2.12)$$

где  $\tilde{K}^\mu_{\alpha\beta}$  — коэффициенты связности параллельного переноса ковариантных величин. Дело в том, что в обобщенных дифференциальных геометриях ко- и контравариантные величины могут переноситься с помощью различных коэффициентов связности.

Каждый из трех схоутенов может быть либо нулевым, либо вырожденным, т. е. представимым в виде произведения тензора на вектор, либо произвольным, — в итоге приходим к выводу, что может быть  $3^3 = 27$  типов дифференциальных геометрий. В ОТО используется самый простой тип — римановой геометрии, — где все три схоутена принимают нулевые значения.

### 4.2.2. Физические теории в обобщенных геометриях

Названные выше обобщения римановой геометрии неоднократно анализировались в XX в. Основными побудительными мотивами для этого были следующие.

- 1) Как Эйнштейну, так и другим исследователям было ясно, что ОТО не полна в том смысле, что в ее рамках удалось геометризовать лишь гравитационное взаимодействие. Остро ощущалась необходимость геометризации, по крайней мере, еще одного взаимодействия, медленно убывающего с расстоянием, — электромагнитного. В работах такого рода главное внимание уделялось введению геометрического векторного поля, которое можно было бы отождествить с электромагнитным векторным потенциалом.
- 2) Независимо от задачи геометризации электромагнетизма, успех в геометризации гравитации побудил многих исследований к поиску физических проявлений более общих дифференциальных геометрий.
- 3) В течение всего XX в. предпринимались настойчивые попытки совместить принципы ОТО и квантовой теории. Поскольку в рамках стандартной формулировки ОТО эту проблему решить не удавалось, исследовались возможности совмещения принципов геометрии и физики в обобщенных теориях гравитации.

Назовем наиболее интересные варианты физических теорий, развивавшиеся на базе обобщенных геометрий.

#### 1. Геометрии с сегментарной кривизной

1.1. *Теория Вейля.* Пытаясь геометризовать электромагнетизм, Вейль [21] использовал частный, так называемый *вырожденный* случай геометрии с неметричностью, когда обобщенная ковариантная производная от метрического тензора представляется в виде произведения двух тензоров

$$Q_{\mu\nu\sigma} = 2g_{\mu\nu}A_{\sigma}, \quad (4.2.13)$$

где вектор  $A_{\mu}$  через размерный коэффициент отождествлялся с векторным потенциалом электромагнитного поля. Тогда, переобозначая величины  $\delta x^{\alpha} = \delta l^{\alpha}$ , из (4.2.4) имеем

$$\delta(l^2) = 2l\delta l = 2l^2 A_{\sigma} dx^{\sigma} \rightarrow \frac{\delta l}{l} = A_{\sigma} dx^{\sigma}, \quad (4.2.14)$$

т. е. в теории Вейля электромагнитное поле трактуется через относительное изменение длины любого переносимого вектора.

Гипотеза Вейля приводила к необходимости определения в каждой точке пространства-времени своего масштаба длин, а вместе с ним



введения группы масштабных (калибровочных) преобразований

$$dl' = \chi dl, \quad (4.2.15)$$

при которых происходят изменения величин:

$$ds' = \chi^2 ds^2; \quad g'_{\mu\nu} = \chi^2 g_{\mu\nu}; \quad A'_\sigma dx^\sigma = \delta(\ln l') = \delta(\ln \chi l) = A_\sigma dx^\sigma + \frac{\partial(\ln \chi)}{\partial x^\sigma} dx^\sigma. \quad (4.2.16)$$

Обозначая  $\ln \chi = f(x)$ , приходим к калибровочному преобразованию

$$A'_\sigma = A_\sigma + \frac{\partial f(x)}{\partial x^\sigma}. \quad (4.2.17)$$

Легко видеть, что в теории Вейля коэффициенты связности представляются в виде

$$K_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\nu} A_\sigma - g_{\mu\sigma} A_\nu - g_{\nu\sigma} A_\mu. \quad (4.2.18)$$

1.2. Теория Эддингтона. Вскоре А. С. Эддингтоном [190] было показано, что в целях геометризации электромагнетизма можно использовать общий случай геометрии с сегментарной кривизной, когда коэффициенты связности представляются в виде

$$K_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma} + \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu\sigma} - Q_{\mu\sigma\nu} - Q_{\nu\sigma\mu}). \quad (4.2.19)$$

Подставляя эти коэффициенты связности вместо символов Кристоффеля в определение тензора кривизны (1.4.2), легко убедиться, что из него в общем случае можно получить два тензора второго ранга:

$$\tilde{R}^\mu_{\nu\mu\beta} = \tilde{R}_{\nu\beta}; \quad \tilde{R}^\mu_{\mu\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \quad (4.2.20)$$

где геометрический тензор  $F_{\mu\nu}$ , отсутствовавший в римановой геометрии, имеет вид

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial K^\mu_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial K^\mu_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (4.2.21)$$

где введена величина, по замыслу автора соответствующая электромагнитному векторному потенциалу,

$$A_\alpha = K^\mu_{\alpha\mu} = \Gamma^\mu_{\alpha\mu} - Q^\mu_{\alpha\mu}. \quad (4.2.22)$$

Легко видеть, что так определенная величина  $A_\alpha$  не является вектором, тогда как величина (4.2.21) является антисимметричным тензором второго ранга.

Отметим, что названные варианты «единых геометрических теорий гравитации и электромагнетизма» не выдержали испытания временем<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> В течение более 10 лет Эйнштейн колебался, какой вариант обобщений своей теории предпочесть: 4-мерную обобщенную (нериманову) геометрию с неметричностью

по нескольким причинам. Среди них назывались трудности с определением тензора энергии-импульса электромагнитного поля, затруднения с введением силы Лоренца в уравнениях движения заряженных частиц и другие. Однако основная трудность состояла в том, что в реальном мире частицы обладают разными электрическими зарядами, тогда как в получающейся теории квазиэлектромагнитные геометрические величины имели универсальный характер. Не ясно было, каким образом ввести геометрическую характеристику, соответствующую электрическому заряду.

**2. Геометрия с кручением**, открытая Э. Картаном [78] в начале 20-х годов XX в, явилась вторым видом (после геометрии Вейля) римановой геометрии. Частные случаи пространств с кручением исследовались не только с целью геометризации электромагнетизма, но и в поиске новых эффектов геометрического происхождения. В отсутствие сегментарной кривизны обобщенная связность следующим образом записывается через символы Кристоффеля и тензор кривизны:

$$K_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + S_{\mu\nu}^{\sigma} + S_{\nu,\mu}^{\sigma} + S_{\mu,\nu}^{\sigma}. \quad (4.2.23)$$

Выделим несколько направлений исследований физических теорий в пространствах с кручением.

2.1. Развивалась так называемая *теория Эйнштейна—Картана*, в которой наряду с уравнениями Эйнштейна для метрики записывались уравнения для кручения, источником которого предлагалось считать момент количества движения материи. Для отдельных частиц это их спин. Если не использовать обобщенные теории с квадратичными лагранжианами, то такие уравнения имеют алгебраический характер. Исследования этой теории на предмет обоснования новых торсионных явлений продолжаются до настоящего времени.

2.2. В ряде работ физиков-гравитационистов, в том числе и Эйнштейна, исследовались геометрии с *абсолютным параллелизмом*. Они примечательны тем, что в них тензор кривизны Римана—Кристоффеля с замененными символами Кристоффеля на обобщенные коэффициенты связности (4.2.23) полагается равным нулю. При этом тензор кривизны, вычисленный через символы Кристоффеля, отличен от нуля, т. е. в них риманова кривизна компенсируется кручением.

2.3. Отдельно следует выделить серию *работ Финкельштейна* [165], в которой предлагалась единая геометрическая теория поля на основе

---

или остаться в рамках римановой геометрии, но увеличить ее размерность до пяти, как предлагал Т. Калуца.

пространств с кручением. В частности, в этой теории в качестве электромагнитного векторного потенциала (с точностью до размерного коэффициента, пропорционального электрическому заряду) предлагалось рассматривать величину

$$2eA_\sigma = K_{\mu\sigma}^\mu - \Gamma_{\mu\sigma}^\mu = 2S_{\mu\sigma}^\mu. \quad (4.2.24)$$

В теории Финкельштейна важную роль играет наличие нескольких операторов дифференцирования, отличающихся знаком тензора кручения в определении связности:

$$a) \quad \nabla_\mu^{(+)} B^\alpha = \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\mu} + K_{\sigma\mu}^\alpha B^\sigma; \quad (4.2.25)$$

$$b) \quad \nabla_\mu^{(-)} B^\alpha = \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\mu} + K_{\mu\sigma}^\alpha B^\sigma; \quad (4.2.26)$$

$$c) \quad \nabla_\mu^{(0)} B^\alpha = \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}(K_{\mu\sigma}^\alpha + K_{\sigma\mu}^\alpha)B^\sigma; \quad (4.2.27)$$

$$d) \quad \nabla_\mu B^\alpha = \frac{\partial B^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha B^\sigma. \quad (4.2.28)$$

По замыслу Финкельштейна, различные знаки перед тензором кручения позволяют ввести в теорию частицы как нейтральные, так и с двумя противоположными электрическими зарядами.

В теории Финкельштейна рассмотрен ряд частных случаев пространств с кручением, отличающихся условиями, накладываемыми на тензор кривизны (с разными знаками тензора кручения в обобщенных связностях).

Главным недостатком теории Финкельштейна явилось отсутствие удовлетворительного способа введения разных по модулю электрических зарядов частиц.

2.4. Как уже отмечалось, Эйнштейн в последние годы жизни исследовал *геометрию с несимметричной метрикой*, где антисимметричную часть метрики предполагалось связать с тензором напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Такую теорию можно понимать как специальный случай геометрии с кручением, примыкающий к названным вариантам теории Финкельштейна.

**3. Двухсвязностная теория гравитации**, основанная на введении не двух метрик, как в двуметрических теориях, а на задании двух коэффициентов связности, была предложена и развивалась в работах Н. И. Черникова [187]. В этом подходе основные возражения, как и в случае двуметрических теорий гравитации, связаны с физическим обоснованием второй связности.

Сделаем ряд замечаний по названным исследованиям.

- 1) Здесь были названы далеко не все изучавшиеся варианты обобщений эйнштейновской теории гравитации (см. [25]). Например, обсуждались многочисленные комбинации из названных выше случаев, в частности теории с неметричностью и кручением, квадратичные теории с кручением, с неметричностью и т. д.
- 2) Автору неизвестны достаточно развитые варианты физико-геометрических теорий, в которых бы использовался третий схоутовский тензор (4.2.12). Видимо, это связано с ключевым характером метрического тензора в теории. При его наличии нет нужды отдельно вводить разные коэффициенты связности для переноса (дифференцирования) ко- и контравариантных тензоров.
- 3) Анализирувавшиеся физиками дифференциальные геометрии имеют дело с тремя типами изменений тензорных величин при параллельном переносе: а) повороты (вращения) описываются римановой геометрией, б) деформации (изменения длин) описываются геометрией с сегментарной кривизной, в) своеобразные трансляции (сдвиги), проявляющиеся при нарушении правила параллелограмма, описываются геометрией с кручением.
- 4) Главным недостатком попыток геометризации электромагнетизма в рамках 4-мерных неримановых геометрий является отсутствие в них удовлетворительного способа введения электрических зарядов частиц. Как будет показано в третьей части, этот недостаток естественным образом преодолевается в многомерных геометрических моделях объединения физических взаимодействий.
- 5) Особо подчеркнем тот факт, что все названные обобщенные геометрические теории нельзя рассматривать как альтернативные теории гравитации, как иногда это делают, а они являются обобщениями именно эйнштейновской ОТО, которая *содержится в них как некое универсальное неизменное ядро.*

### 4.3. Производные Ли и симметрии римановых пространств

При обсуждении решений уравнений Эйнштейна в гл. 2 использовались полуинтуитивные представления о симметриях римановых пространств. В дифференциальной геометрии разработаны более строгие и корректные определения понятия симметрии. Рассмотрим исходные положения теории симметрий.

### 4.3.1. Производные Ли

1. Введем новую операцию — *дифференцирование Ли* (см., например, [79]). Пусть в римановом многообразии задано векторное поле  $\xi^\mu$ , тогда можно определить тензорный оператор  $\mathcal{L}_{(\xi)}$ , называемый производной Ли вдоль векторного поля  $\xi^\mu$ :

$$\mathcal{L}_{(\xi)} B \underbrace{\begin{matrix} n \\ \nu \dots \\ \beta \dots \end{matrix}}_m = \xi^\sigma \nabla_\sigma B_{\beta \dots}^{\nu \dots} - \underbrace{B_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \nabla_\sigma \xi^\nu}_{n} - \dots + \underbrace{B_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \nabla_\beta \xi^\sigma}_m + \dots, \quad (4.3.1)$$

где  $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}$  — произвольный тензор,  $\nabla_\sigma$  — оператор ковариантного дифференцирования. Расписывая явно оператор  $\nabla$ , легко привести производную Ли к более простому виду

$$\mathcal{L}_{(\xi)} B \underbrace{\begin{matrix} n \\ \nu \dots \\ \beta \dots \end{matrix}}_m = \xi^\sigma \frac{\partial B_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^\sigma} - \underbrace{B_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma}}_n - \dots + \underbrace{B_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta}}_m + \dots. \quad (4.3.2)$$

2. К производным Ли можно прийти, рассуждая следующим образом. Пусть в окрестности точки с координатами  $x^\sigma$  определен произвольный тензор  $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}(x^\sigma)$ . Произведем бесконечно малое смещение вдоль вектора  $\xi^\sigma$  на величину  $d\lambda$ :

$$x^\sigma \rightarrow x'^\sigma = x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda \quad (4.3.3)$$

и рассмотрим тензор с измененным аргументом

$$B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda) = B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^\sigma) + \xi^\sigma \frac{\partial B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^\sigma} d\lambda. \quad (4.3.4)$$

Понимая эту величину определенной в системе координат  $\{x'\}$ , преобразуем ее в первоначальную систему координат  $\{x\}$

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \dots \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \dots B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}, \quad (4.3.5)$$

где, согласно (4.3.3),

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \xi_{,\beta}^\alpha d\lambda; \quad \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu - \xi_{,\mu}^\nu d\lambda. \quad (4.3.6)$$

Разность тензоров

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} - B_{\beta \dots}^{\nu \dots} \equiv \mathcal{L}_{(\xi)} B_{\beta \dots}^{\nu \dots} d\lambda \quad (4.3.7)$$

называется дифференциалом Ли от тензора  $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}$  относительно векторного поля  $\xi^\mu$ . Учитывая (4.3.4) и (4.3.6), приходим к выражению (4.3.2) для производной Ли.

3. Перечислим основные свойства производных Ли.

- 1) Производная Ли от суммы величин одинакового сорта равна сумме производных Ли от слагаемых.
- 2) Для производных Ли от произведения величин А и В справедливо правило Лейбница  $\mathcal{L}_{(\xi)}(AB) = (\mathcal{L}_{(\xi)}A)B + A(\mathcal{L}_{(\xi)}B)$ .
- 3) Производная Ли от тензорной плотности произвольного веса  $w$  также является тензорной плотностью того же веса.
- 4) Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

4. В монадном методе, где задано времени-подобное поле вектора  $\tau^\mu$ , производные Ли играют чрезвычайно важную роль, — через них определяется монадный оператор временного дифференцирования. Чтобы это продемонстрировать, запишем производные Ли вдоль поля  $\xi^\mu \equiv \tau^\mu$  от составляющих метрического тензора

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\tau)}\tau_\mu &= \tau^\sigma\tau_{\mu,\sigma} + \tau_\sigma\tau_{,\mu}^\sigma = \tau^\sigma(\tau_{\mu,\sigma} - \tau_{\sigma,\mu}) = a_\mu; \\ \mathcal{L}_{(\tau)}h_{\mu\nu} &= \tau^\sigma h_{\mu\nu,\sigma} + h_{\sigma\nu}\tau_{,\mu}^\sigma + h_{\mu\sigma}\tau_{,\nu}^\sigma = 2d_{\mu\nu}; \\ \mathcal{L}_{(\tau)}g_{\mu\nu} &= \tau_{\nu;\mu} + \tau_{\mu;\nu} = \tau_\nu a_\mu + \tau_\mu a_\nu - 2d_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

Из определения (3.4.3) и записанных формул следует, что *оператор монадной временной производной представляет собой спроектированную на 3-мерное сечение производную Ли вдоль времени-подобного вектора  $\tau$* .

### 4.3.2. Уравнения и векторы Киллинга

1. Используя производные Ли, можно определить подвижность риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие *допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля  $\xi^\mu$* , если производная Ли от метрического тензора вдоль  $\xi^\mu$  обращается в нуль:

$$\mathcal{L}_{(\xi)}g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + g_{\sigma\nu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} = 0.\tag{4.3.9}$$

Исходя из смысла производной Ли (4.3.7), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (4.3.3) метрика  $g'_{\mu\nu}(x')$  должна быть точно такой же функцией аргумента  $x'$ , что и первоначальная функция  $g_{\mu\nu}(x)$  ее начального аргумента  $x$ , т. е.  $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$ . Легко убедиться, что (4.3.9) можно записать иначе:

$$\mathcal{L}_{(\xi)}g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0.\tag{4.3.10}$$

Уравнения (4.3.10) называются *уравнениями Киллинга*, а вектор  $\xi^\sigma$ , удовлетворяющий уравнению Киллинга, — *вектором Киллинга*.

Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга, т. е. обладает векторами Киллинга, а следовательно, и симметриями. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга.

2. Выше было отмечено, что производные Ли играют важную роль в монадном методе описания систем отсчета. Особо выделим случай, когда можно определить систему отсчета вдоль времени-подобного вектора Киллинга (если он существует). Такие системы отсчета назовем *киллинговыми*; в них

$$\xi^\mu = \varphi \tau^\mu, \quad (4.3.11)$$

где  $\varphi$  — скалярная функция координат, характеризующая длину вектора Киллинга.

Подставив это выражение в уравнение Киллинга (4.3.9) и спроектировав его на направление монады и пространственно-подобные направления, приходим к свойствам киллинговых систем отсчета:

$$d_{\mu\nu} = 0; \quad (4.3.12)$$

$$a_\nu = h_\nu^\beta \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}; \quad \tau^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} = 0. \quad (4.3.13)$$

Из (4.3.13) следует, что в таких системах отсчета вектор ускорения имеет дивергентный вид, а тензор угловой скорости вращения, согласно (3.5.30), постоянен:

$$a_\nu = -\frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial x^\nu} \rightarrow \partial_T \omega_{\mu\nu} = 0. \quad (4.3.14)$$

3. Обсудим некоторые свойства векторов Киллинга. Прокоммутируем вторые ковариантные производные от  $\xi_\nu$ :

$$\xi_{\nu;\alpha;\beta} - \xi_{\nu;\beta;\alpha} = R^\lambda_{\nu\alpha\beta} \xi_\lambda. \quad (4.3.15)$$

Прибавляя к этому соотношению еще два, отличающиеся циклической перестановкой индексов  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , учитывая тождества Риччи (1.4.6) и (4.3.10), находим

$$\xi_{\nu;\alpha;\beta} = R^\lambda_{\beta\alpha\nu} \xi_\lambda. \quad (4.3.16)$$

Это означает, что, дифференцируя (4.3.16) и затем используя его опять, можно выразить ковариантные производные от  $\xi_\nu$  любого порядка через  $\xi_\nu$  и  $\xi_{\nu;\alpha}$  с коэффициентами, зависящими от выбранной точки. Отсюда следует, что любой вектор Киллинга  $\xi_\nu^{(s)}$  в произвольной точке  $x$  можно выразить через вектор Киллинга и его ковариантную производную

в другой точке  $y$ . Действительно, разлагая  $\xi_\nu^{(s)}(x)$  в ряд Тейлора и используя (4.3.16), можно записать

$$\xi_\nu^{(s)}(x) = A_\nu^\lambda(x, y)\xi_\lambda^{(s)}(y) + B_\nu^{\lambda\sigma}(x, y)\xi_{\lambda;\sigma}^{(s)}(y), \quad (4.3.17)$$

где  $A_\nu^\lambda(x, y)$ ,  $B_\nu^{\lambda\sigma}(x, y)$  — функции, зависящие от метрики и точек  $x$  и  $y$ . Они не зависят от номера  $s$  вектора Киллинга.

4. Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (4.3.9). Набор векторов Киллинга  $\xi_\nu^{(s)}$  образует линейно-независимую систему в многообразии, если нельзя так подобрать постоянные коэффициенты  $c_{(s)}$ , чтобы в любой точке  $x$  выполнялось соотношение

$$\sum_{(s)} c_{(s)} \xi_\nu^{(s)}(x) = 0. \quad (4.3.18)$$

Максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (4.3.19)$$

Для  $n = 4$  максимальной симметрией обладает пространство-время Минковского. Десять векторов Киллинга соответствуют 10-параметрической группе Пуанкаре.

5. Укажем несколько возможных классов многообразий с характерными наборами векторов Киллинга.

- 1) *Сферически симметричные метрики.* Поскольку понятие сферической симметрии относится к пространственной части метрики, то в это понятие неявно заложен постулат о глобальном расщеплении 4-мерного пространственно-временного многообразия на направления времени и ортогональные им 3-мерные пространственно-подобные сечения. Это позволяет без ущерба для общности использовать монадный метод в кинеметрической калибровке (нормальные системы отсчета). Векторы Киллинга  $\xi_{(s)}^\mu$ , характеризующие свойства пространственных сечений, являются пространственно-подобными, т. е. имеем

$$\xi_{(s)}^\mu \tau_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_{(s)}^\sigma = 0. \quad (4.3.20)$$

Запишем уравнения Киллинга для пространственно-подобных векторов Киллинга в монадном виде. Проектируя (4.3.10) на направления  $\tau$  и 3-мерного сечения, находим в кинеметрической



калибровке

$$\xi_{(s)}^l h_{ik,l} + h_{ik} \xi_{(s),i}^l + h_{il} \xi_{(s),k}^l = 0; \quad (4.3.21)$$

$$h_{k\beta} (\xi_{(s)}^\mu \tau_{,\mu}^\beta - \tau^\mu \xi_{(s),\mu}^\beta) = 0; \quad (4.3.22)$$

$$a_i \xi_{(s)}^i = 0. \quad (4.3.23)$$

В данном случае, когда метрический тензор еще не найден, но ставится вопрос о его нахождении, уравнения Киллинга следует рассматривать как уравнения на компоненты 3-мерной метрики, когда сами векторы Киллинга заданы из вида генераторов группы  $O(3)$  3-мерных вращений в (плоской) окрестности выделенного центра. Генераторы данной группы хорошо известны, так что можно сразу же выписать компоненты векторов Киллинга в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \xi_{(1)}^\mu &= \{0; 0; \sin \varphi; ctg\theta \cos \varphi\}; \\ \xi_{(2)}^\mu &= \{0; 0; -\cos \varphi; ctg\theta \sin \varphi\}; \\ \xi_{(3)}^\mu &= \{0; 0; 0; -1\}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Подставляя эти векторы в уравнения (4.3.21) в диагональной 3-метрике, находим, что метрика пространственных сечений должна иметь вид

$$dl^2 = h_{11}(x^\alpha, r) dr^2 + b^2(x^\alpha, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.3.25)$$

соответствующий искомым видам метрик (2.1.4) или (2.3.1) при выводе решений Шварцшильда или Фридмана.

- 2) *Однородные пространства.* Метрическое многообразие называют однородным, если оно обладает подвижностью, позволяющей преобразованием (4.3.3) перевести его произвольную точку  $x$  в любую другую точку окрестности  $x$ . Другими словами, в каждой точке многообразия метрика допускает существование векторов Киллинга, принимающих произвольные значения. Многообразие с таким свойством образует *группу Ли*.

Очевидно, в каждой точке однородного  $n$ -мерного многообразия имеется  $n$  линейно-независимых векторов Киллинга  $\xi_{(\alpha)}^\nu$  (здесь индекс  $\alpha$  нумерует векторы Киллинга). Операторы дифференцирования Ли вдоль выбранных векторов, действующие на скаляры, обозначим:

$$X_{(\alpha)} = \mathcal{L}_{(\xi(\alpha))} = \xi_{(\alpha)}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (4.3.26)$$

Говорят, что операторы (4.3.26) определяют базис группы, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же операторы, т. е.

$$[X_{(\alpha)} X_{(\beta)}] \equiv X_{(\alpha)} X_{(\beta)} - X_{(\beta)} X_{(\alpha)} = C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)} X_{(\gamma)}, \quad (4.3.27)$$

где  $C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)}$  — постоянные, называемые *структурными константами группы*. Соотношения (4.3.27) являются математической формулировкой однородности многообразия. Определяя для векторов Киллинга обратные им векторы согласно формулам:

$$\xi_{(\alpha)}^{\nu} \xi_{\nu}^{(\beta)} = \delta_{(\alpha)}^{(\beta)}; \quad \xi_{(\alpha)}^{\nu} \xi_{\mu}^{(\alpha)} = g_{\mu}^{\nu}, \quad (4.3.28)$$

из (4.3.27) находим:

$$C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)} = \xi_{(\alpha)}^{\lambda} \xi_{(\beta)}^{\mu} \left( \frac{\partial \xi_{\lambda}^{(\gamma)}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \xi_{\mu}^{(\gamma)}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (4.3.29)$$

Структурные константы удовлетворяют соотношению

$$C_{(\alpha\beta)}^{(\gamma)} C_{(\nu\gamma)}^{(\mu)} + C_{(\nu\alpha)}^{(\gamma)} C_{(\beta\gamma)}^{(\mu)} + C_{(\beta\nu)}^{(\gamma)} C_{(\alpha\gamma)}^{(\mu)} = 0, \quad (4.3.30)$$

соответствующему групповому свойству ассоциативности.

В однородных пространствах в качестве  $n$  линейно-независимых векторов можно выбрать  $\xi_{\nu}^{(\beta)} = \delta_{\nu}^{\beta}$ .

- 3) *Изотропные пространства*. Метрическое многообразие называют изотропным в данной точке  $y$  (относительно  $y$ ), если оно обладает подвижностью, оставляющей неподвижной эту точку (т. е. если  $\xi_{\nu}(y) = 0$ ), а первые производные  $\xi_{\nu;\alpha}(y)$  в этой точке принимают все возможные значения. В изотропном многообразии  $n$  измерений можно выбрать  $n(n-1)/2$  векторов Киллинга такого рода  $\xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}$ , где значки  $(\alpha\beta)$  нумеруют эти векторы. Они удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(x, y) &= -\xi_{\nu}^{(\beta\alpha)}(x, y); & \xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(y, y) &= 0; \\ \xi_{\nu;\mu}^{(\alpha\beta)}(y, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \xi_{\nu}^{(\alpha\beta)}(x, y) \right)_{x=y} = \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

Другими словами, можно сказать, что такие векторы Киллинга определяют повороты многообразия вокруг осей, проходящих через точку  $y$ .

- 4) *Однородные изотропные метрические многообразия* являются максимально симметричными, так как они обладают  $n(n+1)/2$  линейно-независимыми векторами Киллинга. Можно показать, что изотропное в каждой точке многообразие является однородным.

### 4.3.3. Классификация однородных пространств

Рассмотрим кратко некоторые модели Вселенной, обладающие однородными, но анизотропными пространственными сечениями. Напомним, что рассмотренные выше модели Фридмана имели однородные изотропные сечения. Для этого прежде всего изложим классификацию 3-мерных однородных пространств (возможных однородных пространственных сечений в нормальных системах отсчета). Выше уже было сформулировано условие однородности многообразий произвольной размерности. Здесь понадобятся формулы (4.3.27)–(4.3.30) для 3-мерных пространств (все греческие индексы в них должны быть заменены латинскими). Соотнесем со структурными константами величину с двумя индексами:

$$C_{(sr)}^{(j)} = \varepsilon_{(sri)} C^{(ij)}, \quad (4.3.32)$$

где  $\varepsilon_{(sri)}$  — символ Леви-Чивиты. Тогда (4.3.30) можно представить в виде

$$\varepsilon_{(ijk)} C^{(jk)} C^{(is)} = 0. \quad (4.3.33)$$

Представим  $C^{(ij)}$  как сумму симметричной и антисимметричной частей:

$$C^{(ij)} = n^{(ij)} + a^{(ij)} = n^{(ij)} + \varepsilon^{(ijk)} a_{(k)}, \quad (4.3.34)$$

где  $n^{(ij)} = n^{(ji)}$ ,  $a^{(ij)} = -a^{(ji)}$ .

Поскольку линейная комбинация векторов Киллинга также является вектором Киллинга, в пространстве этих векторов можно определить линейные преобразования. При этом все величины с индексами в скобках будут изменяться по тензорному закону. С помощью таких преобразований симметричный тензор  $n^{(ij)}$  приводится к диагональному виду. Пусть  $n_1, n_2, n_3$  — его главные значения. Пользуясь произволом в выборе постоянных множителей при операторах (4.3.26), можно обратить отличные от нуля главные значения  $n_i$  в  $\pm 1$ . Используя (4.3.34), соотношения (4.3.33) запишем в виде

$$a_{(i)} n^{(is)} = 0. \quad (4.3.35)$$

Это означает, что отличными от нуля (в главных осях) могут быть лишь такие компоненты вектора  $a_{(i)}$ , которые соответствуют нулевым главным значениям  $n_i$ . Если имеются два или три нулевых главных значения  $n_i$ , то подходящие преобразования обращают в нуль соответственно одну или две из оставшихся компонент  $a_{(i)}$ . Таким образом, не теряя общности, можно считать, что вектор  $a_{(i)}$ , если он отличен от нуля, имеет лишь одну ненулевую компоненту. Положим, что такой компонентой является  $a_{(i)} \equiv a$ . С учетом изложенного коммутаторы (4.3.27) выразим следующим образом:

$$\begin{aligned} [X_{(1)} X_{(2)}] &= -aX_{(2)} + n_3X_{(3)}; \\ [X_{(3)} X_{(1)}] &= n_2X_{(2)} + aX_{(3)}; \\ [X_{(2)} X_{(3)}] &= n_1X_{(1)}. \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

Перебирая все указанные для  $n_i$  и  $a$  значения, получаем *однородные пространства девяти типов Бианки*. Выпишем соответствующие этим типам значения  $n_i$  и  $a$  в виде таблицы [94]:

Тип	I	II	VII	VI	IX	VIII	V	IV	VII	III ( $a = 1$ ) VI ( $a \neq 1$ )
$a$	0	0	0	0	0	0	1	1	a	a
$n_1$	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
$n_2$	0	0	1	-1	1	1	0	0	1	1
$n_3$	0	0	0	0	1	-1	0	1	1	-1

(4.3.37)

Заметим, что спроектированные на направления базисных векторов компоненты 3-мерного тензора Риччи алгебраически выражаются через структурные константы группы. Используя это и вид тензора Эйнштейна (3.5.24)–(3.5.26), можно записать уравнения Эйнштейна для метрик с пространственными сечениями всех типов Бианки.

Выпишем несколько 4-мерных метрик, имеющих пространственные сечения различных типов Бианки.

**Тип I** характеризуется абелевой группой Ли. Этому типу отвечает пространство-время Минковского. Кроме того, к этому случаю относится **плоская анизотропная модель мира Казнера** (вакуумное решение):

$$ds^2 = dx_0^2 - x_0^{2\beta_1} dx_1^2 - x_0^{2\beta_2} dx_2^2 - x_0^{2\beta_3} dx_3^2, \quad (4.3.38)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — константы, удовлетворяющие условиям:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1. \quad (4.3.39)$$

Если их разложить в порядке возрастания  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ , то они лежат в интервалах:

$$-\frac{1}{3} \leq \beta_1 \leq 0; \quad 0 \leq \beta_2 \leq \frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3} \leq \beta_3 \leq 1. \quad (4.3.40)$$

С увеличением  $x^0$  в хронометрической (кинеметрической) системе отсчета в пространственных сечениях линейные расстояния вдоль осей  $x^2$  и  $x^3$  увеличиваются, а вдоль оси  $x^1$  уменьшаются.

**Тип IX.** К этому типу относится модель с замкнутыми пространственными сечениями, **обобщающая модель Казнера**:

$$ds^2 = dx_0^2 - \exp(2\alpha) \left( \exp(2\beta_{11}) dl_{(1)}^2 + \exp(2\beta_{22}) dl_{(2)}^2 + \exp(2\beta_{33}) dl_{(3)}^2 \right), \quad (4.3.41)$$

где  $\alpha, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$  — функции координаты  $x^0$ , удовлетворяющие условию

$$\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0, \quad (4.3.42)$$

а  $dl_{(i)} = l_{(i)\mu} dx^\mu$  — три ортогональных смещения вдоль векторов с компонентами:

$$l_{(1)\mu} = \{0; \sin x^3; -\cos x^3 \sin x^1; 0\};$$

$$l_{(2)\mu} = \{0; \cos x^3; \sin x^3 \sin x^1; 0\}; \quad (4.3.43)$$

$$l_{(3)\mu} = \{0; 0; \cos x^1; 1\} \quad (4.3.44)$$

в системе координат, где  $0 \leq x^1 \leq \pi$ ;  $0 \leq x^2 \leq 2\pi$ ;  $0 \leq x^3 \leq 4\pi$ . Ввиду условия (4.3.42) независимы лишь две функции  $\beta_{ii}$ . Можно перейти к новым независимым величинам  $\beta_+$  и  $\beta_-$  так, что

$$\beta_{11} = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-; \quad \beta_{22} = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-; \quad \beta_{33} = -2\beta_+. \quad (4.3.45)$$

Величины:

$$\beta \equiv \sqrt{\beta_+^2 + \beta_-^2}; \quad \sigma = \arccos \left( \frac{\beta_+}{\sqrt{\beta_+^2 + \beta_-^2}} \right) \quad (4.3.46)$$

соответственно характеризуют суммарную анизотропию мира и отклонение мира от аксиальной симметрии.

При  $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33}$ , т. е. при  $\beta_+ = \beta_- = 0$ , пространственные сечения имеют постоянную положительную кривизну. Таким образом, закрытая модель Фрийдмана является частным случаем моделей мира с однородными пространственными сечениями типа IX Бианки. Эволюция модели мира с метрикой (4.3.41) соответствует смене казнеровских эпох попеременно вдоль трех осей. При  $x^0 \rightarrow 0$  число осцилляций стремится к бесконечности.

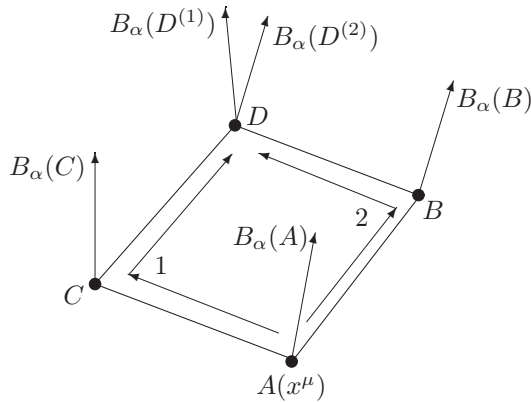
Пространства постоянной отрицательной кривизны являются частным случаем пространств типа V Бианки.

Общие виды метрик 3-мерных пространств всех девяти типов Бианки можно найти в монографии [129, с. 156–157].

## 4.4. Геометрический смысл тензора кривизны

К тензору кривизны можно прийти, рассматривая параллельный перенос произвольного вектора (тензора) по замкнутому контуру. Параллельно перенося произвольный тензор  $B_{\mu\nu}^{\alpha\beta\dots}$  из произвольной точки  $A$  в точку  $D$  вдоль различных сторон параллелограмма (см. рис. 4.3), можно убедиться в том, что тензор Римана—Кристоффеля определяет разность компонент тензоров, перенесенных из одной точки в другую (близкую) двумя разными путями:

$$\underbrace{\Delta B}_{\substack{\alpha\beta\dots \\ \mu\nu\dots \\ m}}(D) = \underbrace{-\frac{1}{2}R_{\lambda\sigma\gamma}^{\alpha} B_{\mu\nu}^{\lambda\beta\dots} ds^{\sigma\gamma}}_n - \dots + \underbrace{\frac{1}{2}R_{\mu\sigma\gamma}^{\lambda} B_{\lambda\nu}^{\alpha\beta\dots} ds^{\sigma\gamma}}_m + \dots, \quad (4.4.1)$$



**Рис. 4.3.** Введение тензора кривизны посредством параллельного переноса вектора (тензора) по замкнутому контуру

где  $ds^{\sigma\gamma} = dx^\sigma \delta x^\gamma - dx^\gamma \delta x^\sigma$  — площадь параллелограмма  $ABCD$ . Равносильно утверждение, что тензор кривизны определяет разность компонент тензоров: исходного и получившегося в результате переноса по замкнутому контуру.

Данный геометрический смысл тензора кривизны положен в основу ряда его применений в геометрофизике.

#### 4.4.1. Картановские перемещения, ассоциированные с циклом, и уравнения Эйнштейна

Интересный взгляд на ОТО предложил Э. Картан, разработавший теорию перемещений, ассоциированных с циклом. Он писал: «Вместо того, чтобы говорить, что риманово пространство обладает (евклидовой) связностью, можно сказать, что оно представляет собой неголономное евклидово пространство... Этот способ рассматривать идею параллелизма наиболее глубоко идет вглубь вещей. Это значит ограничивать идею (римановой геометрии. — Ю. В.), если видеть в ней, как это обычно делают, процесс сравнения векторов, исходящих из двух бесконечно близких точек. Наоборот, здесь нужно видеть способ введения в риманово пространство всей гаммы перемещений евклидова пространства [77]. Картан предложил рассматривать в каждой точке риманова пространства с тензором Римана—Кристоффеля  $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$  касательное евклидово пространство, ввел в нем замкнутые циклы смещений и определил группу поворотов произвольных векторов через компоненты тензора

кривизны и площади замкнутых циклов согласно формуле

$$DB^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} B^\nu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (4.4.2)$$

где площадь цикла определяется двумя смещениями  $dx^\alpha$  и  $\delta x^\beta$  в касательном евклидовом пространстве в избранной точке риманова пространства. Поясним основные идеи метода Картана [96, 161].

1. Введем четверку ортов  $g^\mu(\sigma)$  вдоль локальных координатных осей, где индекс в скобках, пробегающий значения от 0 до 3, нумерует орты. Имея в виду изложенный в гл. 3 монадный метод, можно положить  $g^\mu(0) = \tau^\mu$ . Тогда, обозначая смещения вдоль соответствующих локальных осей символами  $dx^\alpha(\lambda)$ , формулу (4.4.2) для произвольного орта можно переписать в виде

$$D_{(\lambda\kappa)} g^\mu(\sigma) = R^\mu_{\nu\alpha\beta} g^\nu(\sigma) dx^\alpha(\lambda) dx^\beta(\kappa), \quad (4.4.3)$$

где при  $D_{(\lambda\kappa)}$  указаны обозначения смещений, образующих замкнутый контур. Свернув (4.4.3) с ковариантным вектором  $g_\mu(\lambda)$ , получаем скалярное уравнение

$$g_\mu(\lambda) D_{(\lambda\kappa)} g^\mu(\sigma) = R^\mu_{\nu\alpha\beta} g^\nu(\sigma) g_\mu(\lambda) dx^\alpha(\lambda) dx^\beta(\kappa), \quad (4.4.4)$$

определяющее инфинитезимальное перемещение, ассоциированное с циклом, образованным бесконечно малым контуром со сторонами  $dx^\alpha(\lambda)$  и  $dx^\beta(\kappa)$ .

2. Пусть выбрана координатная система, в данной точке которой векторы в римановом пространстве и в касательном совпадают:

$$g^\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \neq \mu, \\ 1 & \text{при } \sigma = \mu, \end{cases} \quad dx^\alpha(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \lambda, \\ dx^\alpha & \text{при } \alpha = \lambda; \end{cases} \quad (4.4.5)$$

тогда, полагая, что  $\sigma = \kappa = 0 \rightarrow \nu = \beta = 0$ , а индексы  $\lambda = \alpha = \mu$  пробегают значения 1, 2, 3, получаем три соотношения:

$$g_1(1) D_{(10)} g^1(0) = R^1_{010} g^0(0) g_1(1) dx^1 dx^0; \quad (4.4.6)$$

$$g_2(2) D_{(20)} g^2(0) = R^2_{020} g^0(0) g_2(2) dx^2 dx^0; \quad (4.4.7)$$

$$g_3(3) D_{(30)} g^3(0) = R^3_{030} g^0(0) g_3(3) dx^3 dx^0, \quad (4.4.8)$$

определяющие скалярные, численные значения изменений базисного вектора  $g^0(0)$ , обусловленные параллельным переносом по трем инфинитезимальным контурам со сторонами  $(dx^1, dx^0)$ ,  $(dx^2, dx^0)$ ,  $(dx^3, dx^0)$ .

Очевидно, что для четвертого возможного значения  $\lambda = \alpha = 0$  получается тождественный нуль.

3. Выбирая смещения вдоль осей одинаковыми:

$$g_1(1)dx^1 = g_2(2)dx^2 = g_3(3)dx^3 = g_\lambda(\mu)dx^\lambda \quad (4.4.9)$$

и складывая соотношения (4.4.6)–(4.4.8), находим

$$\begin{aligned} g_\mu(\lambda)D_{(\lambda 0)}g^\mu(0) &= g_1(1)D_{(10)}g^1(0) + g_2(2)D_{(20)}g^2(0) + g_3(3)D_{(30)}g^3(0) = \\ &= R_{\mu o}^\mu g^o(0)g_\alpha(\lambda)dx^\alpha dx^o = R_{oo}g^o(0)g_\alpha(\lambda)dx^\alpha dx^o. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Представляя компоненту тензора Риччи  $R_{oo}$ , согласно уравнениям Эйнштейна, в виде  $R_{oo} = \varkappa(T_{oo} - (1/2)g_{oo}T)$ , получаем

$$g_\mu(\lambda)D_{(\lambda o)}g^\mu(0) = \varkappa \left( T_{oo} - \frac{1}{2}g_{oo}T \right) g^o(0)g_\alpha(\lambda)dx^\alpha dx^o. \quad (4.4.11)$$

4. Аналогичным образом можно получить изменения и других трех базисных векторов при переносах по соответствующим тройкам инфинитезимальных параллелограммов, обладающих одной общей стороной. При сохранении условий (4.4.5) и (4.4.9) имеем

$$g_\mu(\lambda)D_{(\lambda \nu)}g^\mu(\sigma) = \varkappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) g^\mu(\sigma)g_\alpha(\lambda)dx^\alpha dx^\nu. \quad (4.4.12)$$

Отсюда следует вывод, что уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} = \varkappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (4.4.13)$$

означают, что суммарное значение  $g_\mu(\lambda)D_{(\lambda \nu)}g^\mu(\sigma)$  перемещений, ассоциированных с циклом, любого вектора  $g^\mu(\lambda)$  при переносах по трем некопланарным инфинитезимальным параллелограммам, обладающим одной общей стороной, не произвольно, но определяются тензором энергии-импульса материальных полей, в которых производятся перемещения.

5. Проинтегрировав (4.4.4) по некоторой конечной площади, можно получить выражение для конечного перемещения, ассоциированного с циклом:

$$\int g_\mu(\lambda)D_{(\lambda \kappa)}g^\mu(\sigma) \equiv g_\mu(\lambda)\Delta g^\mu(\sigma) = \int \int R_{\nu\alpha\beta}^\mu g^\nu(\sigma)g_\mu(\lambda)dx^\alpha(\lambda)dx^\beta(\kappa). \quad (4.4.14)$$



На основе этой формулы можно решать ряд физических задач, например вычислять дифференциальные эффективные сечения процессов рассеяния частиц на рассеивающих центрах (см. [96]). Такие задачи сводятся к построению соответствующих значений тензора Римана—Кристоффеля и заданию необходимых замкнутых контуров.

6. К работам данного направления примыкают исследования М. Б. Менского [105] и так называемая *путезависимая формулировка* ОТО С. Манделстама [100], где вообще предлагалось отказаться от координатного описания теории и заменить его на путезависимое.

Полагается, что в окрестности каждой точки пространственно-временного многообразия задана своя ортогональная координатная система, а также определен тензор  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Все индексы можно писать снизу, так как все величины рассматриваются в локальной координатной системе и нет необходимости в различении ко- и контравариантных величин. В формулировке Манделстама не используется глобальная универсальная координатная система, а положения одной точки относительно другой задаются при помощи путей.

Такое задание можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть имеется точка  $A$ , в которой задан свой координатный базис. Произведем переход от точки  $A$  на расстояние  $s_1$  в направлении  $x^1$  координатных базисов всех встречающихся на пути точек. Так мы попадем в точку  $A_1$ . Затем произведем переход от точки  $A_1$  на расстояние  $s_2$  в направлении  $x^2$  координатных базисов опять-таки встречающихся на пути точек. Так мы попадем в точку  $A_2$ . Продолжая далее этот процесс в конце концов попадем в точку  $B$ , которая характеризуется относительно  $A$  путем  $P$ , заданным подобным рецептом.

В путезависимой формулировке уравнения Эйнштейна записываются в виде

$$R_{\mu\nu\mu\beta}(x, P) - \frac{1}{2}\eta_{\nu\beta}R_{\mu\alpha\mu\alpha}(x, P) = \kappa T_{\nu\beta}(x, P). \quad (4.4.15)$$

#### 4.4.2. Уравнения девиаций геодезических линий

Аналогом уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле (1.3.12) в случае гравитации в терминах тензора кривизны являются *уравнения девиаций (отклонений) геодезических линий*. Эти уравнения выводятся на основании следующих рассуждений.

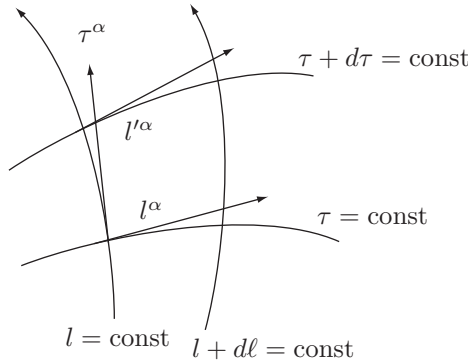
1. Рассмотрим совокупность времени-подобных линий, образующих 2-мерную поверхность. Пусть  $\tau$  — параметр вдоль этих линий, и пусть каждая линия характеризуется параметром  $l = \text{const}$ . Определим на данной поверхности совокупность линий, характеризуемых значениями

параметра  $\tau = \text{const}$ . Данная 2-мерная поверхность находится в 4-мерном пространстве-времени с некоторой координатной системой  $\{x^\mu\}$ .

Определим касательные к линиям  $\tau$  и  $l$ :

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} = \tau^\alpha; \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial l} = l^\alpha. \quad (4.4.16)$$

Положения одной линии из семейства  $\tau$  по отношению к другой, близкой к ней линии, характеризуется вектором  $l^\alpha$ , который в общем случае изменяется с ростом параметра  $\tau$  (см. рис. 4.4). Наша задача — определить



**Рис. 4.4.** Перемещение вектора  $l^\nu$  вдоль вектора  $\tau^\mu$

закон изменения этого вектора, что и дается искомым уравнением девиации мировых линий. Чтобы его найти, сначала запишем ковариантные производные от произвольного вектора  $B^\alpha$  вдоль двух видов линий:

$$\frac{\delta B^\alpha}{\delta \tau} = \frac{\partial B^\alpha}{\partial \tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha B^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} = B_{;\sigma}^\alpha \tau^\sigma; \quad (4.4.17)$$

$$\frac{\delta B^\alpha}{\delta l} = \frac{\partial B^\alpha}{\partial l} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha B^\mu \frac{dx^\nu}{dl} = B_{;\sigma}^\alpha l^\sigma. \quad (4.4.18)$$

Подставляя вместо  $B^\alpha$  векторы  $\tau^\alpha$  и  $l^\alpha$ , приходим к соотношению

$$\frac{\delta \tau^\alpha}{\delta l} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial l \partial \tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tau^\mu l^\nu = \frac{\delta l}{\delta \tau} \rightarrow \tau_{;\beta}^\alpha l^\beta = l_{;\beta}^\alpha \tau^\beta. \quad (4.4.19)$$

2. Из коммутации ковариантных производных, согласно (1.4.1),

$$\tau_{;\mu;\nu}^\alpha - \tau_{;\nu;\mu}^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha \tau^\beta \quad (4.4.20)$$

и выражений (4.4.17)–(4.4.18) следует

$$\left( \frac{\delta}{\delta \tau} \frac{\delta}{\delta l} - \frac{\delta}{\delta l} \frac{\delta}{\delta \tau} \right) \tau^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha \tau^\beta \tau^\mu l^\nu. \quad (4.4.21)$$

Отсюда, используя (4.4.19), получаем уравнение девиации мировых линий в общем случае

$$\frac{\delta^2 l^\alpha}{\delta \tau^2} = \frac{\delta}{\delta l} \left( \frac{\delta \tau^\alpha}{\delta \tau} \right) + R_{\cdot\beta\mu\nu}^\alpha \tau^\beta \tau^\mu l^\nu. \quad (4.4.22)$$

Если линии  $\tau$  являются геодезическими, то для них выполняется условие

$$\frac{\delta \tau^\alpha}{\delta \tau} = \tau_{;\sigma}^\alpha \tau^\sigma = 0, \quad (4.4.23)$$

и в итоге получается искомое уравнение девиаций геодезических линий

$$\frac{\delta^2 l^\alpha}{\delta \tau^2} = R_{\cdot\beta\mu\nu}^\alpha \tau^\beta \tau^\mu l^\nu \longleftrightarrow \frac{\delta \tau^\alpha}{\delta \tau} = \frac{q}{mc^2} F_{\cdot\beta}^\alpha \tau^\beta, \quad (4.4.24)$$

соответствующее уравнениям движения заряженной частицы в электромагнитном поле, если учесть, что  $\tau = s$  и  $\tau^\alpha = u^\alpha$ .

3. Обратим внимание на важное свойство произведения введенных в (4.4.16) векторов  $\tau_\alpha l^\alpha$  для геодезических линий:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\tau_\alpha l^\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta l} (\tau_\alpha \tau^\alpha), \quad (4.4.25)$$

следующее из свойства геодезических (4.4.22) и (4.4.23). Из этого соотношения следует, что как для изотропной геодезической, когда  $\tau_\alpha \tau^\alpha = 0$ , так и для неизотропной геодезической, когда  $\tau_\alpha \tau^\alpha = \pm 1$ , выполняется условие

$$\tau_\alpha l^\alpha = \text{const}. \quad (4.4.26)$$

Если в какой-то точке на линии  $\tau$  имеет место ортогональность векторов, т. е.  $\tau_\alpha l^\alpha = 0$ , то это свойство сохраняется вдоль всей линии  $\tau$ .

## 4.5. Алгебраическая классификация Петрова пространств Эйнштейна

*Пространством Эйнштейна называется риманово пространство (любой размерности и произвольной сигнатуры), обладающее свойством*

$$R_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}, \quad (4.5.1)$$

где  $\sigma$  — некоторая постоянная. Соотношение (4.5.1) выделяет более узкий класс римановых пространств, нежели это допускается уравнениями Эйнштейна, однако под это условие попадают все вакуумные и электровакуумные решения уравнений Эйнштейна, которым соответствует

$\sigma = 0$ . Для невакуумных решений вместо тензора Риччи в (4.5.1) следует использовать тензор Вейля  $C_{\mu\nu}$ , который представляет собой алгебраическую комбинацию из компонент тензора кривизны, определенную в разд. 4.6. Тензор Вейля обладает всеми теми же алгебраическими свойствами, что и тензор Римана—Кристоффеля. В этом случае вместо (4.5.1) следует писать

$$C_{\mu\nu} = 0. \quad (4.5.2)$$

### 4.5.1. Характеристическая матрица

1. Будем исходить из  $6 \times 6$ -матрицы (1.4.8), построенной из компонент тензора Римана—Кристоффеля или компонент тензора Вейля. Имея в виду обе эти возможности, введем обобщенные обозначения этих тензоров. Компоненты тензоров с индексами  $01 \rightarrow 1, 02 \rightarrow 2, 03 \rightarrow 3$  будем обозначать символом  $X_{ik}$ , смешанные компоненты, содержащие также значки  $12 \rightarrow \dot{3}, 23 \rightarrow \dot{1}, 31 \rightarrow \dot{2}$ , обозначим символом  $Y_{ik}$ , а компоненты с двумя индексами, помеченными точкой, обозначим символом  $Z_{\dot{i}\dot{k}}$ , тогда матрица (1.4.8) заменяется на матрицу вида

$$(M_{ik}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y_{1\dot{1}} & Y_{1\dot{2}} & Y_{1\dot{3}} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & Y_{2\dot{1}} & Y_{2\dot{2}} & Y_{2\dot{3}} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & Y_{3\dot{1}} & Y_{3\dot{2}} & Y_{3\dot{3}} \\ \hline Y_{\dot{1}1} & Y_{\dot{1}2} & Y_{\dot{1}3} & Z_{\dot{1}\dot{1}} & Z_{\dot{1}\dot{2}} & Z_{\dot{1}\dot{3}} \\ Y_{\dot{2}1} & Y_{\dot{2}2} & Y_{\dot{2}3} & Z_{\dot{2}\dot{1}} & Z_{\dot{2}\dot{2}} & Z_{\dot{2}\dot{3}} \\ Y_{\dot{3}1} & Y_{\dot{3}2} & Y_{\dot{3}3} & Z_{\dot{3}\dot{1}} & Z_{\dot{3}\dot{2}} & Z_{\dot{3}\dot{3}} \end{array} \right) \equiv \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{pmatrix}. \quad (4.5.3)$$

2. Расписывая выражения (4.5.1) (через тензор Риччи) или (4.5.2) (через тензор Вейля) в локально декартовой координатной системе (по компонентам), имеем соотношения:

$$(00) \rightarrow -X_{11} - X_{22} - X_{33} = \sigma; \quad (4.5.4)$$

$$(11) \rightarrow X_{11} - Z_{\dot{2}\dot{2}} - Z_{\dot{3}\dot{3}} = -\sigma; \quad (4.5.5)$$

$$(22) \rightarrow X_{22} - Z_{\dot{1}\dot{1}} - Z_{\dot{3}\dot{3}} = -\sigma; \quad (4.5.6)$$

$$(33) \rightarrow X_{33} - Z_{\dot{1}\dot{1}} - Z_{\dot{2}\dot{2}} = -\sigma; \quad (4.5.7)$$

$$(01) \rightarrow Y_{2\dot{3}} - Y_{3\dot{2}} = 0; \quad (02) \rightarrow -Y_{1\dot{3}} + Y_{3\dot{1}} = 0; \quad (03) \rightarrow Y_{1\dot{2}} - Y_{2\dot{1}} = 0; \quad (4.5.8)$$

$$(12) \rightarrow X_{12} + Z_{\dot{2}\dot{1}} = 0; \quad (13) \rightarrow X_{13} + Z_{\dot{3}\dot{1}} = 0; \quad (23) \rightarrow X_{23} + Z_{\dot{2}\dot{3}} = 0. \quad (4.5.9)$$

Соотношения (4.5.8) означают известные свойства симметрии компонент подматрицы  $Y$ , а из (4.5.9) следует связь недиагональных компонент подматриц  $X$  и  $Z$ :  $X_{lk} = -Z_{ik}$  при  $l \neq k$ .

Для диагональных компонент этих подматриц получаем соотношения, беря различные комбинации из (4.5.4)–(4.5.7):

$$[(4.5.4) + (4.5.5) + (4.5.6) - (4.5.7) = 0]; \rightarrow X_{33} = -Z_{33};$$

$$[(4.5.4) + (4.5.5) - (4.5.6) + (4.5.7) = 0]; \rightarrow X_{22} = -Z_{22};$$

$$[(4.5.4) - (4.5.5) + (4.5.6) + (4.5.7) = 0]; \rightarrow X_{11} = -Z_{11},$$

откуда имеем окончательно

$$X_{lk} = -Z_{ik}. \quad (4.5.10)$$

Следовательно, матрица (4.5.3) имеет структуру

$$(M_{ik}) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}. \quad (4.5.11)$$

Для сумм диагональных компонент введенных подматриц из (4.5.4) и (4.5.10) имеем значения:

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = -\sigma; \quad Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} = 0. \quad (4.5.12)$$

Таким образом, 10 условий (4.5.1) снижают число алгебраически независимых компонент тензора Римана–Кристоффеля (тензора Вейля) до десяти (5 компонент  $X_{kl}$  и 5 компонент  $Y_{ki}$ ).

3. Построим характеристическое уравнение для введенной матрицы в виде

$$\|M_{ik} - \lambda \tilde{g}_{ik}\| = 0, \quad (4.5.13)$$

где  $\tilde{g}_{ik}$  — метрический тензор бивекторного пространства:

$$\tilde{g}_{ik} \rightarrow g_{\alpha\beta\mu\nu} = (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (4.5.14)$$

Легко видеть, что  $g_{\alpha\beta\mu\nu}$  обладает такими же свойствами симметрии, что и тензор Римана–Кристоффеля.

В локально-декартовой координатной системе 4-мерного пространства-времени матрица  $(\tilde{g}_{ik})$  (при ранее введенных обозначениях парных

индексов) имеет вид

$$(\tilde{g}_{ik}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.5.15)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (4.5.13) можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} X + \lambda I & Y \\ Y & -X - \lambda I \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.16)$$

4. В несколько этапов с помощью преобразований, не меняющих значение определителя, приведем (4.5.16) к более удобному виду.

1. Прибавим к матрицам первого 3-столбца в (4.5.16) соответствующие элементы второго 3-столбца, умноженные на  $i$ . В итоге имеем

$$\begin{vmatrix} X + iY + \lambda I & Y \\ -i(X + iY + \lambda I) & X - \lambda I \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.17)$$

2. Прибавим к матрицам второй 3-строки соответствующие элементы первой 3-строки, умноженные на  $i$ , что приводит к выражению

$$\begin{vmatrix} X + iY + \lambda I & Y \\ 0 & -X + iY - \lambda I \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.18)$$

3. Прибавим к матрицам второго 3-столбца соответствующие элементы первого 3-столбца, умноженные на  $i/2$ , тогда имеем

$$\begin{vmatrix} X + iY + \lambda I & \frac{i}{2}(X - iY + \lambda I) \\ 0 & -(X - iY + \lambda I) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.19)$$

4. Прибавим к матрицам первой 3-строки соответствующие элементы второй 3-строки, умноженные на  $i/2$ . В итоге получаем

$$\begin{vmatrix} X + iY + \lambda I & 0 \\ 0 & -(X - iY + \lambda I) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.20)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (4.5.16) привелось к виду

$$\det(X + iY + \lambda I) \times \det(X - iY + \lambda I) = 0, \quad (4.5.21)$$

т. е. для решения поставленной задачи достаточно рассмотреть  $3 \times 3$ -матрицу  $(X + iY + \lambda I)$ .

### 4.5.2. Алгебраическая классификация Петрова

Изложим основные элементы алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна [129].

#### 1. Общий случай классификации $\lambda$ -матриц

Под  $\lambda$ -матрицей понимается матрица, элементы которой представляют собой многочлены некоторого, вообще говоря, комплексного параметра  $\lambda$  (см., например, [113]). Для  $\lambda$ -матриц определены так называемые *элементарные* преобразования, включающие в себя умножение строк или столбцов на ненулевые числа и прибавления к строкам (столбцам) других строк (столбцов), умноженных на произвольный многочлен. Две  $\lambda$ -матрицы одинаковых размеров называются эквивалентными, если конечным числом элементарных преобразований можно получить из одной матрицы другую. Все  $\lambda$ -матрицы одинаковых размеров разбиваются на непересекающиеся *классы эквивалентности*.

Каждый класс эквивалентности характеризуется своей канонической матрицей ( $\lambda$ -матрицей в каноническом виде), к которой путем элементарных преобразований может быть приведена любая матрица данного класса эквивалентности. Каноническая матрица состоит из  $\lambda$ -многочленов, расположенных лишь на главной диагонали, причем каждый последующий из них делится на предыдущий (либо равен нулю). Многочлены нулевой степени (единицы) стоят в начале диагонали, а нули — в конце.

Эти многочлены называются *инвариантными множителями* матрицы и обозначаются через  $E_k(\lambda)$ . Каждый инвариантный множитель можно разложить на биномиальные множители (каждый  $i$ -й корень многочлена  $E_k(\lambda)$  есть собственное значение  $\lambda$ -матрицы некоторой кратности  $\alpha_{ki}$ ):

$$E_k = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{k1}} \dots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_{kr}} = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_{ki}}. \quad (4.5.22)$$

Классы эквивалентности можно охарактеризовать следующей символической характеристикой:

$$[(\alpha_{11} \dots \alpha_{k1} \dots \alpha_{N1}) \dots (\alpha_{1r} \dots \alpha_{kr} \dots \alpha_{Nr})], \quad (4.5.23)$$

причем

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^r \alpha_{ki} = N, \quad (4.5.24)$$

где  $N$  — порядок  $\lambda$ -матрицы, а  $r$  — число ее различных собственных значений.

Часто используется более грубая классификация классов эквивалентности по наборам возможных целых чисел — корней характеристической матрицы, в сумме равных числу корней:

$$T_1 \rightarrow [11 \cdots 1]; \quad T_2 \rightarrow [1 \cdots 2]; \quad \cdots \quad T_a \rightarrow [r]. \quad (4.5.25)$$

Алгебраическая классификация произвольной квадратной матрицы  $A$  (не являющейся  $\lambda$ -матрицей) обычно производится посредством задания соответствующей ей характеристической  $\lambda$ -матрицы  $A(\lambda)_{ik} = A_{ik} - \lambda \delta_{ik}$  и нахождения канонического вида последней.

Поиск инвариантных множителей можно осуществлять различными способами. В частности, один из методов заключается в составлении ряда многочленов  $D_k(\lambda)$ , каждый из которых есть наибольший общий делитель всех миноров  $k$ -го порядка матрицы  $A(\lambda)$ . Имеет место теорема линейной алгебры о том, что всякий инвариантный множитель представим в виде

$$E_k(\lambda) = \frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}, \quad D_0(\lambda) = 1. \quad (4.5.26)$$

Инвариантные множители  $E_k(\lambda)$  полностью определяют канонический вид матрицы  $A(\lambda)$ , а вместе с ней и тип исходной матрицы  $A$ .

## II. Классификация $3 \times 3$ -матриц

Нас интересуют  $3 \times 3$ -матрицы из (4.5.20). В этом случае имеется 6 возможных канонических видов, которые невозможно перевести друг в друга элементарными преобразованиями. Эти 6 видов  $\lambda$ -матриц составляют три типа, которые представлены на диаграмме Пенроуза—Петрова, используемой в алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна (см. рис. 4.5):

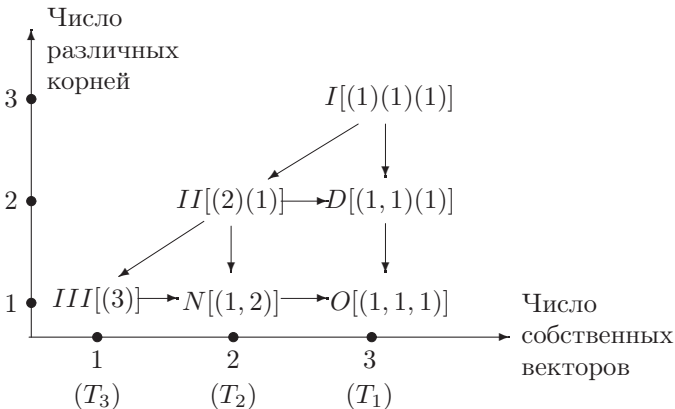


Рис. 4.5. Диаграмма Пенроуза—Петрова



Из диаграммы видно, что первый тип по Петрову  $T_1$  состоит из трех подтипов:  $I$ ,  $D$  и  $O$ , второй тип по Петрову  $T_2$  содержит два подтипа  $II$  и  $N$ , а третий тип  $T_3$  определяется одним подтипом  $III$ . Для каждого подтипа справа указана его характеристика (4.5.23).

Выпишем канонические матрицы для названных подтипов по Петрову:

**Подтипы первого типа:**

$$I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \end{pmatrix}; \quad (4.5.27)$$

$$D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \end{pmatrix}; \quad (4.5.28)$$

$$O \rightarrow \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1) \end{pmatrix}. \quad (4.5.29)$$

**Подтипы второго типа:**

$$II \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) \end{pmatrix}; \quad (4.5.30)$$

$$N \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5.31)$$

**Третий тип по Петрову (подтип  $III$ ):**

$$III \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - \lambda_1)^3 \end{pmatrix}. \quad (4.5.32)$$

### 4.5.3. Инварианты тензора кривизны и векторы Дебеве в пространствах различных подтипов

1. Алгебраическую классификацию Петрова пространств Эйнштейна можно изложить без использования  $\lambda$ -матриц, а непосредственно опираясь на свойства решений характеристического уравнения (4.5.13) (см., например, [94]), которое можно представить в виде  $M_{ik}b_k = \lambda b_i$ , где  $b_i$  —

компоненты собственного вектора матрицы  $M_{ik}$ . Эта система в общем случае имеет три комплексных корня  $\lambda_{(i)}$ , которые, вследствие равенства нулю шпура матрицы  $M_{kk} = 0$ , удовлетворяют условию  $\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)} = 0$ . Таким образом, в самом общем случае решение характеризуется четырьмя вещественными числами. Алгебраические подтипы пространств Эйнштейна характеризуются различным числом вещественных чисел, что отображено расположением подтипов по вертикали на диаграмме Пенроуза—Петрова 4.6.

2. С другой стороны, римановы пространства можно охарактеризовать четырьмя квадратичными и кубическими инвариантами тензора кривизны:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}; \quad R_{\alpha\beta\mu\nu}{}^*R^{\alpha\beta\mu\nu}; \quad R_{\alpha\beta\sigma\mu}R^{\sigma\mu\gamma\lambda}R_{\gamma\lambda}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}; \quad R_{\alpha\beta\sigma\mu}R^{\sigma\mu\gamma\lambda}{}^*R_{\gamma\lambda}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}, \quad (4.5.33)$$

где использованы обозначения для дуального тензора кривизны

$${}^*R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}R^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\sigma}E^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}R^{\mu\nu}{}_{\cdot\cdot\lambda\sigma}E^{\alpha\beta\lambda\sigma}. \quad (4.5.34)$$

Здесь  $E^{\mu\nu\lambda\sigma}$  — тензор Леви-Чивиты (1.2.12). Показано, что корни характеристического уравнения  $\lambda_{(i)}$  представляются в виде комбинаций записанных инвариантов тензора кривизны.

3. Для подтипов *N* и *III* все выписанные инварианты тензора кривизны обращаются в нуль, т. е. имеет место своеобразная ситуация, когда 4-мерное пространство-время искривлено, а его тензорные инварианты равны нулю.

В работах Мизры и Сингха показано, что инварианты тензора кривизны (4.5.33) можно переписать в обозначениях, напоминающих компоненты напряженности электромагнитного поля:

$$E_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau^\beta\tau^\mu \equiv X_{\alpha\lambda}; \quad H_{\alpha\lambda} = {}^*R_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau^\beta\tau^\mu. \quad (4.5.35)$$

В этих обозначениях равенство нулю инвариантов означает

$$E_{\alpha\lambda}E^{\alpha\lambda} - H_{\alpha\lambda}H^{\alpha\lambda} = 0; \quad E_{\alpha\lambda}E_{\beta}^{\lambda}E^{\beta\gamma} = 0; \quad H_{\alpha\lambda}H_{\beta}^{\lambda}H^{\beta\gamma} = 0, \quad (4.5.36)$$

т. е. имеют место свойства, аналогичные свойствам тензора электромагнитного поля в электромагнитной волне. Это послужило основанием для многих исследователей трактовать алгебраически специальные подтипы *N* и *III* как описывающие свободные гравитационные волны.

4. С собственными векторами характеристической матрицы связаны векторы Дебеве  $k_{\mu}$ , так названные по имени автора [54], установившего

характерные соотношения (уравнения Дебеве) для этих векторов и компонент тензора Римана—Кристоффеля, позволяющие различать подтипы пространств. Приведем эти уравнения для отдельных подтипов.

1) Уравнения Дебеве для подтипа I по Петрову имеют вид:

$$k^\beta k^\mu k_{[\rho} R_{\alpha]\beta\mu} k_{\lambda]} = 0, \quad (4.5.37)$$

где  $[\dots]$  — символ антисимметризации.

2) Уравнения Дебеве для подтипов II и D имеют вид:

$$k^\beta k^\mu (R_{\alpha\beta\mu\nu} k_\lambda - R_{\alpha\beta\mu\lambda} k_\nu) = 0. \quad (4.5.38)$$

3) Уравнения Дебеве для подтипа III представляются в виде

$$k^\mu (R_{\alpha\beta\mu\nu} k_\lambda - R_{\alpha\beta\mu\lambda} k_\nu) = 0. \quad (4.5.39)$$

4) Уравнение для подтипа N принимает вид

$$k^\alpha R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad (4.5.40)$$

позволивший трактовать это соотношение как условие ортогональности волнового вектора  $k^\alpha$  компонентам напряженности свободной гравитационной волны.

5. Дебеве показал, что для пространств подтипов N и III имеют место соотношения:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu = 0; \quad {}^* R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu = 0. \quad (4.5.41)$$

#### 4.5.4. Примеры точных решений различных подтипов по Петрову

В первой части книги рассмотрены метрики Шварцшильда, Керра, а в этой главе приведены и другие сферически-симметричные и аксиально-симметричные метрики, принадлежащие к подтипу D по классификации Петрова. К метрикам подтипа O принадлежат однородные изотропные космологические решения Фридмана для всех трех видов пространственных сечений. Приведем примеры метрик других подтипов.

### Метрики подтипа I

Примером такой метрики являются так называемые **цилиндрические волны Эйнштейна—Розена**:

$$ds^2 = \exp(2\gamma - 2\psi)(dx_o^2 - d\rho^2) - \exp(2\psi)dz^2 - \rho^2 \exp(-2\psi)d\varphi^2, \quad (4.5.42)$$

где  $\gamma$  и  $\psi$  — функции от  $x^o$  и  $\rho$ , удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_o^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} = 0; \quad (4.5.43)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_o} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_o} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial x_o}. \quad (4.5.44)$$

Видно, что уравнение (4.5.43) для  $\psi$  является хорошо известным линейным волновым, когда  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$  имеют смысл обычных цилиндрических координат. Его решение легко записать через цилиндрические функции. Подставляя такое решение в (4.5.44), нетрудно отыскать соответствующую функцию  $\gamma$ .

### Метрики подтипа N

**1. Метрика Такено** чаще всего приводится в виде

$$ds^2 = (P + S)dx_o^2 - 2Sdx_o dx_1 - (P - S)dx_1^2 - Bdx_2^2 - Adx_3^2 - 2Ddx_2 dx_3, \quad (4.5.45)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $P$  и  $S$  — функции аргумента  $x^o - x^1$ . Уравнения Эйнштейна соответствуют условию, налагаемому на функции

$$M_{,1,1} - \frac{(M_{,1})^2}{M} - \frac{A_{,1}B_{,1}}{(D_{,1})^2} = 0, \quad (4.5.46)$$

где  $M = AB - D^2$ . Здесь везде единица после запятой означает дифференцирование по  $x^1$ .

**2. Метрика Розена** может быть представлена в виде

$$ds^2 = \exp(2\mu)(dx_o^2 - dx_1^2) - u^2(\exp(2\nu)dx_2^2 - \exp(-2\nu)dx_3^2), \quad (4.5.47)$$

где две неизвестные функции  $\mu(u)$  и  $\nu(u)$  зависят от аргумента  $u = x^o - x^1$  и удовлетворяют соотношению:

$$2\mu_{,u} = u(\nu_{,u})^2. \quad (4.5.48)$$

**3. Решение Переса** представляется в виде

$$ds^2 = dx_o^2 - dx_1^2 - 2\varphi(dx_o + dx_1)^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (4.5.49)$$

где одна неизвестная функция  $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$  удовлетворяет соотношению

$$\varphi_{,2,2} + \varphi_{,3,3} = 0. \quad (4.5.50)$$

**4. Объемные волны Бонди—Пирани—Робинсона** описываются метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2 dx_3 + \gamma dx_3^2, \quad (4.5.51)$$

где три функции  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  от аргумента  $u = x^0 + x^1$  удовлетворяют уравнению

$$\lambda'' - \frac{1}{2}\lambda'(\ln \lambda)' - \alpha'\gamma' - (\beta')^2 = 0; \quad \lambda = \alpha\gamma - \beta^2 > 0. \quad (4.5.52)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $u$ .

## 4.6. Соответствия между римановыми пространствами

Охарактеризуем несколько видов наиболее интересных соответствий между пространствами, определенными на одном и том же многообразии точек.

### 4.6.1. Конформное соответствие

1. Два римановых пространства с метрическими тензорами  $g_{\alpha\beta}(x)$  и  $\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)$ , определенными на одном и том же многообразии точек, называются *конформно соответствующими*, если

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = \exp[2\sigma(x)]g_{\alpha\beta}, \quad (4.6.1)$$

где  $\sigma(x)$  — некоторая скалярная функция координат (см., например, [129]). В таких пространствах длины векторов с одинаковыми компонентами  $dx^\alpha$  различаются множителем, зависящим только от выбранной точки:

$$d\tilde{s} = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta} = \exp[\sigma(x)]ds. \quad (4.6.2)$$

В конформно соответствующих пространствах углы между парами векторов одинаковы. Действительно, для углов между векторами с компонентами  $dx^\alpha$  и  $\delta x^\alpha$  в двух конформно соответствующих пространствах имеем

$$\cos(dx^\alpha, \delta x^\alpha) = \frac{g_{\alpha\beta}dx^\alpha \delta x^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \sqrt{g_{\lambda\kappa}\delta x^\lambda \delta x^\kappa}}. \quad (4.6.3)$$

2. Из определения (4.6.1) следуют соотношения между геометрическими величинами конформно соответствующих римановых про-

странств произвольной сигнатуры и размерности  $n$ :

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \exp(-2\sigma)g^{\alpha\beta}; \quad \tilde{g}_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta; \quad \sqrt{-\tilde{g}} = \exp(n\sigma)\sqrt{-g}; \quad (4.6.4)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + g_\beta^\alpha \sigma_\gamma + g_\gamma^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} g^{\alpha\lambda} \sigma_\lambda; \quad (4.6.5)$$

$$\tilde{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + g_\delta^\alpha \sigma_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha \sigma_{\beta\delta} + g^{\alpha\nu} (g_{\beta\gamma} \sigma_{\nu\delta} - g_{\beta\delta} \sigma_{\nu\gamma}) + (g_\delta^\alpha g_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha g_{\beta\delta}) \Delta_1 \sigma; \quad (4.6.6)$$

$$\tilde{R}_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - (n-2)\sigma_{\beta\delta} - [\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma] g_{\beta\delta}; \quad (4.6.7)$$

$$\tilde{R} = \exp(-2\sigma)[R - 2(n-1)\Delta_2 \sigma - (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma], \quad (4.6.8)$$

где использованы обозначения:

$$\sigma_\mu = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta};$$

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma. \quad (4.6.9)$$

3. Из компонент тензора кривизны можно сконструировать конформно инвариантный тензор

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \frac{1}{(n-2)} (g_\gamma^\alpha R_{\beta\delta} - g_\delta^\alpha R_{\beta\gamma} + R_\gamma^\alpha g_{\beta\delta} - R_\delta^\alpha g_{\beta\gamma}) - \\ - \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_\delta^\alpha g_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha g_{\beta\delta}), \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

называемый *тензором Вейля*.

Тензор Вейля обладает следующими основными свойствами:

- 1) В пустом пространстве-времени (когда  $R_{\mu\nu} = 0$ )  $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ .
- 2) Тензор Вейля  $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  имеет те же самые свойства симметрии (1.4.3)–(1.4.6), что и тензор Римана–Кристоффеля.
- 3) Для тензора Вейля отсутствует аналог тензора Риччи, так как  $C_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 0$ .
- 4) В многообразии трех измерений  $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$ .
- 5) Необходимым и достаточным признаком конформно плоских многообразий при  $n > 3$  является обращение в нуль тензора Вейля.

Из приведенных соотношений следует, что *уравнения Эйнштейна* не обладают свойством конформной инвариантности.

### 4.6.2. Проективное соответствие римановых пространств

1. Два  $n$ -мерных римановых пространства с метриками  $g_{\mu\nu}(x)$  и  $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ , определенные на одном и том же многообразии точек  $\{x\}$ , называются *проективно соответствующими*, если геодезические линии в метрике  $g_{\mu\nu}$  являются геодезическими линиями в метрике  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  и наоборот (см. [129]). Проективное соответствие двух римановых пространств также описывается скалярной функцией координат  $\sigma(x)$ , которая следующим образом связывает две метрики:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2(n+1)} \ln \frac{\tilde{g}}{g}. \quad (4.6.11)$$

Из этого выражения можно получить следующие соотношения для произвольной размерности  $n$ :

$$\sigma_{,\lambda} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{n+1} (\tilde{\Gamma}_{\lambda\beta}^\beta - \Gamma_{\lambda\beta}^\beta); \quad \nabla_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = 2\tilde{g}_{\mu\nu}\sigma_{,\lambda} + \tilde{g}_{\mu\lambda}\sigma_{,\nu} + \tilde{g}_{\nu\lambda}\sigma_{,\mu}, \quad (4.6.12)$$

где ковариантная производная берется по связности, построенной из компонент метрики  $g_{\mu\nu}$ .

2. Выпишем ряд соотношений между геометрическими величинами в проективно соответствующих римановых пространствах произвольной размерности  $n$ :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + g_\mu^\alpha \sigma_{,\nu} + g_\nu^\alpha \sigma_{,\mu}; \quad (4.6.13)$$

$$\tilde{R}_{\nu\alpha\beta}^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu + g_\beta^\mu \sigma_{,\nu\alpha} - g_\alpha^\mu \sigma_{,\nu\beta}; \quad \tilde{R}_{\nu\beta} = R_{\nu\beta} - (n-1)\sigma_{,\nu\beta}, \quad (4.6.14)$$

где использовано обозначение  $\sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \nabla_\alpha \sigma - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}$ .

3. Из компонент тензора кривизны можно сконструировать проективно инвариантный тензор

$$\tilde{W}_{\nu\alpha\beta}^\mu = W_{\nu\alpha\beta}^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu - \frac{1}{n-1} (g_\beta^\mu R_{\nu\alpha} - g_\alpha^\mu R_{\nu\beta}), \quad (4.6.15)$$

также впервые введенный Вейлем. Пространство называется *проективно евклидовым*, если

$$W_{\nu\alpha\beta}^\mu = 0. \quad (4.6.16)$$

# Гравитация и электромагнетизм в 4-мерном пространстве-времени



В рамках 4-мерной ОТО тензорные величины описывают понятия геометрические и физические. Последние характеризуют негеометрические поля или материальные объекты, вносимые в 4-мерное искривленное пространство-время извне. Эта двойственность соответствует дуалистическому характеру геометрического подхода, отраженному в уравнениях Эйнштейна, где левая часть описывает геометрические свойства пространства-времени, а правая часть — физическую материю, ответственную за искривленность пространства-времени.

В ОТО к физическим (негеометрическим) понятиям относят как вещество (материальные частицы), так и поля, переносящие негравитационные взаимодействия между частицами. Особую значимость среди последних имеет электромагнитное поле, которое, — подобно гравитационному взаимодействию, — медленно убывает с расстоянием. Это побудило обсуждение аналогий между гравитацией и электромагнетизмом, желание их описывать схожим образом. Однако между ними имеется принципиальная разница:

гравитационное взаимодействие геометризовано, а электромагнитное — нет, что обусловило два направления исследований.

Первое направление исходит из принципиальной возможности геометризовать также электромагнитное поле, что привело бы к объединению гравитации и электромагнетизма на *единой геометрической основе*. При таком подходе эйнштейновскую ОТО следует рассматривать лишь как первый шаг, геометризацию электромагнитного поля — как второй шаг на пути геометризации всех полей переносчиков взаимодействий. Именно так понимал дальнейшее развитие ОТО сам А. Эйнштейн. (Решению данной задачи в рамках геометрии большего числа измерений посвящена третья часть книги.)

Другое направление исследований нацелено на переформулировку ОТО таким образом, чтобы она оказалась наиболее близкой теории электромагнитного поля. В какой-то степени этот подход можно интерпретировать как попытку рассмотрения двух видов взаимодействий

---



на единой основе, соответствующей физическому электромагнитному полю.

В этой главе рассматриваются аналогии, существующие между гравитацией (ОТО) и электромагнетизмом в рамках 4-мерной теории, в основе которых лежат сопоставления:

- 1) компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  сопоставляются с компонентами электромагнитного векторного потенциала  $A_\mu$ ;
- 2) компоненты монады  $\tau_\mu$  — с электромагнитным векторным потенциалом  $A_\mu$ ;
- 3) компоненты 3-мерного метрического тензора  $h_{ik}$  — с 3-мерным электромагнитным векторным потенциалом;
- 4) тензор кривизны  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  — с тензором напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ ;
- 5) тензор кривизны  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  — с квадратичным тензором электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ .

По соображениям, вскрытым в рамках многомерной теории, параллельно с электромагнитным полем (электромагнетизмом) рассматривается также скалярное поле (скаляризм).

## 5.1. Электромагнитное поле в искривленном пространстве-времени

Прежде чем рассматривать аналогии гравитации и электромагнетизма, выпишем ключевые понятия теории электромагнитного поля в искривленном пространстве-времени и приведем наиболее важные точные решения совместной системы уравнений Эйнштейна и Максвелла.

### 5.1.1. Уравнения Максвелла и Клейна—Фока в искривленном пространстве-времени

#### I. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле описывается *векторным потенциалом*  $A_\mu$ , определенным с точностью до калибровочных (градиентных) преобразований

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (5.1.1)$$

где  $f(x)$  — некоторая скалярная функция координат.

Инвариантный относительно калибровочных преобразований *тензор электромагнитной напряженности*  $F_{\mu\nu}$  записывается одинаково как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (5.1.2)$$

Первая пара уравнений Максвелла также записывается одинаково как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.1.3)$$

При учете определения (5.1.2) эти уравнения превращаются в тождества.

Вторая пара уравнений Максвелла в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (5.1.4)$$

где  $j^\mu$  — плотность тока заряженной материи.

Отметим, что уравнения Максвелла в вакууме (в 4-мерном многообразии) являются конформно инвариантными, если положить, что при конформных преобразованиях (4.6.1) ковариантные компоненты векторного потенциала остаются инвариантными, т. е. если

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu \rightarrow \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (5.1.5)$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля, помещаемый в правую часть уравнений Эйнштейна, имеет вид

$$T_{(A)}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left( F_{\cdot\alpha}^\mu F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (5.1.6)$$

Отсюда следует, что уравнения Эйнштейна для электровакуума, т. е. в присутствии лишь электромагнитного поля, представляются в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{2G}{c^4} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right).$$

Сворачивая эти уравнения с  $g^{\mu\nu}$ , легко убедиться, что для электровакуума  $R = 0$ , т. е. уравнения Эйнштейна существенно упрощаются:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2G}{c^4} \left( F_{\mu\alpha} F_{\nu}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (5.1.7)$$

Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем описывается посредством замены частных производных на «удлиненные» производные

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{c\hbar} A_\mu, \quad (5.1.8)$$

где  $q$  — электрический заряд частицы.

## II. Уравнение Клейна—Фока

В ОТО скалярные поля также являются негеометрическими, т. е. учитываются в правой части уравнений Эйнштейна. Кратко приведем

основные понятия теории скалярного поля в искривленном пространстве-времени.

Нейтральное массивное скалярное поле  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Клейна—Фока<sup>1)</sup>

$$\left[ g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi = g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \right) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi = 0. \quad (5.1.9)$$

Простейший (канонический) вид тензора энергии-импульса для нейтрального скалярного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[ \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right]. \quad (5.1.10)$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна в присутствии лишь скалярного поля записываются в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa \left( \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[ \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right] \right). \quad (5.1.11)$$

Сделаем несколько замечаний по теории скалярного поля в искривленном пространстве-времени.

- 1) Скалярное поле в физике выступает как вспомогательное, упрощенное поле, дублирующее в некоем приближении физические спинорные поля или более сложные комбинации из них.
- 2) Для безмассового скалярного поля  $\varphi$  уравнение Клейна—Фока обычно записывают в виде

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{6} R \varphi = 0, \quad (5.1.12)$$

поскольку оно является инвариантным при конформном преобразовании (4.6.1), если  $\varphi$  изменяется по закону

$$\tilde{\varphi} = \exp(-\sigma) \varphi. \quad (5.1.13)$$

- 3) При введении скалярного поля из различных физических соображений, как правило, получают более общие уравнения со слагаемым, содержащим скалярную кривизну  $R$ :

$$\left[ g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 + aR \right] \varphi = 0, \quad (5.1.14)$$

где  $a$  — некоторая константа. Ее значение зависит от способа получения этого уравнения или других соображений:  $a = 1/4$  — при получении уравнения Клейна—Фока квадрированием уравнений Ди-

<sup>1)</sup>В литературе это уравнение больше известно под названием уравнение Клейна—Гордона, однако в работе В. А. Фока [166] оно было записано раньше, чем у Гордона. По этой причине ряд отечественных авторов это уравнение называет уравнением Клейна—Фока.

рака в искривленном пространстве-времени (см. гл. 7);  $a = -1/3$  — при выводе уравнения Клейна—Фока на основе фейнмановского суммирования по историям в ОТО (см. гл. 13);  $a = -1/6$  — при отмеченном выше требовании конформной инвариантности уравнений для безмассового скалярного поля.

- 4) Уравнение Клейна—Фока (как для массивного, так и безмассового скалярного поля) в 4-мерном пространстве-времени является геодезически-инвариантным при коэффициенте  $a = 1/3$  перед скалярной кривизной в (5.1.14), если  $\varphi$  изменяется при геодезическом преобразовании по закону

$$\varphi' = \exp(\sigma)\varphi. \quad (5.1.15)$$

Для произвольной размерности  $n$  геодезически инвариантное уравнение Клейна—Фока следует писать в виде

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\varphi + \frac{1}{n-1}R\varphi = 0. \quad (5.1.16)$$

- 5) В литературе можно найти более сложные, нежели (1.5.10), выражения для тензора энергии-импульса скалярного поля. Особенно это относится к случаям заряженных скалярных полей.

### 5.1.2. «Частицеподобные» точные решения уравнений Эйнштейна

«Частицеподобными» часто называют решения совместной системы уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока с источником в виде некоего компактного материального образования (частицы-центра). Обычно говорят, что такие решения могут зависеть от 8 характерных констант:  $M$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $Q$ ,  $q$ ,  $g$ ,  $\Lambda$ . Эти параметры интерпретируются следующим образом:

$M$  — масса, или чаще используется  $r_g = 2GM/c^2$ ;

$n$  — параметр НУТ (Ньюмен, Унти, Тамбурино) — мнимая масса (?);

$a$  — параметр, характеризующий вращение источника;

$b$  — ускорение источника;

$Q$  — заряд источника скалярного поля;

$q$  — электрический заряд источника, или часто используется  $e_g = \sqrt{G}q/c^2$ ;

$g$  — магнитный заряд (магнитного монополя);

$\Lambda$  — космологическая постоянная.

Часто три пары констант группируют следующим образом:  $M + in$ ,  $a + ib$ ,  $q + ig$ . Ниже приведены физически наиболее интересные метрики такого сорта.

## I. Сферически симметричные метрики

**1. Метрика Райсснера—Нордстрема** — электровакуумное статическое сферически-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна и Максвелла

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2G}{c^4} \left( F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right); \quad F_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.1.17)$$

в координатах кривизн имеет вид

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2} \right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2} \right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (5.1.18)$$

$$F^{01} = E^1 = \frac{q}{r^2},$$

где  $q$  — электрический заряд.

**2. Метрика Фишера** — статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Клейна—Фока для безмассового скалярного поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa \left( \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{;\alpha} \varphi_{;\beta} \right); \quad g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \varphi = 0. \quad (5.1.19)$$

Данная метрика записывается в более сложном виде

$$ds^2 = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{r^2(z)} (dx^0)^2 - \frac{r^2(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz^2 - r^2(z) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.1.20)$$

где использованы обозначения:

$$r^2(z) = (z-z_1)^{1-\alpha} (z-z_2)^{1+\alpha}; \quad z_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + GQ^2}; \quad \alpha = \left| \frac{(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)} \right|; \quad (5.1.21)$$

$\mu$  — постоянная интегрирования (обычно полагают  $\mu = -r_g/2$ );  $Q$  — скалярный заряд источника. Скалярное поле убывает обратно пропорционально  $r$ , а его напряженность — обратно пропорционально квадрату радиальной координаты, как и должно быть в пространстве трех измерений.

## II. Аксиально-симметричные метрики

**1. Метрика Керра—Ньюмена** является обобщением метрики Керра на случай электрически заряженного вращающегося тела (является решением системы уравнений Эйнштейна и Максвелла):

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_g r - e_g^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r + e_g^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{(r_g r - e_g^2) a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{2(r_g r - e_g^2) a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dx^0 d\varphi. \quad (5.1.22)$$

**2. Метрика НУТ** (Ньюмен, Унти, Тамбурино) — вакуумное решение уравнений Эйнштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}\right) \left(dx^o + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}} - (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.1.23)$$

Физическая интерпретация до конца не выяснена. Высказано предположение, что источником данной метрики можно считать тонкий луч света (световую нить).

**3. Обобщением решения НУТ, зависящим от пяти констант,** является метрика (записана не в координатах Бойера—Линдквиста):

$$ds^2 = \Phi(r) \left(dx^o + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{\Phi(r)} - (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.1.24)$$

где

$$\Phi(r) = 1 - \frac{r_g r + 2n^2 + (8/3)\Lambda n^4}{r^2 + n^2} + \frac{q^2 + g^2}{r^2 + n^2} + \frac{\Lambda}{3}(r^2 + 5n^2).$$

**4.** Выпишем в координатах Бойера—Линдквиста метрику, которая так же обобщает решение НУТ, как метрика Керра обобщает метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + n^2 - 2an \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta}\right) (dx^o)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + a^2 - r_g r - n^2} dr^2 - \frac{\sin^2 \theta (r^2 + a^2 + n^2)^2 - (r^2 + a^2 - r_g r - n^2)(a \sin^2 \theta + 2n \cos \theta)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} d\varphi^2 + \frac{2[2a \sin^2 \theta (r_g r / 2 + n^2) - 2n(r^2 + a^2 - r_g r - n^2) \cos \theta]}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} dx^o d\varphi - [r^2 + (n - a \cos \theta)^2] d\theta^2. \quad (5.1.25)$$

## 5.2. Метрический тензор как аналог электромагнитного векторного потенциала

К первой аналогии гравитации и электромагнетизма отнесем сопоставление компонент метрического тензора с компонентами электромагнитного векторного потенциала:

$$A_\mu \longleftrightarrow g_{\mu\nu}. \quad (5.2.1)$$

При данной аналогии калибровочным условиям Лоренца в электродинамике соответствуют гармонические координатные условия в ОТО:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = 0. \quad (5.2.2)$$

Из сопоставления (5.2.1) следует аналогия тензора электромагнитного поля и символов Кристоффеля:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad \longleftrightarrow \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left( \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (5.2.3)$$

### 5.2.1. Лагранжев формализм электромагнитного поля

До сих пор при изложении ОТО мы придерживались геометрической формулировки, т. е. опирались исключительно на геометрические понятия и рассуждения. Примерно таким путем шел Эйнштейн, создавая ОТО. В геометрическом подходе уравнения Эйнштейна представляют собой постулат теории. Однако имеются и другие способы рассуждений. Так, в физике XX в. наиболее распространенным являлся лагранжев подход, когда вместо фундаментальных уравнений физики постулируется действие или функция Лагранжа системы, из которой стандартными методами вариационного исчисления выводятся уравнения поля. Именно таким путем Гильберт пришел к уравнениям Эйнштейна.

Напомним, что функция Лагранжа  $\mathcal{L}$  в теории поля выбирается из следующих соображений:

- 1)  $\mathcal{L}$  должна быть инвариантом;
- 2)  $\mathcal{L}$  должна содержать производные не выше первого порядка, чтобы уравнения поля были дифференциальными уравнениями второго порядка.

Добавим к этому, что для получения линейных уравнений требуется, чтобы функция Лагранжа была квадратичной по характеристикам поля.

Для электромагнитного поля плотность функции Лагранжа в искривленном пространстве-времени выбирается в виде<sup>1)</sup>

$$\mathcal{L}_{(A)} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (5.2.4)$$

где тензор электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$  выражается через компоненты векторного потенциала, как первичной электромагнитной характери-

<sup>1)</sup>Размерность функции Лагранжа  $[\mathcal{L}_{(a)}] = [\text{г} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}]$  в системе СГС такова, что действие  $S = \int \mathcal{L}_{(a)} d^4x$  после интегрирования по 4-мерному объему имеет известную в механике размерность  $[S] = [\text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}]$ .

ки, посредством (5.1.2). Таким образом, все сформулированные условия на лагранжиан выполняются.

Уравнения Максвелла (в электровакууме) получаются из (5.2.4) вариационным методом, т. е. посредством действия оператора Эйлера—Лагранжа на плотность Лагранжиана

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(A)}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{(A)}}{\partial A_{\mu,\nu}} \right) = 0 \rightarrow \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5.2.5)$$

Для получения уравнений Максвелла с источниками (5.1.4) следует действовать оператором Эйлера—Лагранжа на сумму из плотности лагранжиана (5.2.4) и вклада заряженной материи.

Варьирование плотности функции Лагранжа электромагнитного поля (5.2.4) по компонентам метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  дает выражение для (метрического) тензора энергии-импульса электромагнитного поля (5.1.6), а варьирование суммы плотности скалярной кривизны и плотности электромагнитного поля (5.2.4) приводит к уравнениям Эйнштейна для электровакуума (5.1.7).

Таким образом, при данном способе сопоставления величин двух теорий второй паре уравнений Максвелла соответствуют уравнения Эйнштейна:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \iff R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}^{(A)}. \quad (5.2.6)$$

Очевидно, обе эти системы уравнений являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно сопоставляемых в (5.2.1) величин.

### 5.2.2. Лагранжева формулировка ОТО в метрическом представлении

В лагранжевой формулировке ОТО в метрическом представлении в качестве действия для гравитации и негеометрической материи постулируется выражение

$$I = I_{(gr)} + I_{(m)} = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \int (\mathcal{L}_{(gr)} + \mathcal{L}_{(m)}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.2.7)$$

где в качестве гравитационного лагранжиана выбирается скалярная кривизна (с размерным множителем)

$$\mathcal{L}_{(gr)} = -\frac{R}{2\kappa c}. \quad (5.2.8)$$

Очевидно, что второе из сформулированных выше условий на функцию Лагранжа для (5.2.8) не выполняется, однако можно показать, что



вторые производные от метрического тензора в скалярной кривизне можно представить в виде дивергентных слагаемых, которые при варьировании несущественны, так как полагается, что на бесконечности поля отсутствуют. Покажем, как это делается.

Первые два слагаемых в плотности гравитационного лагранжиана (со вторыми производными)

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} \right) \quad (5.2.9)$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \\ - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Здесь первые два слагаемых можно отбросить как полные производные, а оставшаяся часть вместе с двумя квадратичными по символам Кристоффеля слагаемыми в (5.2.9) теперь удовлетворяет второму из названных условий на функцию Лагранжа.

Остается только привести все слагаемые к наиболее компактному виду. Это делается с помощью соотношений:

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}} = \sqrt{-g}\Gamma_{\nu\sigma}^{\sigma}; \quad \nabla_{\lambda}g^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = -\Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}g^{\sigma\mu}.$$

В итоге имеем

$$\sqrt{-g}\mathcal{L}'_{(gr)} = \frac{\sqrt{-g}g^{\mu\nu}}{2\kappa c} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}). \quad (5.2.10)$$

Уравнения Эйнштейна получаются варьированием действия по метрике  $\delta g^{\mu\nu}$ , т. е. представляются как результат действия оператора Эйлера–Лагранжа на суммарный лагранжиан системы:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}}{\partial(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\alpha})} \right) = 0. \quad (5.2.11)$$

Несложно показать, что левая часть уравнений Эйнштейна получается из выражения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{2\kappa c}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_{(gr)}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\sqrt{-g}\mathcal{L}_{(gr)}}{\partial(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^{\alpha})} \right), \quad (5.2.12)$$

а правая часть уравнений Эйнштейна находится в виде

$$T_{\mu\nu} = \frac{2c}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_{(m)}}{\partial (\partial g^{\mu\nu} / \partial x^\alpha)} \right). \quad (5.2.13)$$

Собирая эти две части вместе, приходим к уравнениям Эйнштейна (1.4.16).

### 5.2.3. Формализм Палатини

Обратим внимание на тот факт, что к уравнениям Эйнштейна можно прийти вариационным методом Палатини, когда в качестве независимых геометрических величин рассматриваются 10 компонент метрического тензора  $g^{\alpha\beta}$  и 40 компонент символов Кристоффеля  $\Gamma_{\sigma\beta}^\gamma$ . В этом случае из вариации гравитационного действия

$$\begin{aligned} -\delta S = & \frac{1}{2\kappa c} \int \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\partial (\partial g^{\alpha\beta} / \partial x^\gamma)} \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x + \\ & + \frac{1}{2\kappa c} \int \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma} - \frac{\partial}{\partial x^\epsilon} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})}{\partial (\partial \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma / \partial x^\epsilon)} \right) \delta \Gamma_{\sigma\beta}^\gamma d^4x \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

получается 50 уравнений. Из первой строки (5.2.14), где не производится варьирование  $R_{\mu\nu}$  по метрике и ее производным, поскольку тензор Риччи записывается через символы Кристоффеля и их производные, получаются известные уравнения Эйнштейна (в вакууме):

$$\sqrt{-g} R_{\alpha\beta} + R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \sqrt{-g} \left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) = 0. \quad (5.2.15)$$

Из второй строки, где варьируется лишь тензор Риччи, получаются 40 уравнений:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-g} (g^{\sigma\beta} \Gamma_{\gamma\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g^{\mu\nu} \delta_\gamma^\beta - \Gamma_{\gamma\nu}^\beta g^{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\gamma}^\sigma g^{\mu\beta}) - \\ & - \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma} - g^{\sigma\beta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\gamma} + \sqrt{-g} \frac{\partial g^{\sigma\epsilon}}{\partial x^\epsilon} \delta_\gamma^\beta + g^{\sigma\epsilon} \delta_\gamma^\beta \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\epsilon} = 0. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Используя формулы

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\gamma} = \sqrt{-g} \Gamma_{\gamma\lambda}^\lambda; \quad \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{\sigma\epsilon})}{\partial x^\epsilon} = -\sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g^{\mu\nu},$$

находим, что первые два слагаемых в первой строке (5.2.16) сокращаются с тремя последними слагаемыми второй строки. Далее, используя

известное соотношение

$$\frac{\partial g^{\sigma\beta}}{\partial x^\gamma} = -\Gamma_{\lambda\gamma}^\sigma g^{\lambda\beta} - \Gamma_{\lambda\gamma}^\beta g^{\lambda\sigma},$$

приходим к выводу, что выражение (5.2.16) соответствуют известным соотношениям (1.3.8) между символами Кристоффеля и компонентами метрического тензора.

Следует заметить, что здесь фактически использован постулат, что «символы Кристоффеля», а точнее, коэффициенты связности, выражаются через компоненты метрического тензора. Можно рассматривать более общие теории, где такой жесткой зависимости нет, например при использовании дифференциальных геометрий с неметричностью или кручением. В этом случае в уравнениях (5.2.16) сокращаются лишь слагаемые, содержащие производные от метрического тензора, и получается система из независимых уравнений для обобщенных коэффициентов связности (для тензоров неметричности и кручения).

### 5.3. Сопоставление монады в ОТО с электромагнитным векторным потенциалом

Этот способ построения аналогий основан на сопоставлении вектора монады (в хронометрической калибровке) с вектором электромагнитного потенциала

$$\tau_\mu \longleftrightarrow A_\mu. \quad (5.3.1)$$

Поскольку речь идет о монаде, то, прежде всего, следует записать основные величины и уравнения электромагнитного поля в монадном виде.

#### 5.3.1. Уравнения Максвелла в монадном виде

Материал данного раздела важен не только в связи с обсуждением геометрофизики — он существенен для решения большого круга практических задач, в которых рассматриваются явления электродинамики в неинерциальных системах отсчета как в искривленном, так и в плоском пространстве-времени. Выписанные ниже уравнения справедливы и в отсутствие гравитации.

*Векторный потенциал электромагнитного поля*  $A_\mu$  в монадном виде представляется следующим образом:  $A_\mu = \tau_\mu A + \tilde{A}_\mu$ , где введены скалярный ( $A$ ) и пространственно-спроектированные ( $\tilde{A}_\mu$ ) компоненты потенциала:

$$A = A_\mu \tau^\mu; \quad \tilde{A}_\mu = -h_\mu^\nu A_\nu. \quad (5.3.2)$$

Тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  записывается через введенные величины в виде:

$$F_{\mu\nu} = \left( \frac{\partial \tilde{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \tilde{A}_\mu}{\partial x^\nu} \right) + \left( \tau_\nu \frac{\partial A}{\partial x^\mu} - \tau_\mu \frac{\partial A}{\partial x^\nu} \right) + A(2\omega_{\nu\mu} + a_\nu \tau_\mu - a_\mu \tau_\nu). \quad (5.3.3)$$

Из этого выражения можно построить пространственно-спроектированный вектор напряженности электрического поля и тензор напряженности магнитного поля:

$$E_\nu = -\tau^\alpha h_\nu^\beta F_{\alpha\beta} = \partial_T \tilde{A}_\nu - (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu)A; \quad (5.3.4)$$

$$H_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta F_{\alpha\beta} = (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{A}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{A}_\mu) + 2A\omega_{\nu\mu}, \quad (5.3.5)$$

причем имеет место соотношение

$$F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \tau_\mu E_\nu - \tau_\nu E_\mu. \quad (5.3.6)$$

Характерно, что в определении пространственно-спроектированных компонент напряженностей входят физико-геометрические тензоры ускорения  $a_\mu$  и вращения  $\omega_{\mu\nu}$  неинерциальной системы отсчета.

Здесь использована тензорная запись напряженности магнитного поля. В групповых калибровках от нее можно перейти к более привычной в практических задачах векторной записи. Например, в хронометрической калибровке имеем

$$H^i = \varepsilon^{ikj} H_{kj}, \quad (5.3.7)$$

где  $\varepsilon^{ikj}$  — 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Первую пару уравнений Максвелла (5.1.3) в монадном виде можно представить в форме

$$\partial_T H_{\mu\nu} = (\tilde{\nabla}_\mu - a_\mu) E_\nu - (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu) E_\mu; \quad (5.3.8)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu H_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}_\nu H_{\sigma\mu} + \tilde{\nabla}_\sigma H_{\mu\nu} = 2(E_\mu \omega_{\nu\sigma} + E_\nu \omega_{\sigma\mu} + E_\sigma \omega_{\mu\nu}). \quad (5.3.9)$$

Подчеркнем, что в эти выражения входят характеристики неинерциальной системы отсчета.

Вторую пару уравнений Максвелла (5.1.4) можно представить в виде:

$$\tilde{\nabla}_\mu E^\mu - H^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J; \quad (5.3.10)$$

$$(\partial_T - d)E^\mu + (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu)H^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{J}^\mu, \quad (5.3.11)$$

где использованы обозначения для плотности заряда и вектора тока:  $J = \tau_\nu j^\nu$ ,  $\tilde{J}^\mu = -h_\nu^\mu j^\nu$ .

Легко видеть сходство уравнений Максвелла в монадном виде с общепринятой 3-мерной записью этих уравнений, однако в данном случае эти уравнения записаны не в инерциальных, а в произвольных системах отсчета, причем не только в принятых в ньютоновой теории «твердых» системах отсчета, но и деформируемых.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (5.1.6) имеет следующие проекции:

$$T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu = -\frac{1}{8\pi} \left( E_\lambda E^\lambda - \frac{1}{2} H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \right); \quad (5.3.12)$$

$$-T^{\mu\nu}h_\mu^\alpha\tau_\nu = -\frac{1}{4\pi} H^{\alpha\beta} E_\beta; \quad (5.3.13)$$

$$T^{\mu\nu}h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = -\frac{1}{4\pi} \left[ E^\alpha E^\beta + H_{\sigma}^\alpha H^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} h^{\alpha\beta} (2E_\lambda E^\lambda + H_{\lambda\sigma} H^{\lambda\sigma}) \right]. \quad (5.3.14)$$

Заметим, что первая пара уравнений Максвелла (5.3.8) — (5.3.9) очень похожа на монадные тождества (3.5.30) и (3.5.31), если соотнести друг с другом величины:

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow C_o H_{\mu\nu}; \quad a_\mu \rightarrow -2C_o E_\mu, \quad (5.3.15)$$

где  $C_o$  — некая размерная константа, которая будет определена ниже. Данная аналогия просматривается и при сравнении других монадных и электродинамических соотношений.

### 5.3.2. Системы отсчета, ассоциированные с электромагнитным полем

1. Отмеченная аналогия физико-геометрических тензоров и напряженностей электромагнитного поля послужила поводом для постановки вопроса об определении системы отсчета, ассоциированной с электромагнитным полем. Введем такую систему отсчета.

Поскольку векторный электромагнитный потенциал определен с точностью до калибровочных преобразований (5.1.1), то произвольную функцию  $f(x)$  можно подобрать так, чтобы векторный потенциал электромагнитного поля  $A^\mu$  был нормирован на плюс единицу. Тогда, используя введенный выше размерный коэффициент, можно ввести монаду  $\tau^\mu$ , ассоциированную с электромагнитным полем,

$$\tau_\mu = C_o A_\mu. \quad (5.3.16)$$

Заметим, что условие нормировки вектора  $\tau^\mu$  не фиксирует однозначно выбор функции  $f(x)$ . Еще остается возможность преобразования

$$\tau'_\mu = \tau_\mu + \nabla_\mu \tilde{f}, \quad (5.3.17)$$

где функция  $\tilde{f}$  удовлетворяет условию

$$2\tau^\mu \nabla_\mu \tilde{f} + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{f} \nabla_\nu \tilde{f} = 0. \quad (5.3.18)$$

Таким образом, калибровочные преобразования выделяют класс систем отсчета, ассоциированных с электромагнитным полем.

2. В силу (5.3.16) и того, что в данной системе отсчета

$$A = A_\mu \tau^\mu = 1/C_o; \quad \tilde{A}_\mu = -h_\mu^\nu \tau_\nu = 0, \quad (5.3.19)$$

тензор электромагнитного поля представляется в виде

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{C_o} (2\omega_{\mu\nu} + \tau_\mu a_\nu - \tau_\nu a_\mu). \quad (5.3.20)$$

Поскольку в общем случае рассматриваемые системы отсчета характеризуются отличным от нуля тензором угловой скорости вращения, то без ущерба для общности можно использовать хронометрическую калибровку.

Важно отметить, что в ассоциированных с электромагнитным полем системах отсчета в общем случае может быть отличным от нуля тензор скоростей деформаций, поскольку, согласно определению (5.3.16),

$$d_{\alpha\beta} = -\frac{C_o}{2} (A_{\mu;\nu} + A_{\nu;\mu}) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu; \quad d_{ik} = \frac{1}{2\sqrt{g^{\sigma\sigma}}} \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\sigma}. \quad (5.3.21)$$

При калибровочных преобразованиях (5.3.17) это выражение изменяется в зависимости от выбора скалярной функции  $\tilde{f}$ .

3. Как уже отмечалось, первая пара уравнений Максвелла совпадает с тождествами Риччи в монадном виде, а вторая пара уравнений Максвелла (5.3.10)–(5.3.11) (без источников) в данной системе отсчета соответствует дополнительным соотношениям на физико-геометрические тензоры:

$${}^* \tilde{\nabla}_k a^k + 2\omega_{ik} \omega^{ik} = 0; \quad (5.3.22)$$

$$({}^* \partial_T - d) a^k + 2({}^* \tilde{\nabla}_i - a_i) \omega^{ik} = 0. \quad (5.3.23)$$

4. Используя (5.3.22) и (5.3.23), выпишем уравнения Эйнштейна для электровакуума в системе отсчета, ассоциированной с электромагнитным полем. Выберем константу  $C_o$  из условия, чтобы слагаемые с квадратом угловой скорости вращения в левой и правой частях уравнений Эйнштейна сократились, что означает

$$C_o = \frac{G}{c^2} \rightarrow \frac{\sqrt{G}}{c^2} H_{ik} = \omega_{ik}; \quad \frac{\sqrt{G}}{c^2} E_k = -\frac{1}{2} a_k. \quad (5.3.24)$$

Тогда скалярную компоненту уравнений Эйнштейна можно представить в следующих двух эквивалентных видах:

$${}^* \partial_T d - d_{ik} d^{ik} + \frac{3}{4} ({}^* \nabla_i a^i - a_i a^i) = 0; \quad (5.3.25)$$

$$(d_{ik} d^{ik} - d^2) + \left( {}^* \nabla_i a^i - \frac{1}{2} a_i a^i \right) + {}^3 R = 0. \quad (5.3.26)$$

Здесь и в дальнейшем встречаются две устойчивые комбинации величин:  $*\nabla_i a_i - a_i a^i$  и  $d_{ik} + h_{ik}d$ . Последняя обладает свойствами:

$$(d_{ik} + h_{ik}d)(d^{ik} + h^{ik}d) = d_{ik}d^{ik} + d^2; \quad (d_{ik} + h_{ik}d)h^{ik} = 2d. \quad (5.3.27)$$

Используя эти комбинации, (5.3.25) можно представить еще в одном виде, связывающем характерные комбинации величин:

$$(*\partial_T + d)d - (d_{ik}d^{ik} + d^2) + \frac{3}{4}(*\nabla_i a^i - a_i a^i) = 0. \quad (5.3.28)$$

Смешанные компоненты уравнений Эйнштейна в электровакууме записываются в форме

$$\frac{1}{2}(*\partial_T + d)a_k + (*\nabla_i + a_i)(d_k^i + h_k^i d) = 0, \quad (5.3.29)$$

также представляющей собой связь вектора ускорения и тензора скоростей деформаций.

Пространственно-спроектированные компоненты уравнений Эйнштейна записываются в виде

$$\begin{aligned} (*\partial_T + d)(d_{ik} + h_{ik}d) + 2(d_i^j + h_i^j d)(d_{jk} + h_{jk}d) - h_{ik}(d_{js}d^{js} - 2d^2) + \\ + (\omega_k^j d_{ij} + \omega_i^j d_{jk}) + \frac{1}{2}(*\nabla_k a_i + *\nabla_i a_k - a_i a_k) + \\ + \frac{h_{ik}}{2}(*\nabla_j a^j - a_j a^j) + {}^3R_{ik} = 0. \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

Легко показать, что, взяв след этого уравнения, можно получить скалярную компоненту уравнения (5.3.26).

### 5.3.3. Классификация матриц 3-мерных составляющих тензора электромагнитного поля

1. При рассмотрении ряда вопросов теории электромагнитного поля используется 3-мерная векторная комбинация  $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{H}$ . Построим аналогичную 3-мерную комбинацию, но не для вектора, а для антисимметричного тензора:

$$\mathcal{F}_{ik} \equiv E_{ik} + iH_{ik}, \quad (5.3.31)$$

где введен тензор электрического поля

$$E_{ik} \equiv \varepsilon_{ikj} E^j. \quad (5.3.32)$$

2. Рассмотрим квадратную  $3 \times 3$ -матрицу из компонент комплексного тензора (5.3.31). Для нее применимы все соображения, использованные выше при классификации матриц из компонент тензора кривизны (Вейля), однако в данном случае из-за антисимметрии тензора  $\mathcal{F}_{ik}$  все обстоит значительно проще. Характеристическая матрица

$$\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F} - \lambda I_3 \quad (5.3.33)$$

приводится к виду

$$\mathcal{F}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2 - \mathcal{F}_{ik}\mathcal{F}^{ik}) \end{pmatrix}, \quad (5.3.34)$$

где

$$\mathcal{F}_{ik}\mathcal{F}^{ik} = (\vec{E}^2 - \vec{H}^2) + 2i(\vec{E}\vec{H}). \quad (5.3.35)$$

Если  $\mathcal{F}_{ik}\mathcal{F}^{ik}$  не равно нулю, то данная матрица принадлежит подтипу *I*, а если этот инвариант равен нулю, что соответствует случаю электромагнитных волн, то имеем подтип *III* по классификации Петрова.

### 5.3.4. Алгебраическая классификация систем отсчета

Поскольку в рамках второго способа сопоставления 3-мерным компонентам напряженностей электромагнитного поля соответствуют физико-геометрические тензоры, то естественно распространить приведенную выше алгебраическую классификацию на понятия системы отсчета [42]. Будем характеризовать систему отсчета 3-мерным комплексным тензором, составленным из ее физико-геометрических тензоров:

$$\mathcal{R}_{ik} = d_{ik} + a_{ik} + i\omega_{ik}, \quad (5.3.36)$$

где вектору ускорения системы отсчета  $a^j$  сопоставлен антисимметричный тензор  $a_{ik}$  по правилу (5.3.32):

$$a_{ik} = \varepsilon_{ikj}a^j. \quad (5.3.37)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть равен нулю тензор скоростей деформаций ( $d_{ik} = 0$ ), тогда, в согласии с сопоставлениями (5.3.15), имеем прямую аналогию подобного вида систем отсчета со случаем электромагнитного поля, рассмотренным выше, т. е. характеристическая матрица

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R} - \lambda I_3 \quad (5.3.38)$$

принадлежит подтипу *I*, если  $\mathcal{R}_{ik}\mathcal{R}^{ik} \neq 0$ , и относится к подтипу *III*, если выполняются условия:

$$a_k a^k - \omega_{ik}\omega^{ik} = 0; \quad (\vec{a}\vec{\omega}) = 0. \quad (5.3.39)$$

2. Пусть равен нулю тензор скоростей деформаций ( $d_{ik} = 0$ ) и один из антисимметричных тензоров, например тензор угловой скорости вращения ( $\omega_{ik} = 0$ ), тогда системы отсчета, характеризующиеся лишь вектором ускорения, принадлежат к подтипу *I*, поскольку первый из инвариантов в (5.3.39) отличен от нуля. Примером таких систем отсчета является хронометрически определенная система отсчета для метрики Шварцшильда, записанной в координатах кривизн.



3. Пусть система отсчета характеризуется лишь тензором скоростей деформаций, т. е. пусть  $d_{ik} \neq 0$ ,  $a_k = 0$ ,  $\omega_{ik} = 0$ . Можно показать, что такие системы отсчета могут принадлежать подтипам  $I$ ,  $D$  или  $O$ , т. е. могут относиться ко всем трем подтипам первого типа.

Примером такого вида систем отсчета могут послужить хронометрически или кинеметрически определенные системы отсчета для решения Бонди—Пирани—Робинсона (метрики типа  $N$ ), записанного в координатах (4.5.51).

4. Для систем отсчета, характеризуемых отличными от нуля тензорами скоростей деформаций и угловой скорости вращения, но равным нулю ускорением ( $d_{ik} \neq 0$ ;  $a_{ik} = 0$ ;  $\omega_{ik} \neq 0$ ), характеристическая матрица может быть подтипов  $I$ ,  $D$  и  $O$ , как и в предыдущем случае.

5. Все возможные подтипы могут реализовываться для общего случая, когда отличны от нуля все три физико-геометрических тензора.

Изложенные результаты просуммированы в табл. (5.3.40), где первые три колонки характеризуют значения физико-геометрических тензоров, а в четвертой колонке указаны возможные алгебраические подтипы соответствующей матрицы (5.3.36).

$d_{ik}$	$a_{ik}$	$\omega_{ik}$	Подтип $\mathcal{R}_{ik}$
0	0	0	$O$
0	0	$\neq 0$	$I$
0	$\neq 0$	0	$I$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$I, III$
$\neq 0$	0	0	$I, D, O$
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$I, D, O$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$I, D, O, II, N, III$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$I, D, O, II, N, III$

(5.3.40)

Напомним, что для систем отсчета, ассоциированных с электромагнитным полем, в общем случае отличен от нуля тензор скоростей деформаций.

## 5.4. Третья аналогия и дираковский канонический формализм ОТО

В 60–70-х годах в целях подготовки классической теории гравитации для квантования (для выделения динамических степеней свободы) была предложена гамильтонова формулировка ОТО. В ее развитие большой вклад внес П. Дирак [59], что позволяет называть этот подход к теории гравитации *дираковским каноническим формализмом*. Он строился

на примере электромагнитного поля, а затем разработанная методика переносилась на случай теории гравитации.

В данном подходе оказались сопоставленными компоненты 3-мерного метрического тензора (в кинеметрической калибровке) и 3-мерного электромагнитного векторного потенциала

$$h^{ik} \longleftrightarrow \tilde{A}^i. \quad (5.4.1)$$

### 5.4.1. Гамильтонова формулировка электромагнетизма

1. Плотность лагранжиана электромагнитного поля в кинеметрической калибровке монадного метода представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}'_{(A)} = & -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{8\pi c} \left( -h^{ik} {}^* \partial_T \tilde{A}_i {}^* \partial_T \tilde{A}_k + \right. \\ & \left. + 2H^{ik} {}^* \partial_T \tilde{A}_i ({}^* \nabla_k - a_k) A - h^{ik} ({}^* \nabla_i - a_i) A ({}^* \nabla_k - a_k) A + \frac{1}{2} H_{ik} H^{ik} \right), \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

где использованы проекции электромагнитных величин, введенные в (5.3.2).

2. В качестве обобщенных электромагнитных «координат» выбираются проекции векторного потенциала  $A$  и  $\tilde{A}_i$ , тогда обобщенными скоростями являются  ${}^* \partial_T A$  и  ${}^* \partial_T \tilde{A}_i$ . Для трех последних обобщенных скоростей импульсы находятся в виде

$$p^k = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}'_{(A)}}{\partial ({}^* \partial_T \tilde{A}_k)} = -\frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{4\pi c} E^k. \quad (5.4.3)$$

Обратные соотношения находим в виде

$${}^* \partial_T \tilde{A}_i = -\frac{4\pi c p_i}{\tau_o \sqrt{\hbar}} + ({}^* \nabla_i - a_i) A. \quad (5.4.4)$$

Скорость, соответствующая  $A$ , отсутствует в (5.4.2), поэтому для этой переменной получается так называемое *уравнение первичной связи*

$$p^o = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}'_{(A)}}{\partial ({}^* \partial_T A)} = 0. \quad (5.4.5)$$

3. Плотность гамильтониана электромагнитного поля определяется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{(A)} = & p^{o*} \partial_T A + p^{k*} \partial_T \tilde{A}_k - \tilde{\mathcal{L}}'_{(A)} = \\ = & p^{o*} \partial_T A - \frac{4\pi c p_k p^k}{\tau_o \sqrt{\hbar}} + p^k ({}^* \nabla_k - a_k) A + \frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{4\pi c} H_{ik} H^{ik}. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Уравнения второй пары Максвелла (5.3.11) (без источников) можно представить как половину канонических уравнений:

$${}^* \partial_T p^k = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(A)}}{\delta \tilde{A}_k} \rightarrow ({}^* \partial_T - d)E^k = ({}^* \nabla_i - a_i)H^{ki}. \quad (5.4.7)$$

Вторая пара канонических уравнений

$${}^* \partial_T \tilde{A}_k = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(A)}}{\delta p^k} \quad (5.4.8)$$

опять совпадает с соотношениями между импульсами и обобщенными скоростями (5.4.4).

4. Оставшееся уравнение (5.3.10) из второй пары уравнений Максвелла, называемое *уравнением вторичной связи*, может быть представлено в виде скобки Пуассона для импульса  $p^o$  и плотности гамильтониана:

$$\{p^o, \tilde{\mathcal{H}}_{(A)}\} = \frac{\tau_o \sqrt{\hbar}^*}{4\pi c} \nabla_k E^k = 0. \quad (5.4.9)$$

### 5.4.2. Гамильтонова формулировка теории гравитации

При построении гамильтоновой формулировки теории гравитации фактически использовались нормальные системы отсчета, т. е. основные формулы были близки к получаемым в рамках метода кинеметрических инвариантов. Однако авторы, участвовавшие в этих исследованиях, не владели идеологией и математическим аппаратом теории систем отсчета, поэтому здесь изложим гамильтонову формулировку теории гравитации с существенными для этой программы коррективами.

1. В качестве исходной плотности гравитационного лагранжиана возьмем плотность скалярной кривизны в кинеметрической калибровке

$$-2\kappa c \tilde{\mathcal{L}}'_{(gr)} = \sqrt{-g} {}^4 R = \tau_o \sqrt{\hbar} (2 {}^* \partial_T d - (d^2 + d_{ik} d^{ik}) + 2 ({}^* \nabla_k a^k - a_k a^k) + {}^3 R), \quad (5.4.10)$$

где, напомним, отсутствует тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Кроме того, здесь и в дальнейшем будем опускать значки у физико-геометрических тензоров, указывающие на кинеметрическую калибровку.

2. В выписанном выражении присутствуют слагаемые со вторыми производными. Избавимся от части из них. Для этого добавим к (5.4.10)

дивергентные члены:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-g}(a_k a^k - {}^* \nabla_k a^k) &= -2(\sqrt{-g} a^\lambda)_{,\lambda}; \\ 2\sqrt{-g}(d^2 - {}^* \partial_T d) &= -2(\tau^\lambda \sqrt{-g} d)_{,\lambda}. \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

В результате получим плотность гравитационного лагранжиана (с точностью до постоянного размерного коэффициента)

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = -\frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{2\kappa c} (d^2 - d_{ik} d^{ik} + {}^3R). \quad (5.4.12)$$

3. В работах Дирака и ряда других авторов в качестве обобщенных (гравитационных) «координат» фактически выбирались 4 компоненты  $\tau^\mu$  и 6 компонент контравариантного 3-мерного метрического тензора  $h^{ik}$ . Тогда из (5.4.12) сразу же видно, что в плотности гравитационного лагранжиана отсутствуют обобщенные скорости, соответствующие обобщенным «координатам»  $\tau^\mu$ . Дирак разработал формализм исключения этих переменных из числа динамических степеней свободы, а соответствующие им 4 уравнения Эйнштейна названы уравнениями связи.

В монадном подходе компоненты  $\tau^\mu$  следует рассматривать не как обобщенные гравитационные «координаты», а как обобщенные скорости движения системы отсчета, тогда в качестве обобщенных координат должны выступать пространственно-временные координаты  $x^\mu$ . Эти координаты можно понимать как набор из четырех скаляров. При изменении системы координат они просто заменяются на новые скаляры. В такой трактовке  $\tau^\mu$  нужно представлять как производные Ли от координат:

$$\mathcal{L}_{(\tau)} x^\mu = \tau^\nu x^\mu_{,\nu} = \tau^\nu \delta_\nu^\mu = \tau^\mu, \quad (5.4.13)$$

а параметром эволюции следует считать интервал  $s \equiv \tau$  вдоль мировых линий системы отсчета.

Обобщенные импульсы, сопряженные  $x^\mu$ , находятся обычным образом:

$$P_\mu = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\delta \tau^\mu} = -\frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{\kappa c} \left( {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R \right) \tau^\nu. \quad (5.4.14)$$

Это выражение можно трактовать следующим образом. Поскольку в (5.4.12) отсутствуют  $\tau^\mu_{,o}$ , то  $\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} / \delta \tau^\mu$  можно представить как действие оператора Эйлера—Лагранжа на плотность гравитационного

лагранжиана:

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\delta \tau^\mu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial \tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial (\partial \tau^\mu / \partial x^i)} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial \tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial (\partial \tau^\mu / \partial x^\alpha)}, \quad (5.4.15)$$

приводящее к левым частям четырех уравнений Эйнштейна. Поскольку в вакууме эти части равны нулю, то приходим к четырем уравнениям Эйнштейна, соответствующим уравнениям первичной связи в дираковском каноническом формализме:

$$P_\mu = 0 \rightarrow \left( {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R \right) \tau^\nu = 0. \quad (5.4.16)$$

4. Обобщенные скорости, соответствующие оставшимся 6 обобщенным гравитационным «координатам»  $h_{ik}$ , следует определить через монадные временные производные

$${}^* \partial_T h^{ik} = -2d^{ik}, \quad (5.4.17)$$

тогда обобщенные импульсы получаем в виде

$$p_{ik} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial ({}^* \partial_T h^{ik})} = -\frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{2\kappa c} (d_{ik} + h_{ik} d). \quad (5.4.18)$$

Обратные соотношения легко находятся в виде:

$${}^* \partial_T h^{ik} = \frac{4\kappa c}{\tau_o \sqrt{\hbar}} \left( p^{ik} + \frac{1}{2} h^{ik} p \right), \quad (5.4.19)$$

где  $p = h^{ik} p_{ik} = \tau_o \sqrt{\hbar} d / \kappa c$ .

5. Плотность гамильтониана определим, как обычно:

$$\tilde{\mathcal{H}}_{(gr)} = P_\mu \tau^\mu + p_{ik} {}^* \partial_T h^{ik} - \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = P_\mu \tau^\mu - \frac{2\kappa c}{\tau_o \sqrt{\hbar}} \left( \frac{1}{2} p^2 - p_{ik} p^{ik} \right) + \frac{\tau_o \sqrt{\hbar}}{2\kappa c} {}^3R. \quad (5.4.20)$$

Канонические уравнения для переменных  $x^\mu$  и  $P_\mu$  тривиальны:

$${}^* \partial_T P_\mu = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta x^\mu} = 0; \quad \partial_T x^\mu = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta P_\mu} = \tau^\mu. \quad (5.4.21)$$

Половина из оставшихся шести пар канонических уравнений эквивалентна шести уравнениям Эйнштейна

$${}^* \partial_T p_{ik} = -\frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta h^{ik}} \rightarrow \left( {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R \right) h_i^\mu h_k^\nu = 0, \quad (5.4.22)$$

а вторая половина

$${}^* \partial_T h^{ik} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta p_{ik}} \quad (5.4.23)$$

совпадает с соотношениями (5.4.19).

Таким образом в каноническом формализме все десять уравнений Эйнштейна записываются в виде канонических уравнений. Последние шесть из них принято называть *динамическими*, тогда как первые четыре — *уравнениями связей*.

### 5.4.3. Суперпространство Уилера—ДеВитта

1. Монадный метод в кинеметрической калибровке позволяет взглянуть на суть ОТО и уравнений Эйнштейна глобально, используя понятие суперпространства, введенного Уилером и ДеВиттом (см. [160]). Оно определяется как совокупность возможных 3-мерных пространственных сечений 4-мерного пространственно-временного многообразия. Полагается, что эти сечения ортогональны конгруэнции нормальной системы отсчета.

Как известно, метрики римановых пространств задаются на компактном хаусдорфовом многообразии, которое будем обозначать символом  ${}^3M$ . Предлагается рассматривать множество  $Riem({}^3M)$ , каждой точкой которого является возможная риманова метрика в  ${}^3M$ . Поскольку одну и ту же риманову метрику можно записать в разных координатных системах, то в  $Riem({}^3M)$  одно и то же риманово пространство описывается некоторым множеством точек. Отождествим все такие точки, связанные допустимыми преобразованиями координат, не выводящими за пределы выбранной нормальной системы отсчета, символом  $Diff({}^3M)$ . Очевидно, эти преобразования соответствуют кинеметрическим преобразованиям (3.2.30)–(3.2.31). В результате получается так называемое *первичное суперпространство*

$$S({}^3M) = Riem({}^3M)/Diff({}^3M). \quad (5.4.24)$$

Все точки в  $Riem({}^3M)$ , полученные из одной преобразованиями  $Diff({}^3M)$ , называются *орбитой* этой точки.

2. В пространстве  $Riem({}^3M)$  задается инфинитезимальным образом метрика — расстояние между двумя близкими 3-мерными римановыми пространствами (сечениями 4-мерного пространства-времени):

$$d\sigma^2 = \int \int \tilde{G}^{ijk'l'} \delta h_{ij} \delta h_{k'l'} d^3x d^3x', \quad (5.4.25)$$

где  $\delta h_{ij}$  — бесконечно малые различия метрик двух близких по значениям 3-мерных метрик  $h_{ij}$  пространств;  $\tilde{G}^{ijk'l'}$  — суперметрический тензор. Интегрирование производится по координатам двух пространств. В этой формуле  $\delta h_{ij}$  выступает в роли, аналогичной дифференциалам координат  $dx^\mu$  в определении квадрата интервала в римановом пространстве  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .

3. Из самых общих соображений следует, что  $\tilde{G}^{ijk'l'}$  должно удовлетворять следующим требованиям:

- 1) содержать дельта-функцию  $\delta^3(x - x')$ , связывающую сопоставляемые друг с другом точки в двух римановых пространствах;
- 2) быть тензором четвертого ранга, чтобы  $d\sigma^2$  было скаляром;
- 3) быть тензорной плотностью по  $\sqrt{h}$  веса 1 для обеспечения интегрирования по  $d^3x$ ;
- 4) быть симметричным относительно перестановки первой и второй пары индексов;
- 5) строиться из компонент 3-метрики  $h_{ij}$ .

Всем перечисленным требованиям удовлетворяет выражение

$$\tilde{G}^{ijk'l'} = \frac{\sqrt{h}}{2w} \delta^3(x - x') (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{kj} - 2h^{ij} h^{kl}) \equiv G^{ijkl} \delta^3(x - x'), \quad (5.4.26)$$

где  $w$  — произвольная скалярная функция. Будем полагать

$$w = \frac{1}{\tau_0}. \quad (5.4.27)$$

4. Ковариантные компоненты суперметрического тензора определяются из естественного условия

$$\int \tilde{G}_{ijm''n''} \tilde{G}^{m''n''k'l'} d^3x'' = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) \delta^3(x - x'). \quad (5.4.28)$$

Используя (5.4.26), отсюда находим:

$$\tilde{G}_{ijk'l'} = \frac{w}{2\sqrt{h}} \delta^3(x - x') (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{kj} - h_{ij} h_{kl}) \equiv G_{ijkl} \delta^3(x - x'). \quad (5.4.29)$$

Легко видеть, что след суперметрического тензора удовлетворяет условию

$$\int \tilde{G}_{ijm''n''} \tilde{G}^{m''n''ij} d^3x = 6\delta^3(x - x'). \quad (5.4.30)$$

5. Эволюцию пространственных сечений нормальных систем отсчета при смещении вдоль соответствующих конгруэнций можно представить

в виде неких линий в суперпространстве. Каждой линии соответствует решение шести пространственно-спроектированных уравнений Эйнштейна (3.5.22). Оказывается, эти уравнения можно записать в виде своеобразных уравнений типа геодезических линий с правой частью в пространстве  $Riem(^3M)$  с суперметрикой  $G_{ijkl}$ . В дальнейшем будем ее записывать без дельта-функции, что отображено отсутствием тильды над ее обозначением.

Аналогично символам Кристоффеля в обычном римановом пространстве определим коэффициенты связности в  $Riem(^3M)$  по формуле

$$\Gamma_{ik}^{jlmn} = \frac{1}{2}G_{ikrs} \left( \frac{\delta G^{mnrs}}{\delta h_{jl}} + \frac{\delta G^{jlr s}}{\delta h_{mn}} - \frac{\delta G^{jlmn}}{\delta h_{rs}} \right). \quad (5.4.31)$$

Тогда можно показать, что уравнения Эйнштейна (3.5.22) (без источников) представимы в виде

$${}^*\partial_T({}^*\partial_T h_{ik}) + \Gamma_{ik}^{jlmn}({}^*\partial_T h_{jl})({}^*\partial_T h_{mn}) = -\tau^o G_{ikmn} \frac{\delta(2\tau_o \sqrt{\hbar^3 R})}{\delta h_{mn}}. \quad (5.4.32)$$

Эти уравнения напоминают уравнения движения

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \mathcal{F}^\mu. \quad (5.4.33)$$

Правую часть в (5.4.32) можно понимать как некую суперсилу, получаемую из плотности суперпотенциала  $2\tau_o \sqrt{\hbar^3 R}$  способом, похожим на обычный:

$$\mathcal{F}_{ik} = -G_{ikmn} \frac{\delta(2\tau_o \sqrt{\hbar^3 R})}{\delta h_{mn}}. \quad (5.4.34)$$

6. Обобщенные импульсы (5.4.18) и плотность гравитационного гамильтониана (5.4.20) можно более компактно записать через суперметрический тензор (5.4.26):

$$p^{ik} = -\frac{G^{ikmn}}{2\mathcal{L}} d_{mn}; \quad (5.4.35)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}'_{(gr)} = -\frac{1}{2\mathcal{L}} (G_{ikmn} p^{ik} p^{mn} + \tau_o \sqrt{\hbar^3 R}). \quad (5.4.36)$$

7. В работах Дирака и других авторов вторичная гамильтонова связь (5.4.16) (уравнение Эйнштейна, спроектированное на монаду по двум



индексам) рассматривалась как уравнение Гамильтона—Якоби в суперпространстве. Введя функционал  $S$  такой, что

$$p^{ik} = \frac{\partial S}{\partial h_{ik}}, \quad (5.4.37)$$

получаем гравитационное уравнение Гамильтона—Якоби

$$G_{ikmn} \frac{\partial S}{\partial h_{ik}} \frac{\partial S}{\partial h_{mn}} + \tau_o \sqrt{\hbar^3} R = 0. \quad (5.4.38)$$

## 5.5. Четвертая аналогия: тензор кривизны как аналог напряженности электромагнитного поля

1. Четвертая аналогия гравитации и электромагнетизма основана на сопоставлении тензора кривизны Римана—Кристоффеля и тензора электромагнитного поля:

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} \longleftrightarrow F_{\mu\nu}, \quad (5.5.1)$$

обладающих аналогичными свойствами антисимметрии по парам индексов.

2. Для сопоставляемых величин (5.5.1) имеют место аналогичные дифференциальные тождества: тождества Бианки (1.4.7) в ОТО и первая пара уравнений Максвелла (5.1.3) в теории электромагнитного поля:

$$R_{\nu\alpha\beta;\sigma}^{\mu} + R_{\nu\sigma\alpha;\beta}^{\mu} + R_{\nu\beta\sigma;\alpha}^{\mu} = 0 \longleftrightarrow F_{\alpha\beta;\sigma} + F_{\sigma\alpha;\beta} + F_{\beta\sigma;\alpha} = 0. \quad (5.5.2)$$

3. Сворачивая тождества Бианки по паре индексов и используя обычные уравнения Эйнштейна, можно прийти к соотношениям:

$$R_{\nu\alpha\beta;\mu}^{\mu} \equiv R_{\nu\beta;\alpha} - R_{\nu\alpha;\beta} = \varkappa \left( T_{\nu\beta;\alpha} - T_{\nu\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(g_{\nu\beta}T_{,\alpha} - g_{\nu\alpha}T_{,\beta}) \right) \equiv Q_{\nu\alpha\beta}, \quad (5.5.3)$$

являющимся прямым аналогом второй пары уравнений Максвелла (5.1.4):

$$R_{\nu\alpha\beta;\mu}^{\mu} = Q_{\nu\alpha\beta} \longleftrightarrow F_{\nu;\mu}^{\mu} = \frac{4\pi}{c} j_{\nu}. \quad (5.5.4)$$

В итоге получились геометрические уравнения, соответствующие уравнениям Эйнштейна при специальном выборе источника [110]

$$Q_{\nu\alpha\beta} = \varkappa \left( T_{\nu\beta;\alpha} - T_{\nu\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(g_{\nu\beta}T_{,\alpha} - g_{\nu\alpha}T_{,\beta}) \right). \quad (5.5.5)$$

Любое решение уравнений Эйнштейна будет решением уравнений (5.5.3), однако при ином выборе источника получается более общая теория, отличающаяся от ОТО.

4. Легко убедиться, что тензор электромагнитного поля тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$F^{\mu\nu}_{;\mu;\nu} \equiv 0 \rightarrow j^{\nu}_{;\nu} = 0, \quad (5.5.6)$$

соответствующему закону сохранения электрического заряда.

Аналогичное выражение можно получить и для случая гравитации, если записать вторую ковариантную дивергенцию от левой части (5.5.3):

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}_{;\alpha\beta;\mu;\nu} &\equiv \frac{1}{2}(R^{\mu\nu}_{;\alpha\beta;\mu;\nu} - R^{\mu\nu}_{;\alpha\beta;\nu;\mu}) = \\ &= \frac{1}{2}(-R^{\sigma\nu}_{;\alpha\beta}R^{\mu}_{\sigma\mu\nu} - R^{\mu\sigma}_{;\alpha\beta}R^{\nu}_{\sigma\mu\nu} + R^{\mu\nu}_{;\sigma\beta}R^{\sigma}_{\alpha\mu\nu} + R^{\mu\nu}_{;\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Здесь использовано соотношение вида (1.4.1) для антикоммутирующих вторых ковариантных производных от произвольного тензора. Таким образом, имеем аналогичные тождества:

$$R^{\mu\nu}_{;\alpha\beta;\mu;\nu} \equiv 0 \longleftrightarrow F^{\mu\nu}_{;\mu;\nu} \equiv 0, \quad (5.5.8)$$

которым соответствуют законы сохранения:

$$Q^{\nu}_{\alpha\beta;\nu} = 0 \longleftrightarrow j^{\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.5.9)$$

5. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (5.1.6) можно получить, исходя из первой пары уравнений Максвелла (5.1.3), свернув их с тензором  $F^{\mu\nu}$ . В итоге получаем

$$\left( F^{\alpha\beta}F_{\alpha\sigma} - \frac{1}{4}g^{\beta}_{\sigma}F^{\alpha\lambda}F_{\alpha\lambda} \right)_{;\beta} \equiv F^{\alpha\beta}_{;\beta}F_{\alpha\sigma} = -\frac{4\pi}{c}j^{\alpha}F_{\alpha\sigma}. \quad (5.5.10)$$

Здесь также использована вторая пара уравнений Максвелла. В этом выражении слева стоит ковариантная дивергенция от тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Правое слагаемое, пропорциональное силе Лоренца, также можно представить в виде ковариантной дивергенции, если учесть уравнение движения заряда в электромагнитном поле.

Аналогичное выражение можно ввести для случая гравитации, если свернуть тождества Бианки (1.4.7) с тензором кривизны  $R^{\nu\alpha\beta}_{\mu}$ . После

свертки получаем

$$\frac{1}{2} \left( R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} R^{\nu\alpha\beta}{}_{\mu} \right)_{;\sigma} - 2R^{\nu\alpha\beta}{}_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma;\beta} = 0, \quad (5.5.11)$$

откуда следует

$$\left( R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma} R^{\nu\alpha\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{4} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} R^{\nu\alpha\beta}{}_{\mu} g^{\lambda}{}_{\sigma} \right)_{;\lambda} = R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma} (R^{\nu\alpha\lambda}{}_{\mu})_{;\lambda} = Q^{\nu\alpha}{}_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma}. \quad (5.5.12)$$

Стоящее слева квадратичное по кривизне выражение из компонент тензора кривизны может быть объявлено *гравитационным тензором энергии-импульса*, т. е. имеем аналогию:

$$\left( R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma} R^{\nu\alpha\lambda}{}_{\mu} - \frac{1}{4} g^{\lambda}{}_{\sigma} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} R^{\nu\alpha\beta}{}_{\mu} \right) \longleftrightarrow \left( F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\sigma} - \frac{1}{4} g^{\lambda}{}_{\sigma} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (5.5.13)$$

### 5.5.1. Дуально сопряженные тензоры кривизны

Приведем ряд соотношений и тождеств в двух сопоставляемых теориях, связанных с понятием *дуального сопряжения*.

1. *Дуально сопряженным тензором электромагнитного поля* называется величина

$$F^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} E_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (5.5.14)$$

где введен ковариантный тензор Леви-Чивиты, связанный с символом Леви-Чивиты  $e_{\alpha\beta\mu\nu}$ , введенным в (1.2.12), соотношением

$$E_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (5.5.15)$$

Через дуальный тензор записывается в более симметричной форме тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$\left( F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\sigma} - \frac{1}{4} g^{\lambda}{}_{\sigma} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{2} (F^{\alpha\lambda} F_{\alpha\sigma} + F^*{}^{\alpha\lambda} F^*{}_{\alpha\sigma}). \quad (5.5.16)$$

2. Аналогичным образом можно определить *лево- или правосторонне дуальные компоненты тензора кривизны*

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} R^{\lambda\sigma}{}_{\mu\nu} E_{\lambda\sigma\alpha\beta}; \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} R^{\cdot\lambda\sigma}{}_{\alpha\beta} E_{\lambda\sigma\mu\nu}. \quad (5.5.17)$$

*Дважды дуальным тензором кривизны* называется тензор вида

$$\overset{**}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} R^{\lambda\sigma\delta\rho} E_{\lambda\sigma\alpha\beta} E_{\delta\rho\mu\nu}. \quad (5.5.18)$$

3. Дважды дуальный тензор кривизны можно представить в виде:

$$- R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} = R_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + B_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - B_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} + B_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \quad (5.5.19)$$

где введен тензор

$$B_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}R, \quad (5.5.20)$$

обладающий нулевым следом  $B_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ .

Легко показать, что дважды дуальный тензор кривизны обладает свойством

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} g^{\alpha\mu} = R_{\beta\nu} - \frac{1}{2}g_{\beta\nu}R, \quad (5.5.21)$$

т. е. его свертка по двум индексам дает тензор Эйнштейна, стоящий в левой части уравнений Эйнштейна.

Из (5.5.21) следует соотношение

$$R_{\alpha\nu}^{\alpha\beta} - R_{\alpha\nu}^{**\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\nu}^{\beta}R. \quad (5.5.22)$$

4. Имеет место алгебраическое тождество

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{**\alpha\beta\mu\nu} = -4I_1 + I_2 + I_3, \quad (5.5.23)$$

где справа присутствуют три квадратичных инварианта:

$$I_1 = R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}; \quad I_2 = R^2; \quad I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (5.5.24)$$

5. Тождества Бианки записываются через дуальные тензоры кривизны следующим образом

$$\nabla_{\alpha} R^{*\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial R^{*\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0; \quad \nabla_{\alpha} R^{**\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial R^{**\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \quad (5.5.25)$$

Как уже отмечалось, эти тождества соответствуют первой паре уравнений Максвелла, которые через дуальный тензор электромагнитного поля записываются в виде:

$$\nabla_{\alpha} F^{*\alpha\beta} = \frac{\partial F^{*\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial R^{*\alpha}_{\beta\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \quad (5.5.26)$$

### 5.5.2. Квадратичные по тензору кривизны лагранжианы

Рассмотрим лагранжев формализм ОТО, соответствующий данному (четвертому) уровню аналогий гравитации и электромагнетизма (5.5.1).

1. Прямым аналогом плотности лагранжиана электромагнитного поля (5.2.4), согласно (5.5.1), для гравитации (с точностью до размерной константы) является выражение

$$\mathcal{L}_{(R)}^{(0)} = \frac{\sqrt{-g}}{4} R_{\nu\lambda\rho}^{\mu} R_{\beta\sigma\delta}^{\alpha} g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\lambda\sigma} g^{\rho\delta}. \quad (5.5.27)$$

Здесь следует подчеркнуть, что пока не используется связь тензора кривизны с метрическим тензором, а исходной напряженностью является именно величина  $R_{\nu\lambda\rho}^{\mu}$ , но не  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Легко убедиться, что, варьируя это выражение по  $g_{\mu\alpha}$ , получаем ранее записанный геометрический тензор энергии-импульса (5.5.13), а варьирование этого выражения по символам Кристоффеля приводит к выражению

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{(R)}^{(0)}}{\delta \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma}} = \frac{\sqrt{-g}}{2} [(R_{\sigma}^{\tau\beta\alpha})_{;\alpha} + (R_{\sigma}^{\beta\tau\alpha})_{;\alpha}] = 0, \quad (5.5.28)$$

соответствующему уравнению (5.5.3) без источников.

2. Чтобы ввести источники кривизны в (5.5.28), необходимо взять более общее выражение для плотности геометрического лагранжиана, нежели (5.5.27). В работе Н. В. Мицкевича [110] показано, что оно должно быть выбрано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(R)} = \mathcal{L}_{(R)}^{(0)} + \mathcal{L}_{(R)}^{(int)} = \frac{\sqrt{-g}}{4} R_{\nu\lambda\rho}^{\mu} R_{\beta\sigma\delta}^{\alpha} \times \\ \times (g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\lambda\sigma} g^{\rho\delta} + c_1 g_{\mu\alpha} g^{\nu\lambda} g^{\beta\sigma} g^{\rho\delta} + c_2 g_{\mu}^{\delta} g_{\alpha}^{\rho} g^{\nu\lambda} g^{\beta\sigma} - 2g_{\mu}^{\rho} g_{\alpha}^{\delta} g^{\nu\beta} g^{\lambda\sigma} + g_{\mu}^{\rho} g_{\alpha}^{\delta} g^{\nu\lambda} g^{\beta\sigma}), \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — две константы, связанные соотношением

$$c_1 + c_2 = -2. \quad (5.5.30)$$

3. Чтобы убедиться в необходимости данного обобщения, сначала выделим из правой части (5.5.12) соответствующее ему выражение *геометрического тензора энергии-импульса взаимодействия*  $T_{\sigma}^{(int)\lambda}$ . Для этого представим правую часть (5.5.12) в виде ковариантной дивергенции:

$$\begin{aligned} (R_{\rho}^{\mu\nu\lambda})_{;\lambda} R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} \equiv R_{\nu\mu\rho;\lambda}^{\lambda} R_{\sigma}^{\nu\mu\rho} = -2R_{\nu\lambda;\rho} R_{\sigma}^{\nu\lambda\rho} = \\ = - \left( 2R_{\mu\nu} R_{\sigma}^{\mu\nu\lambda} - 2R_{\sigma\nu} R^{\lambda\nu} + R R_{\sigma}^{\lambda} + R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} g_{\sigma}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\sigma}^{\lambda} R^2 \right)_{;\lambda}, \end{aligned} \quad (5.5.31)$$

где было учтено, что  $R_{\mu;\nu}^{\nu} = (1/2)R_{,\mu}$ . Обозначив

$$T_{\sigma}^{(int)\lambda} \equiv 2R_{\mu\nu}R_{\sigma}^{\mu\nu\lambda} - 2R_{\sigma\nu}R^{\lambda\nu} + RR_{\sigma}^{\lambda} + g_{\sigma}^{\lambda} \left( R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R^2 \right), \quad (5.5.32)$$

нетрудно убедиться, что это выражение получается из (5.5.29) варьированием  $\mathcal{L}_{(R)}^{(int)}$  по метрическому тензору

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{(R)}^{(int)}}{\partial g^{\sigma\nu}} = T_{\sigma\nu}^{(int)}. \quad (5.5.33)$$

Собирая вместе (5.5.12) и (5.5.31), имеем геометрический «закон сохранения»

$$\left( T_{\sigma}^{(R)\lambda} + T_{\sigma}^{(int)\lambda} \right)_{;\lambda} = 0. \quad (5.5.34)$$

4. Варьирование квадратичного лагранжиана (5.5.29) по символам Кристоффеля приводит к выражению

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{(R)}}{\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} \left[ (R_{\sigma}^{\alpha\lambda\beta} + R_{\sigma}^{\beta\lambda\alpha})_{;\lambda} + (g^{\lambda\alpha}R_{\sigma}^{\beta} + g^{\beta\lambda}R_{\sigma}^{\alpha} - 2g_{\sigma}^{\lambda}R^{\alpha\beta})_{;\lambda} \right]. \quad (5.5.35)$$

Приравняв это выражение нулю, получаем геометрическое уравнение, заменяющее уравнение Эйнштейна, однако обладающее тем недостатком, что в нем нет необходимой информации о физических источниках искривления пространства-времени.

5. Чтобы исправить данный недостаток, предлагается [110] добавить к квадратичной плотности лагранжиана (5.5.29) обычную линейную по кривизне плотность (5.2.8), т. е. исходить из суммарной (тотальной) плотности лагранжиана вида

$$\mathcal{L}_{(gr)}^{(tot)} = \mathcal{L}_{(R)}^{(0)} + \mathcal{L}_{(R)}^{(int)} + \mathcal{L}_{(gr)} + \mathcal{L}_{(m)}. \quad (5.5.36)$$

Линейная по кривизне (обычная) часть плотности лагранжиана  $\mathcal{L}_{(gr)}$  в такой теории играет важную роль, одновременно устанавливая связь кривизны с метрическим тензором и с характеристиками негеометрической материи. На этом основании Н. В. Мицкевич назвал ее *генератором геометризаци тяготения*.

Используя результаты метода Палатини, можно прийти к выводу, что

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}(\mathcal{L}_{(R)} + \mathcal{L}_{(gr)}) = 0 \quad (5.5.37)$$

приводит к общеизвестному выражению компонент тензора Римана—Кристоффеля через комбинацию из первых и вторых производных от метрического тензора.

6. Обобщенные уравнения движения получаются варьированием тотальной плотности лагранжиана по компонентам метрического тензора:

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_{(gr)}^{(tot)} \rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \varkappa(T_{(m)\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(R)} + T_{\mu\nu}^{(int)}). \quad (5.5.38)$$

На первый взгляд, эти уравнения отличаются от стандартных уравнений Эйнштейна, однако можно показать (см. [110]), что это не так, поскольку дополнительные гравитационные слагаемые сокращаются и уравнения сводятся к уравнениям Эйнштейна.

### 5.5.3. Классификация матриц электромагнитного тензора 2-го ранга

Рассмотрим классификацию матриц тензоров электромагнитного поля, соответствующую данному сопоставлению электромагнитных и гравитационных величин (5.5.1). В этом случае метод алгебраической классификации следует применить непосредственно к квадратной  $4 \times 4$ -матрице из компонент тензора напряженности электромагнитного поля. Для нее характеристическое уравнение (в плоском пространстве-времени) имеет вид:

$$\|F_{\mu\nu} - \lambda\eta_{\mu\nu}\| = 0. \quad (5.5.39)$$

Непосредственное вычисление определителя приводит к биквадратному уравнению

$$\lambda^4 + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\lambda^2 - (F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu})^2 = 0, \quad (5.5.40)$$

где коэффициентами являются инварианты электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) \equiv 2\mathcal{J}_1; \quad F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = H^k E_k \equiv \mathcal{J}_2. \quad (5.5.41)$$

С помощью элементарных преобразований характеристическую  $4 \times 4$ -матрицу для (5.5.39) можно привести к двум возможным канониче-

ским матрицам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + \mathcal{J}_1\lambda^2 - \mathcal{J}_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{при } \mathcal{J}_2 \neq 0; \quad (5.5.42)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda^2 + \mathcal{J}_1) \end{pmatrix} \quad \text{при } \mathcal{J}_2 = 0. \quad (5.5.43)$$

Первая из этих матриц соответствует наличию четырех корней, определяемых лишь из одного инвариантного множителя канонической матрицы, т. е. имеет характеристику  $[(1)(1)(1)(1)]$ . Назовем электромагнитные поля с характеристиками  $[1111]$  полями первого типа  $T_1$ , а их частный случай  $[(1)(1)(1)(1)]$  — подтипом  $I$  типа  $T_1$  (по аналогии с названиями типов и подтипов пространств Эйнштейна в гл. 5).

Вторая из канонических матриц (5.5.43) соответствует корням:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = \pm\sqrt{\mathcal{J}_1}; \quad \text{при } \mathcal{J}_1 \neq 0; \quad (5.5.44)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad \text{при } \mathcal{J}_1 = 0. \quad (5.5.45)$$

Эти две возможности описываются двумя характеристиками:

$$[(1, 1)(1)(1)] \quad \text{и} \quad [(1, 3)]$$

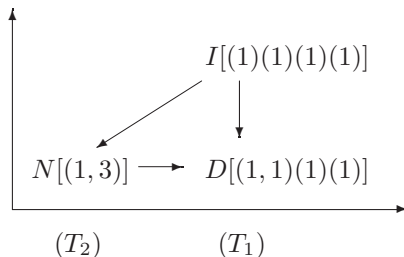
соответственно. Первую из них, принадлежащую к типу  $T_1$ , назовем подтипом  $D$  (к нему принадлежит закон Кулона), а вторую назовем типом  $T_2$  (или подтипом  $N$ ). Таким образом, электромагнитные поля могут быть только двух типов ( $T_1$  и  $T_2$ ), причем первый из них разбивается на два подтипа:  $I$  и  $D$ . Изобразим эту ситуацию с помощью диаграммы, аналогичной диаграмме Пенроуза—Петрова (см. рис. 5.1). Подтипы электромагнитных полей  $D$  и  $N$  естественно назвать *алгебраически специальными*. Известно, что для чистого электромагнитного излучения  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 0$ , т. е. *электромагнитные волны принадлежат к алгебраически специальному типу  $N(T_2)$* .

## 5.6. Пятая аналогия (тензор кривизны и квадрат электромагнитного тензора)

Пятая аналогия гравитации и электромагнетизма основана на сопоставлении

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \longleftrightarrow F_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}. \quad (5.6.1)$$





**Рис. 5.1.** Алгебраическая классификация электромагнитных полей

1. Легко видеть, что тензор четвертого ранга  $F_{\alpha\beta\mu\nu}$  обладает теми же алгебраическими свойствами симметрии, что и тензор Римана—Кристоффеля. Ему можно соотнести по формуле (5.5.18) дважды дуально сопряженный тензор

$$F_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} = \frac{1}{4} F^{\lambda\sigma\rho\delta} E_{\alpha\beta\lambda\sigma} E_{\mu\nu\rho\delta} = F_{\alpha\beta}^* F_{\mu\nu}^*. \quad (5.6.2)$$

Пользуясь формулой (5.5.21), можно показать, что свертка этого тензора по двум индексам приводит к выражению

$$F_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} g^{\alpha\mu} = \left( F_{\beta\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} g_{\beta\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right). \quad (5.6.3)$$

2. Из (5.6.3) следует, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля (5.1.6) можно записать в виде

$$T_{\beta\nu}^{(e.m.)} = -\frac{1}{4\pi} \left( F_{\beta\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\beta\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right) = -\frac{1}{8\pi} \left( F_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} + F_{\alpha\beta\mu\nu} \right) g^{\alpha\mu}, \quad (5.6.4)$$

а уравнения Эйнштейна для электровакуума на основании (5.5.21) и (5.6.4) представляются в форме

$$\left[ R_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} + \frac{G}{c^4} \left( F_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} + F_{\alpha\beta\mu\nu} \right) \right] g^{\alpha\mu} = 0. \quad (5.6.5)$$

Имеется ряд других любопытных соотношений в рамках этого способа построения аналогий.

3. Предваряя рассмотрение вопроса о классификации электромагнитного тензора 4-го ранга, отметим, что тензор Римана—Кристоффеля, удовлетворяющий свойству

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^{**}, \quad (5.6.6)$$

т. е. совпадающий с дважды дуальным себе тензором, является конформно-плоским. Несложно показать, что тензор Вейля, образованный

из такого тензора кривизны, принадлежит алгебраически специальному подтипу  $O$  первого типа по Петрову.

4. В частности, если положить, что

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \tilde{\kappa}(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + F_{\mu\nu}^*F_{\alpha\beta}^*), \quad (5.6.7)$$

где  $F_{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}^*$  — произвольный антисимметричный тензор и дуальный ему тензор, а  $\tilde{\kappa}$  — некая константа, то такое пространство-время является конформно-плоским, т. е. принадлежит подтипу  $O$  первого типа по классификации Петрова.

Очевидно, что для такого пространства-времени выполняются уравнения Эйнштейна (5.1.8) для электровакуума.

5. Если в дополнение к (5.6.7) потребовать, что

- 1)  $F_{\mu\nu}$  представляется в виде 4-ротора от некоего векторного потенциала и
- 2) определитель матрицы  $\|F_{\mu\nu}\| \neq 0$ ,

то в данном пространстве-времени выполняется система электровакуумных уравнений Эйнштейна и Максвелла. (Заметим, что  $\|F_{\mu\nu}\| \equiv (\vec{E}\vec{H})^2$ .)

6. Имеет место и обратное утверждение: всякое конформно-плоское решение электровакуумной системы уравнений Эйнштейна и Максвелла характеризуется тензором Римана—Кристоффеля, представимым в виде (5.6.7).

## 5.7. Выводы и замечания

1. Обращение к рассмотрению аналогий между гравитацией и электромагнетизмом было вызвано не столько интересом к метафизической (философской) проблеме соотношения геометрии и теории физического электромагнитного поля, сколько стремлением решить ряд прагматических проблем ОТО, исходя из аналогии теорий гравитации и физического электромагнитного поля. Предполагалось, что ряд проблем обусловлен неудачной формулировкой теории гравитации. В результате возник ряд эквивалентных (в математическом плане) формулировок ОТО, которые можно классифицировать по двум основным признакам: по способу изложения (построения) теории и по выбору первичных характеристик искривленного пространства-времени (см. рис. 5.2).

Под способом изложения теории понимаются: геометрический подход, лагранжев формализм, который впервые применил к теории гравитации Д. Гильберт при выводе уравнений Эйнштейна, гамильтонова формулировка теории гравитации, аналог формализма Гамильтона—Якоби в теории гравитации. В таблице рис. 5.2 названные подходы

обозначены по вертикали. Это те формулировки теории, которые представлены в классической аналитической механике. При этом геометрический подход должен быть уподоблен формулировке механики на основе обобщенных уравнений Ньютона.

Исходные величины Способ построения	Метрический тензор $g_{\mu\nu}$	Метрика + связность $g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(K_{\mu\nu}^{\sigma})$	Тензор кривизны $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$	Монадные величины $\tau_{\mu}, h_{\mu\nu}$	Тетрады, (диады) $g_{\mu}(\alpha)$
Геометрический подход	Традицион. изложение теории Эйнштейна	Обобщенные геометрии Схоутена	Теории Картана, Манделстама	Монадный формализм	Тетрадн. (диадный) формализм (см.гл.6)
Лагранжев формализм	Лагранжев подход Гильберта	Метод Палатини, обобщенные лагранжианы	Квадратичные по кривизне лагранжианы		Тетрадн. лагранж. формализм
Гамильтонов формализм	Симметричн. гамильтонов формализм			Дираковский канонический формализм	
Формализм Гамильтона—Якоби				Суперпространство Уилера—ДеВитта	

**Рис. 5.2.** Различные формулировки общей теории относительности

В представленной таблице по горизонтали приведены формулировки ОТО на основе таких исходных характеристик искривленного пространства-времени, как: компоненты метрического тензора, метрический тензор вместе с компонентами связности, непосредственно компоненты тензора кривизны. В качестве первичных геометрических величин можно также выбирать монадные составляющие метрики, но можно исходить из компонент тетрады или диады (см. гл. 6).

Результатом многочисленных исследований стал широкий спектр формулировок одной и той же теории. В связи с этим уместно еще раз напомнить слова Р. Фейнмана, которому «всегда казалось странным, что самые фундаментальные законы физики после того, как они уже открыты, все-таки допускают такое невероятное многообразие формулировок, по первому впечатлению неэквивалентных, и все же таких, что после определенных математических манипуляций между ними всегда можно найти взаимосвязь» [164, с. 207].

2. Перечисленные здесь 4-мерные теории гравитации, не выводящие за пределы ОТО Эйнштейна, следует отличать от многочисленных попыток построения единых 4-мерных теорий гравитации и электромагнетизма на базе обобщенных геометрий, которые были охарактеризованы в гл. 4. Такие попытки были типичны для исследований 20–40-х гг. XX в., в рамках которых были получены новые сведения о дифференциальной геометрии и использованной в ОТО римановой геометрии, как частного случая геометрий Схоутена.

3. Проблема построения единой геометрической теории гравитации и электромагнетизма решается в рамках многомерной (римановой) геометрии (см. третью часть книги), позволившей обнаружить искомую взаимосвязь гравитации и электромагнетизма: метрический тензор эйнштейновской теории гравитации и электромагнитный векторный потенциал строятся из единого набора компонент многомерного метрического тензора. Таким образом, вскрываются корни рассмотренных в этой главе пяти способов сопоставления гравитации и электромагнетизма, отражающих разные стороны многомерной геометрической картины мира. Более того, геометрофизика позволяет предостеречь от ряда иллюзий, возникающих при абсолютизации любой аналогии из числа проанализированных в рамках 4-мерия.

## Системы отсчета и ориентаций



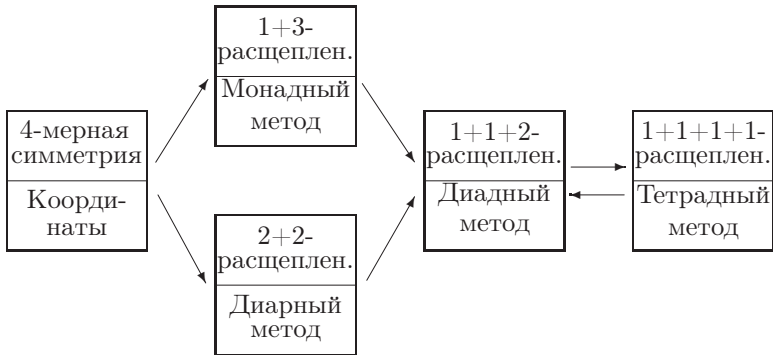
В основе классической физики и геометрии лежит счет событий. В частности, понятие тензора и все тензорное исчисление базируется на нумерации точек-событий и групповой симметрии (эквивалентности) способов их нумерации. Для математической формулировки теории достаточно существования координатных систем, однако установление нумерации точек-событий относится уже к сфере физики. Конкретный способ задания координатных систем основан на методе радиолокации, т. е. на показаниях часов одиночного наблюдателя, фиксирующих моменты отправления и приема отраженных сигналов. С помощью этого метода можно развернуть все содержание ОТО. Такая формулировка теории, названная *хроногеометрией*, органически включает в себя понятие *системы отсчета одиночного наблюдателя*, отличное от случая континуума наблюдателей, описываемых монадным методом. Хроногеометрия демонстрирует не только способ нумерации событий, но и *неизбежность введения при этом в геометрию дополнительной структуры* в виде одного или нескольких векторов в каждой точке (или соответствующих им конгруэнций мировых линий).

Напомним, что данное в гл. 3 определение системы отсчета основано на выделении в каждой точке 4-мерного пространства-времени лишь одного времени-подобного вектора  $\tau^\mu$ , характеризующего 4-скорость наблюдателя. Это является достаточным для описания зависимости наблюдаемых величин от состояния движения наблюдателя. В монадном методе не предполагается специального выделения отдельных пространственно-подобных направлений в 3-мерных пространственных сечениях, ортогональных вектору  $\tau^\mu$ , что соответствует минимуму возможностей, которыми наделен наблюдатель (часы).

Если у наблюдателя есть возможность измерять, наряду со временем, длины вдоль всех пространственно-подобных направлений, то следует использовать *тетрадный метод*  $1 + 1 + 1 + 1$ -расщепления. Этим методом в 3-мерных пространственно-подобных сечениях задаются три

---

орта используемой наблюдателем системы ориентации. Последние могут не совпадать с касательными к координатным линиям. Таким образом, тетрадный метод предназначен для описания *системы отсчета и ориентации*. Этот метод оказывается необходимым для описания спинорных частиц в искривленном пространстве-времени.



**Рис. 6.1.** Соотношение различных методов расщепления 4-мерного пространства-времени в ОТО

Однако имеются менее полные методы описания систем отсчета и ориентаций, соотношение между которыми изображено на рисунке 6.1. Возможности наблюдателей измерять пространственно-подобные компоненты величин лишь в каком-то одном направлении математически описываются заданием в каждой точке пространства-времени, кроме монады  $\tau^\mu$ , еще одного, пространственно-подобного единичного вектора  $l^\mu$ , который вместе с  $\tau^\mu$  образует диаду. В этих случаях имеет место  $1 + 1 + 2$ -расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия. Методику описания подобных наблюдателей, построенную по образу монадного метода, естественно назвать *диадным методом*.

Возможны специальные ситуации, когда по каким-то причинам нет нужды в различении отдельных направлений, т. е. существенно лишь разбиение пространства-времени в каждой точке на пару ортогональных 2-мерных сечений. В этом случае следует говорить о  $2 + 2$ -расщеплении 4-мерного пространства-времени и о соответствующем ему *диарном методе*, имеющем черты монадного и диадного методов. Названный выше метод хроногеометрии тесно связан с диадным и диарным методами.

Эта глава посвящена рассмотрению названных методов, которые, как и монадный, представлены в виде четырех составных частей: алгебры, задания физико-геометрических тензоров, определения операторов дифференцирования и записи уравнений и тождеств в соответствующем виде.

Кроме уже упомянутых областей применимости названных методов, материал этой главы является подготовительным для изложения единой многомерной геометрической теории физических взаимодействий в 3-й части книги.

## 6.1. Хроногеометрия

Ключевые понятия классической геометрии и физики основываются на счете происшедших событий. Простейший инструмент такого рода — это часы. Используя показания часов, можно развернуть содержание всей геометрии. Программа такого рода развивалась рядом авторов, в частности Л. Я. Арифовым [2] и Дж. Сингом [149], В работах Д. И. Блохинцева [9] обсуждались возможности применения этого подхода в физике микромира.

Данный подход одновременно представляет собой еще один метод задания систем отсчета, не использующий заложенные в монадный метод представления об идеализированных наблюдателях, заполняющих все пространство. Можно ограничиться так называемым *одиночным наблюдателем*, который характеризуется одной мировой линией или узкой трубкой линий. Чтобы он мог получать информацию о всех остальных точках пространства-времени, его нужно снабдить соответствующей аппаратурой и методикой анализа. Пусть наблюдатель может использовать радиолокацию, т. е. обладает возможностью излучать и принимать отраженные (электромагнитные) сигналы, фиксируя по показаниям своих часов моменты излучения и приема сигналов. Об этом подходе к ОТО, названном *хроногеометрией*, Дж. Синг писал: «Для нас единственной *основной мерой является время*. Длина (или расстояние), поскольку возникает необходимость или желательность их введения, будет рассматриваться как строго произвольное понятие. . . Фактически мы имеем дело с римановой хроногеометрией, а не *геометрией*, слово *геометрия*, внушающее опасение, что нам, чего доброго, придется возиться с измерением длин с помощью *метровой линейки*, можно было бы в этой связи полностью исключить из употребления, если бы грубое буквальное значение понятия геометрии не приобрело глубокой связи с абстрактными математическими определениями «пространства», «метрик» и т. д.» [149, с. 101].

Продемонстрируем, как, исходя из показаний часов на времени-подобной мировой линии наблюдателя, разворачивается содержание геометрии и вводятся ее основные понятия и соотношения.

1. На мировой линии имеем монотонно изменяющийся параметр  $\tau = ct$  — собственное время наблюдателя. Квадрат интервала  $s_{12}^2$  между двумя событиями на этой мировой линии, помеченными индексами 1 и 2, задается часами:  $s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2$ .

2. В окрестности своей мировой линии (не обязательно малой) наблюдатель самым непосредственным образом может ввести две координаты окружающих точек-событий. Поясним это. Пусть наблюдателя интересуют координаты точки-события М вне его мировой линии, и пусть наблюдатель, испустив сигнал в момент собственного времени  $\tau_1$ , отсчитываемого от некоторой точки О, получил отраженный от М сигнал в момент  $\tau_2$ . Значение  $\tau_i$  положительно, если точка О предшествует  $\tau_i$ , и отрицательно, если О выбрано после  $\tau_i$ . Время события М относительно О можно определить величиной

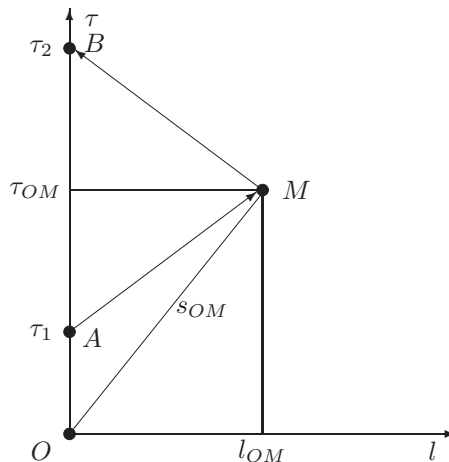
$$\tau_{OM} = \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_1), \quad (6.1.1)$$

расстояние между событиями О и М следует задать формулой (см. рис. 6.2)

$$l_{OM} = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1), \quad (6.1.2)$$

а квадрат пространственно-временного интервала между событиями — формулой

$$s_{OM}^2 = \tau_1 \tau_2. \quad (6.1.3)$$



**Рис. 6.2.** Определение промежутка времени и расстояния между событиями О и М в хроногеометрии



Легко видеть, что выполняется обычное соотношение

$$s_{OM}^2 = \tau_{OM}^2 - l_{OM}^2. \quad (6.1.4)$$

3. Если точка  $O$  лежит между моментами испускания сигнала и его приема после отражения, то, согласно (6.1.4), события  $O$  и  $M$  пространственно-подобны, т. е.  $\Delta s_{OM}^2 = (OM)^2 < 0$ .

4. Хроногеометрическим способом можно ввести понятия векторов, их скалярные произведения, вывести формулы для преобразований Лоренца и многое другое.

5. В рамках хроногеометрии особенно ясным становится смысл так называемого «парадокса близнецов». В некоторых публикациях этот «парадокс», состоящий в разных показаниях часов двух наблюдателей, одновременно вышедших из одного места и затем вновь встретившихся в какой-то другой точке пространства-времени, связывают с процессом ускорения одной системы отсчета относительно другой. На самом деле это чисто кинематический эффект, обусловленный разными длинами (разными значениями собственных времен) отрезков двух мировых линий, имеющих общие начала и конец.

6. Отметим, что методом хроногеометрии задаются координата времени и расстояние от наблюдателя (радиальная координата в цилиндрической координатной системе) до точки-события  $M$ , но не определяются угловые координаты (например, углы  $\theta$  и  $\varphi$ ) события  $M$ . Для их определения необходимы дополнительные факторы. Это можно сделать, например, снабдив наблюдателя датчиками направления посылки и приема сигналов или посредством хроногеометрического определения расстояний и промежутков времени до трех наблюдателей и затем сравнения их показаний. Последнее легко понять, вспомнив необходимость опорных направлений в задании сферических или цилиндрических координат в плоском (евклидовом) пространстве. Для задания координат, аналогичных декартовым, удобнее использовать три опорные мировые линии. Тогда в малой окрестности исходной мировой линии  $\tau$  можно определить триаду пространственно-подобных векторов  $g^\mu(k)$ , ортогональных времени-подобному вектору  $g^\mu(0) = \tau^\mu$ .

7. Покажем, как в рамках хроногеометрии можно определить компоненты метрического тензора  $g_{\mu\nu}|_{(O)}$  в произвольной точке  $O$  на мировой линии  $\tau$  наблюдателя [2]. Выберем в окрестности точки  $O$  десять различных точек-событий  $M_{(r)}$ , где  $r = 1, 2, \dots, 10$ , тогда имеем 10 хроногеометрически измеримых интервалов  $\Delta s_{(r)}^2$  между точками-событиями  $O$  и  $M_{(r)}$ .

Пусть в малой окрестности точки  $O$  каким угодно способом введена система координат. Ею может быть и система с хроногеометрическим заданием координат  $x^0 = \tau$  и  $x^1 = l$  согласно (6.1.1) и (6.1.2). Пусть координаты выбранных точек  $\{x_{(O)}^\mu + \Delta x_{(r)}^\mu\}$ . Определим квадратную  $10 \times 10$ -матрицу  $y_{(r)}^{(p)} \equiv y_{(r)}^{\mu\nu} = \{\Delta x_{(r)}^\mu \Delta x_{(r)}^\nu\}$ , где индексом  $p$  пронумерованы 10 возможных симметричных комбинаций индексов  $\mu$  и  $\nu$ . Десять точек-событий  $M_{(r)}$  будем называть независимыми, если определитель  $\|y_{(r)}^{(p)}\| \neq 0$ . Положим, что выбранные точки-события независимы.

Введем в точке  $O$  систему пока неизвестных компонент  $g_{\mu\nu}|_{(O)}$  такую, чтобы хронометрически введенные квадраты интервалов представлялись в виде

$$\Delta s_{(r)}^2 = g_{\mu\nu}|_{(O)} \Delta x_{(r)}^\mu \Delta x_{(r)}^\nu. \quad (6.1.5)$$

Десять соотношений (6.1.5) можно рассматривать как систему уравнений относительно 10 неизвестных компонент метрического тензора с матрицей известных коэффициентов  $y_{(r)}^{(p)}$  и хроногеометрическим образом заданных квадратов интервалов  $\Delta s_{(r)}^2$ . Решая эту систему, находим искомые компоненты метрического тензора.

8. Анализ процессов трехкратного отражения сигналов между двумя времени-подобными геодезическими  $\tau$  и  $\tau_{(1)}$  позволяет хроногеометрическим методом ввести величины, соответствующие компонентам *символов Кристоффеля* [2].

9. Посредством процессов пятикратного отражения сигналов между двумя времени-подобными геодезическими линиями можно хроногеометрическим способом определить величины, непосредственно связанные с компонентами *тензора кривизны* [2, с. 59].

10. Легко усмотреть связь хроногеометрического подхода к общей теории относительности с *картановским методом перемещений, ассоциированных с циклом*. Действительно, треугольник с вершинами в точках  $A$  и  $B$  на мировой линии одиночного наблюдателя, в которых был испущен и принят сигнал, и в точке  $M$  вне мировой линии, в которой сигнал был отражен, образует замкнутый контур, определяемый смещениями по времени-подобной и радиальной координатам (см. рис. 6.2):

$$\Delta\sigma(01) = \frac{1}{2}\Delta\tau\Delta l = \frac{1}{4}(\tau_2 - \tau_1)^2 = l^2. \quad (6.1.6)$$

Различные ориентации в 3-мерном пространстве контуров, имеющих общее смещение вдоль мировой линии наблюдателя, можно использовать для определения изменений переносимых по этим контурам векторов, например, направлений испущенных сигналов.

Очевидно, что заданные хроногеометрическим способом координаты времени и радиального расстояния естественным образом определяют два направления в 4-мерном пространстве-времени.

## 6.2. Тетрадный метод

Пусть в 4-мерном пространстве-времени так или иначе задана координатная система. Рассмотрим в общем виде теорию дополнительных структур (систем векторов), характеризующих направления в пространстве-времени. Это могут быть как направления движения системы отсчета, так и пространственные векторы, описывающие ориентацию. Будем рассуждать дедуктивным методом, т. е. сначала рассмотрим самый общий случай из четырех возможных векторов (тетрадный метод) и затем спустимся к случаям их меньшего числа.

Представим основные положения традиционного тетрадного метода (см. [71, 139, 141]) в той же последовательности, что и ранее рассмотренный монадный метод.

### 6.2.1. Алгебра тетрадного метода

1. В тетрадном методе используются унифицированные обозначения для четверки векторов  $g_\mu(\alpha)$ , где в круглых скобках указан номер вектора, принимающий значения: 0, 1, 2, 3. Метрический тензор представляется в виде:

$$g_{\mu\nu} = g_\mu(\alpha)g_\nu(\alpha) \equiv g_\mu(0)g_\nu(0) - g_\mu(1)g_\nu(1) - g_\mu(2)g_\nu(2) - g_\mu(3)g_\nu(3), \quad (6.2.1)$$

где четыре вектора ортонормированы:

$$g_\mu(\alpha)g^\mu(\beta) = \eta(\alpha\beta) = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ при } \alpha = \beta = 0; \\ -1 \text{ при } \alpha = \beta = 1, 2, 3; \\ 0 \text{ при } \alpha \neq \beta \end{array} \right\}. \quad (6.2.2)$$

Очевидно, векторы тетрады  $g_\mu(\alpha)$  следующим образом связаны с монадными составляющими метрического тензора:

$$g_\mu(0) = \tau_\mu; \quad h_{\mu\nu} = g_\mu(i)g_\nu(i). \quad (6.2.3)$$

2. В тетрадном методе унифицированы также обозначения результатов проецирования компонент произвольного тензора на направления

векторов тетрады — посредством указания номера вектора проецирования в круглых скобках, например:

$$B^\mu g_\mu(\alpha) \equiv B(\alpha); \quad B_{\nu\dots}^{\mu\dots} g_\mu(\alpha) \dots g^\nu(\beta) \dots \equiv B(\alpha \dots \beta \dots). \quad (6.2.4)$$

В наиболее распространенном варианте тетрадного метода используются смешанные величины, т. е. тензоры, лишь частично спроецированные, например  $B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha \dots)$ , имеющие индексы двух типов: универсальные (ковариантные и контравариантные) и локальные (в скобках). В этом состоит существенное отличие такого тетрадного метода от монадного, где используются лишь полностью спроецированные на составляющие метрического тензора величины. Можно сказать, что такой тетрадный метод имеет *электрический характер*. Однако имеется и *последовательный тетрадный метод*, в котором используются лишь величины, спроецированные по всем индексам на векторы тетрады, т. е. скаляры относительно универсальных координатных преобразований. Ниже будет рассмотрен пример последовательного тетрадного метода — метод изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза. Отметим, что сами компоненты тетрады можно понимать как метрический тензор с одним универсальным и одним локальным индексами:

$$g_\mu(\alpha) = g_{\mu\nu} g^\nu(\alpha); \quad g^\mu(\alpha) = g^{\mu\nu} g_\nu(\alpha). \quad (6.2.5)$$

3. В каждой точке пространства-времени с помощью поворота можно перейти к новой четверке векторов тетрады:

$$g'_\mu(\alpha) = L(\alpha\beta) g_\mu(\beta), \quad (6.2.6)$$

где  $L(\alpha\beta)$  — коэффициенты линейных преобразований четверки векторов тетрады. Очевидно, что при таких преобразованиях изменятся значения проекций тензоров на векторы тетрады, т. е. величины с локальными индексами преобразуются по закону

$$B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha\beta \dots)' = L(\alpha\gamma) L(\beta\lambda) \dots B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\gamma\lambda \dots). \quad (6.2.7)$$

Таким образом, в тетрадном методе определены две группы преобразований:

- 1) *группа универсальных допустимых преобразований* координат ОТО (1.1.1) (относительно этих преобразований скалярами являются величины, обладающие лишь локальными индексами);
- 2) *группа локальных ортогональных преобразований* — поворотов векторов тетрады (6.2.6) (относительно этих преобразований инвариантны тензорные величины, обладающие лишь универсальными индексами).

4. Четыре вектора тетрады  $g_\mu(\alpha)$  в сумме имеют 16 независимых компонент, тогда как метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  характеризуется 10 компонентами. Следовательно, в метрической формулировке ОТО необходимы, кроме 10 условий связи  $g_{\mu\nu} = g_\mu(\alpha)g_\nu(\alpha)$ , еще 6 дополнительных условий для представления компонент тетрады через компоненты метрического тензора. В качестве таковых можно использовать условия калибровки, развитые в рамках монадного метода.

Напомним, что в монадном методе исходят из 14 переменных: четырех компонент монады  $\tau_\mu$  и десяти компонент  $h_{\mu\nu}$ . Затем на эти компоненты накладываются дополнительные условия: во-первых, одно условие нормировки монады:  $g_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu$  и, во-вторых, три независимых условия калибровки. В методе хронометрических инвариантов ими были  $\tau^\mu = g_o^\mu/\sqrt{g_{oo}}$ , а в методе кинеметрических инвариантов это  $\tau_\mu = g_\mu^o/\sqrt{g^{oo}}$ . Тогда из определения (10 условий)  $g_{\mu\nu} = \tau_\mu\tau_\nu - h_{\mu\nu}$  находятся все компоненты  $h_{\mu\nu}$ .

5. В тетрадном методе можно поступать аналогичным образом. В частности, можно ввести *полную хронохориометрическую калибровку тетрады*:

$$g^\mu(0) \equiv \tau^\mu = \frac{g_o^\mu}{\sqrt{g_{oo}}}; \quad g^\mu(1) \equiv l^\mu = \frac{{}^*h_1^\mu}{\sqrt{{}^*h_{11}}}; \quad g^\mu(2) = \frac{{}^{**}\gamma_2^\mu}{\sqrt{{}^{**}\gamma_{22}}}, \quad (6.2.8)$$

где  ${}^*\gamma_{\mu\nu}$  — компоненты метрического тензора 2-мерного сечения, ортогонального последовательно откалиброванным хронометрическим способом векторам  $\tau^\mu$  и  $l^\mu$ . При этом выделяется следующий класс преобразований координат:

$$\begin{aligned} x'^o &= x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3); & x'^1 &= x'^1(x^1, x^2, x^3); \\ x'^2 &= x'^2(x^2, x^3); & x'^3 &= x'^3(x^3). \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Величины, спроецированные по всем индексам на векторы откалиброванной таким образом тетрады, инвариантны относительно этих преобразований координат. Данные преобразования не меняют ни хронометрическим образом определенную систему отсчета, ни хориометрическим способом заданную ориентацию в системе отсчета. Выход за рамки выписанных преобразований может менять либо только ориентацию в рамках прежней системы отсчета, если при этом пространственные координаты не зависят от  $x^o$ , либо изменять и саму систему отсчета, если  $x'^i = x'^i(x^o, x^k)$ , конечно, при выполнении соглашения, что в новой координатной системе хронометрическим образом определяется новая система отсчета.

6. Подобным же образом можно определить *полную кинеметрическую калибровку тетрады*:

$$g_{\mu}(0) \equiv \tau_{\mu} = \frac{g_{\mu}^o}{\sqrt{g^{oo}}}; \quad g_{\mu}(1) \equiv l_{\mu} = \frac{{}^*h_{\mu}^1}{\sqrt{{}^*h^{11}}}; \quad g_{\mu}(2) = \frac{{}^{**}\gamma_{\mu}^2}{\sqrt{{}^{**}\gamma^{22}}}. \quad (6.2.10)$$

Эта калибровка выделяет класс преобразований координат:

$$\begin{aligned} x'^o &= x'^o(x^o); & x'^1 &= x'^1(x^o, x^1); \\ x'^2 &= x'^2(x^o, x^1, x^2); & x'^3 &= x'^3(x^o, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

В такой калибровке инвариантами относительно этих преобразований являются проекции тензорных величин по всем индексам на направления откалиброванной указанным способом тетрады.

7. Кроме двух выписанных однородных калибровок можно определить *смешанные калибровки*, в которых часть векторов тетрады калибруется способом, аналогичным хронометрической калибровке монады, а часть — способом, аналогичным кинеметрической калибровке монады (см. [29, с. 150]).

8. Кроме рассмотренных здесь групповых алгебраических калибровок в ряде работ использовались некоторые другие условия для определения компонент тетрады через метрический тензор, как алгебраические, так и дифференциальные. Например, можно использовать 4 условия вида

$$\nabla_{\mu} g^{\mu}(\alpha) \equiv \frac{\partial g^{\mu}(\alpha)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} g^{\sigma}(\alpha) = 0, \quad (6.2.12)$$

напоминающие условия Лоренца в электродинамике.

### 6.2.2. Тетрадные операторы дифференцирования

1. Отступим от ранее использованного порядка изложения составных частей методов — на второе место поставим рассмотрение операторов дифференцирования. В тетрадном методе можно говорить о двух типах операторов дифференцирования.

а) *Производные Ли* от тензорных величин вдоль векторов тетрады определяются следующим образом:

$$\partial(\alpha) B_{\nu}^{\mu \dots}(\beta \dots) \equiv \mathcal{L}_{(g^{\sigma}(\alpha))} B_{\nu}^{\mu \dots}(\beta \dots). \quad (6.2.13)$$

При использовании последовательного тетрадного метода эти операторы существенно упрощаются до

$$\partial(\alpha) = g^{\sigma}(\alpha) \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}. \quad (6.2.14)$$

б) *Ковариантные производные от тензоров с локальными индексами.* Определим операцию параллельного переноса произвольного вектора с локальным индексом  $B(\alpha)$ . Как обычно, полагая, что в близких точках разность компонент линейно выражается через компоненты переносимой величины и разность координат, имеем:

$$B(\alpha|x+dx) = [\delta(\alpha\beta) + \Delta_\sigma(\alpha\beta)dx^\sigma] B(\beta|x), \quad (6.2.15)$$

где  $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$  — *коэффициенты вращения Риччи*, которые в тетрадном методе играют роль символов Кристоффеля.

2. Чтобы выяснить свойства  $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$ , учтем, что в римановой геометрии при параллельном переносе длина вектора  $B_\mu B^\mu = B(\alpha)B(\alpha)$  остается неизменной, т. е.

$$\begin{aligned} B(\alpha|x+dx)B(\alpha|x+dx) &= B(\alpha|x)B(\alpha|x) \simeq \\ &\simeq B(\alpha|x)B(\alpha|x) + B(\beta|x)B(\gamma|x) [\Delta_\sigma(\gamma\beta) + \Delta_\sigma(\beta\gamma)] dx^\sigma. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Отсюда следует антисимметрия коэффициентов вращения Риччи:

$$\Delta_\sigma(\gamma\beta) = -\Delta_\sigma(\beta\gamma). \quad (6.2.17)$$

Очевидно, по общим правилам можно определить коэффициенты вращения Риччи лишь с универсальными или только с локальными индексами:

$$\Delta_{\alpha,\beta\gamma} \equiv \Delta_\alpha(\mu\nu)g_\beta(\mu)g_\gamma(\nu); \quad \Delta(\lambda, \mu\nu) \equiv \Delta_\alpha(\mu\nu)g^\alpha(\lambda). \quad (6.2.18)$$

3. Ковариантная производная от вектора с локальным индексом определяется как разность частной производной и изменения вектора, вызванного различием векторов тетрады в соседних точках, т. е.

$$\nabla_\sigma B(\alpha) = \frac{\partial B(\alpha)}{\partial x^\sigma} - \Delta_\sigma(\alpha\beta)B(\beta). \quad (6.2.19)$$

Для произвольного тензора с универсальными и локальными индексами оператор ковариантного дифференцирования имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots) &= \frac{\partial B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots)}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu B_{\nu\dots}^{\lambda\dots}(\alpha\dots) + \dots - \\ &- \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda B_{\lambda\dots}^{\mu\dots}(\alpha\dots) - \dots - \Delta_\sigma(\alpha\beta)B_{\nu\dots}^{\mu\dots}(\beta\dots) - \dots \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

4. Установим связь между символами Кристоффеля и коэффициентами вращения Риччи. Положив, что компоненты тетрады, как смешанные компоненты метрического тензора, обладают в римановой геометрии свойством  $\nabla_\nu g_\mu(\alpha) = 0$ , находим

$$\frac{\partial g_\mu(\alpha)}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_\lambda(\alpha) - \Delta_\nu(\alpha\beta)g_\mu(\beta) = 0. \quad (6.2.21)$$

Отсюда имеем искомые формулы:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda}(\alpha)}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu}(\alpha)}{\partial x^{\mu}} \right) + \frac{1}{2} (\Delta_{\mu,\nu}^{\lambda} + \Delta_{\nu,\mu}^{\lambda}); \quad (6.2.22)$$

$$\Delta_{\nu}(\alpha\beta) = \frac{1}{2} \left( g^{\lambda}(\beta) \frac{\partial g_{\lambda}(\alpha)}{\partial x^{\nu}} - g^{\lambda}(\alpha) \frac{\partial g_{\lambda}(\beta)}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} [g_{\lambda}(\alpha)g^{\mu}(\beta) - g_{\lambda}(\beta)g^{\mu}(\alpha)]. \quad (6.2.23)$$

5. Представляет интерес связь символов Кристоффеля и коэффициентов вращения Риччи в пространстве-времени с кручением. В этом случае в формуле (6.2.21) символы Кристоффеля должны быть заменены на обобщенные связности с тензором кручения  $S_{\mu\nu}^{\lambda}$ , согласно (4.2.23):

$$\frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x^{\nu}} - (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu,\nu}^{\lambda} + S_{\nu,\mu}^{\lambda}) g_{\lambda}(\alpha) - \Delta_{\nu}(\alpha\beta) g_{\mu}(\beta) = 0. \quad (6.2.24)$$

Напомним, что тензор кручения антисимметричен по паре нижних индексов, а верхний индекс принято опускать на третье место, что отмечено запятой. Симметризуя и антисимметризуя это выражение по парам индексов, приходим к выводу, что выражение (6.2.22) для символов Кристоффеля остается в силе, а вместо (6.2.23) приходим к выражению тензора кручения через коэффициенты вращения Риччи:

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda}(\alpha)}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu}(\alpha)}{\partial x^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} (\Delta_{\mu,\nu}^{\lambda} - \Delta_{\nu,\mu}^{\lambda}), \quad (6.2.25)$$

т. е. коэффициенты вращения Риччи в такой обобщенной геометрии содержат в себе информацию как о римановой кривизне, так и о кручении. Складывая выражения (6.2.22) и (6.2.25), находим

$$\Delta_{\nu,\mu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + S_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\lambda}(\alpha) \frac{\partial g_{\mu}(\alpha)}{\partial x^{\nu}}. \quad (6.2.26)$$

Легко видеть, что при отсутствии тензора кручения эта формула переходит в (6.2.21).

### 6.2.3. Тетрадные физико-геометрические тензоры

1. Векторы тетрады в двух близких точках могут быть ориентированы относительно друг друга произвольно. Ограничимся случаями, когда в близких точках ориентации векторов близки, т. е.  $g_{\mu}(\alpha)$  являются дифференцируемыми функциями. Тогда из первых производных от  $g_{\mu}(\alpha)$



можно образовать четыре антисимметричных физико-геометрических тензора

$$C_{\nu\mu}(\alpha) = -C_{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_\mu(\alpha)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_\nu(\alpha)}{\partial x^\mu} \right), \quad (6.2.27)$$

называемые *объектами неголономности*. Всевозможным образом проецируя их на векторы тетрады, можно образовать 24 физико-геометрических скаляра (относительно группы универсальных допустимых координатных преобразований):

$$C(\lambda\sigma, \alpha) = C_{\mu\nu}(\alpha)g^\mu(\lambda)g^\nu(\sigma). \quad (6.2.28)$$

Некоторые компоненты объектов неголономности ранее уже использовались при получении монадных физико-геометрических тензоров:

$$C_{\nu\mu}(0) \rightarrow \{a_\mu; \omega_{\mu\nu}\}. \quad (6.2.29)$$

2. Термин «объект неголономности» связан со следующим обстоятельством. Дифференциалы координат  $dx^\mu$  можно сопоставить со смещениями  $dx(\alpha)$  в касательном в данной точке плоском пространстве-времени  $dx(\alpha) = g_\mu(\alpha)dx^\mu$ . В случае отличных от нуля объектов неголономности компоненты тетрады не являются компонентами градиента

$$g_\mu(\alpha) \neq \frac{\partial X(\alpha)}{\partial x^\mu},$$

а следовательно, величины  $dx(\alpha)$  не являются полными дифференциалами в отличие от выражения

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

которое можно проинтегрировать. В последнем случае преобразование  $x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$  называется *голономным*.

3. Из формул (6.2.21) можно выразить объекты неголономности через коэффициенты вращения Риччи и обратно:

$$C_{\nu\mu}(\alpha) = \frac{g^\sigma(\alpha)}{2} (\Delta_{\nu,\sigma\mu} - \Delta_{\mu,\sigma\nu}); \quad (6.2.30)$$

$$\Delta_{\mu,\alpha\nu} = C_{\alpha\mu}(\beta)g_\nu(\beta) + C_{\mu\nu}(\beta)g_\alpha(\beta) - C_{\nu\alpha}(\beta)g_\mu(\beta). \quad (6.2.31)$$

Из (6.2.27) и (6.2.31) следует явное выражение коэффициентов вращения Риччи через производные от компонент тетрады:

$$\Delta_{\mu,\alpha\nu} = \frac{g_\nu(\beta)}{2} \left( \frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^\mu} \right) + \frac{g_\alpha(\beta)}{2} \left( \frac{\partial g_\nu(\beta)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^\nu} \right) + \frac{g_\mu(\beta)}{2} \left( \frac{\partial g_\nu(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^\nu} \right). \quad (6.2.32)$$

4. Тензор Римана—Кристоффеля легко выражается через коэффициенты вращения Риччи или непосредственно с помощью формул (6.2.22), или независимо посредством параллельного переноса вектора  $B(\alpha)$  по замкнутому контуру. В последнем случае имеем

$$\Delta B(\alpha) = \frac{1}{2} R_{\sigma\nu}(\alpha\beta) B(\beta) ds^{\sigma\nu}, \quad (6.2.33)$$

где тензор Римана—Кристоффеля имеет вид:

$$R_{\sigma\nu}(\alpha\beta) = \frac{\partial \Delta_\nu(\alpha\beta)}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Delta_\sigma(\alpha\beta)}{\partial x^\nu} + \Delta_\nu(\alpha\gamma) \Delta_\sigma(\gamma\beta) - \Delta_\sigma(\alpha\gamma) \Delta_\nu(\gamma\beta). \quad (6.2.34)$$

Выражение для площади замкнутого контура записано в (4.4.1). Отсюда для скалярной кривизны находим выражение:

$$R = R_{\sigma\nu}(\alpha\beta) g^\sigma(\alpha) g^\nu(\beta) = 2g^\nu(\beta) g^\sigma(\alpha) \frac{\partial \Delta_\nu(\alpha\beta)}{\partial x^\sigma} + \Delta(\beta\alpha\gamma) \Delta(\alpha\gamma\beta) + \Delta(\beta\gamma\beta) \Delta(\alpha\gamma\alpha). \quad (6.2.35)$$

5. Уравнения Эйнштейна в тетрадной форме записываются следующим образом:

$$R_\nu(\alpha) - \frac{1}{2} g_\nu(\alpha) R = \varkappa T_\nu(\alpha) \quad \text{или} \quad R(\alpha\beta) - \frac{1}{2} \eta(\alpha\beta) R = \varkappa T(\alpha\beta). \quad (6.2.36)$$

Другие соотношения и тождества также легко переписать в тетрадной форме.

#### 6.2.4. Метод изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза

В большой серии работ по анализу алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна и нахождению новых точных решений уравнений Эйнштейна оказался чрезвычайно эффективным метод изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза [87, 119, 181]. В отличие от всех ранее изложенных методов, данный метод нацелен не на описание наблюдаемых и свойств систем

отсчета, а на анализ именно алгебраической структуры пространственно-временных многообразий и на получение точных решений уравнений Эйнштейна. Эффективность метода объясняется тем, что тензор Римана—Кристоффеля (Вейля) обладает изотропными собственными векторами, в качестве которых можно выбрать векторы тетрады Ньюмена—Пенроуза. Таким образом, этот метод можно органически связать со структурой пространства-времени.

Важно отметить, что в методе Ньюмена—Пенроуза используются комплексные величины. Из четырех векторов тетрады Ньюмена—Пенроуза два являются действительными; их можно связать с двумя векторами диадного метода: времени-подобным вектором  $\tau^\mu$  и пространственно-подобным вектором  $l^\mu$ . Изложим ключевые моменты данного метода, как и предыдущих, в виде четырех составных частей.

**1. Алгебра.** В методе изотропных тетрад Ньюмена—Пенроуза принято использовать разные коренные буквы для описания четырех векторов  $\{b_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ , в отличие от унифицированных обозначений ранее рассмотренного тетрадного метода. Два первых вектора ( $b_\mu$  и  $n_\mu$ ) являются действительными, а два оставшихся — комплексно сопряженными друг другу. Их можно представить через две пары вещественных векторов тетрады:

$$b_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_\mu(0) + g_\mu(1)]; \quad n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_\mu(0) - g_\mu(1)]; \quad (6.2.37)$$

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_\mu(2) - ig_\mu(3)]; \quad \bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[g_\mu(2) + ig_\mu(3)]. \quad (6.2.38)$$

Метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  представляется через тетраду Ньюмена—Пенроуза следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = b_\mu n_\nu + n_\mu b_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (6.2.39)$$

Векторы тетрады удовлетворяют условиям квазиортогональности:

$$b_\mu b^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0; \\ b_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1; \quad b_\mu m^\mu = b_\mu \bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0. \quad (6.2.40)$$

Изотропные векторы Ньюмена—Пенроуза следующим образом связаны с диадными составляющими метрического тензора (см. разд. 6.3):

$$\tau_\mu = g_\mu(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu + n_\mu); \quad l_\mu = g_\mu(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu - n_\mu); \quad \gamma_{\mu\nu} = m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (6.2.41)$$

Метод Ньюмена—Пенроуза представляет собой последовательный тетрадный метод, т. е. в нем имеют дело лишь со скалярами относительно группы универсальных координатных преобразований, т. е. с тензорными величинами, спроецированными по всем индексам на направления векторов изотропной тетрады.

**2. Спиновые коэффициенты Ньюмена—Пенроуза** представляют собой совокупность физико-геометрических скаляров, соответствующих физико-геометрическим тензорам в ранее рассмотренных методах. Они определяются как независимые проекции ковариантных производных векторов тетрады (коэффициентов вращения Риччи) на направления изотропных векторов. Характерно, что для этих величин используют не унифицированные обозначения, а специальные коренные буквы для каждой из компонент, что заставляет использовать своеобразный «словарь»:

$$\begin{aligned} \kappa &= b_{\mu;\nu} m^\mu b^\nu; & \pi &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu b^\nu; & \tau &= b_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu; & \nu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu; \\ \sigma &= b_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu; & \mu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu; & \rho &= b_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu; & \lambda &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu; \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(b_{\mu;\nu} n^\mu b^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu b^\nu); & \gamma &= \frac{1}{2}(b_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu); & & & & (6.2.42) \\ \beta &= \frac{1}{2}(b_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu); & \alpha &= \frac{1}{2}(b_{\mu;\nu} n^\mu \bar{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu). \end{aligned}$$

Всего имеется 12 комплексных спиновых коэффициентов Ньюмена—Пенроуза, соответствующих 24 вещественным скалярам последовательного тетрадного метода.

Физико-геометрические тензоры как монадного, так и диадного методов (см. разд. 6.3) можно записать через спиновые коэффициенты Ньюмена—Пенроуза, например, для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$\begin{aligned} a(0)_\beta &= -\frac{1}{2}[(\kappa + \tau - \bar{\pi} - \bar{\nu})\bar{m}_\beta + (\bar{\kappa} + \bar{\tau} - \pi - \nu)m_\beta]; \\ a(1)_\beta &= -\frac{1}{2}[(\kappa - \tau + \bar{\pi} - \bar{\nu})\bar{m}_\beta + (\bar{\kappa} - \bar{\tau} + \pi - \nu)m_\beta]. \end{aligned}$$

**3. Операторы дифференцирования.** В методе Ньюмена—Пенроуза введены специальные обозначения для операторов ковариантного дифференцирования вдоль направлений изотропной тетрады:

$$D = b^\mu \nabla_\mu; \quad \Delta = n^\mu \nabla_\mu; \quad \delta = m^\mu \nabla_\mu; \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \nabla_\mu. \quad (6.2.43)$$

Так как в данном методе рассматривается действие этих операторов на скаляры, то они совпадают с производными Ли вдоль соответствующих направлений.

**4. Запись основных соотношений ОТО.** В методе Ньюмена—Пенроуза в качестве основных гравитационных величин выступают компоненты тетрады, спиновые коэффициенты (6.2.42) и полный набор независимых скалярных проекций тензора Римана—Кристоффеля, который представляется в форме

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = C_{\mu\nu\alpha\beta} + \Phi_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \Phi_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} + \Phi_{\nu\beta} g_{\mu\alpha} - \Phi_{\nu\alpha} g_{\mu\beta} + 2\Lambda(g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}), \quad (6.2.44)$$

где  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$  — тензор Вейля и, кроме того, использованы обозначения:

$$\Lambda \equiv -\frac{1}{24}R; \quad \Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right). \quad (6.2.45)$$

Проекции последнего тензора  $\Phi_{\mu\nu}$ , называемого девиатором тензора Риччи, представляются в виде трех действительных и трех комплексных скаляров:

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= \Phi_{\mu\nu} b^\mu b^\nu; & \Phi_{01} &= \Phi_{\mu\nu} b^\mu m^\nu; & \Phi_{02} &= \Phi_{\mu\nu} m^\mu m^\nu; \\ \Phi_{10} &= \Phi_{\mu\nu} b^\mu \bar{m}^\nu; & \Phi_{11} &= \Phi_{\mu\nu} b^\mu n^\nu; & \Phi_{12} &= \Phi_{\mu\nu} n^\mu m^\nu; & \Phi_{20} &= \Phi_{\mu\nu} \bar{m}^\mu \\ & & & & & & \bar{m}^\nu; & \Phi_{21} &= \Phi_{\mu\nu} n^\mu \bar{m}^\nu; & \Phi_{22} &= \Phi_{\mu\nu} n^\mu n^\nu.\end{aligned}$$

Проекции тензора Вейля представляются в виде пяти комплексных скаляров:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{\mu\nu\alpha\beta} b^\mu m^\nu b^\alpha m^\beta; & \Psi_1 &= -C_{\mu\nu\alpha\beta} b^\mu n^\nu b^\alpha m^\beta; \\ \Psi_2 &= -\frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} (b^\mu n^\nu b^\alpha n^\beta - b^\mu n^\nu m^\alpha \bar{m}^\beta); & & (6.2.46) \\ \Psi_3 &= -C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu b^\nu n^\alpha \bar{m}^\beta; & \Psi_4 &= -C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu \bar{m}^\nu n^\alpha \bar{m}^\beta.\end{aligned}$$

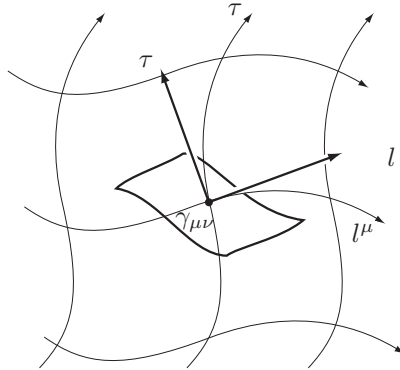
В качестве уравнений для этих переменных рассматриваются: независимые проекции тождеств Бианки на направления изотропных тетрад, проекции тождеств Риччи, координатные уравнения на компоненты тетрады, а также выражения девиатора тензора Риччи (6.2.46)  $\Phi_{ab}$  и  $\Lambda$  через проекции тензора энергии-импульса материи (уравнения Эйнштейна).

### 6.3. Диадный метод

Рассмотрим диадный метод, т. е. метод 1+1+2-расщепления 4-мерного пространства-времени, занимающий промежуточное положение между монадным и тетрадным методами. Его целесообразно использовать при описании областей пространства-времени, в которых имеется, кроме времени-подобного, физически выделенное (одно) пространственно-подобное направление. Таковыми, например, могут быть направление силовых линий магнитного поля Земли или нормаль к фронту распространения волнового процесса.

#### 6.3.1. Алгебра диадного метода

Диадный метод, как и монадный, можно построить как в общековариантном виде, никак не связанном с выбором координатных систем, так и в групповых калибровках, когда координатные системы специальным образом привязаны к векторам диады. В общековариантной формулировке диадного метода следует исходить из задания двух взаимно ортогональных конгруэнций. В этой главе будем полагать, что одна из них является времени-подобной, соответствующей мировым линиям приборов системы отсчета, а другая — пространственно-подобной. Вдоль них вводятся единичные касательные векторы  $\tau^\mu$  и  $l^\mu$  (см. рис. 6.3).



**Рис. 6.3.** Локальное  $1 + 1 + 2$ -расщепление 4-мерного пространства-времени

В диадном методе метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu}(0)g_{\nu}(0) - g_{\mu}(1)g_{\nu}(1) - \gamma_{\mu\nu} \equiv \tau_{\mu}\tau_{\nu} - l_{\mu}l_{\nu} - \gamma_{\mu\nu}, \quad (6.3.1)$$

где составляющие удовлетворяют условиям ортонормированности:

$$\tau_{\mu}\tau^{\mu} = 1; \quad l_{\mu}l^{\mu} = -1; \quad \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = 2; \quad \tau_{\mu}l^{\mu} = \tau_{\mu}\gamma^{\mu\nu} = l_{\mu}\gamma^{\mu\nu} = 0. \quad (6.3.2)$$

Здесь  $\gamma_{\mu\nu}$  — метрический тензор 2-мерного пространственно-подобного локального сечения, ортогонального  $\tau^{\mu} = g^{\mu}(0)$  и  $l^{\mu} = g^{\mu}(1)$ . В такой теории используются либо скаляры — тензорные величины, свернутые по всем индексам с векторами  $\tau^{\mu}$  и  $l^{\mu}$ , либо 2-мерные тензоры, спроецированные на направления 2-мерной локальной поверхности посредством  $-\gamma_{\nu}^{\mu}$ .

Введем групповые калибровки диадного метода, аналогичные изложенным в гл. 3 калибровкам монадного метода. Теперь их будет больше. Ограничимся случаями первичного выделения времени-подобного вектора  $\tau^{\mu}$ , тогда имеем четыре групповые калибровки диадного метода<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>Поскольку в гл. 3 для них приняты греческие названия, предложенные А. Л. Зельмановым, то для обозначения новых методов приходится следовать этому же способу. Так, для обозначения калибровки пространственно-подобного направления, аналогичной хронометрической (термин, производный от греческого слова *χρονοσ* — время), примем термин *хориометрическая* калибровка (производный от греческого слова *χωριουσ* — место), а для калибровки, соответствующей кинеметрической, — термин *орометрическая* калибровка (производный от греческого слова *ορωσ* — вижу).

### Хронохориометрическая калибровка

В этой калибровке осуществляется последовательное задание векторов  $\tau^\mu$  и  $l^\mu$  способом, аналогичным хронометрической калибровке монады:

$$\tau^\mu = \frac{g_o^\mu}{\sqrt{g_{oo}}} \rightarrow \tau_\mu = \frac{g_{o\mu}}{\sqrt{g_{oo}}}; \quad (6.3.3)$$

$$l^\mu = \frac{{}^*h_1^\mu}{\sqrt{{}^*h_{11}}} = \left\{ \frac{g_{o1}}{\sqrt{g_{oo}(g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11})}}; -\frac{\sqrt{g_{oo}}}{\sqrt{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}}}; 0; 0 \right\} \rightarrow$$

$$l_\mu = \frac{{}^*h_{1\mu}}{\sqrt{{}^*h_{11}}} = \left\{ 0; \frac{\sqrt{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}}}{\sqrt{g_{oo}}}; \frac{g_{o1}g_{o2} - g_{oo}g_{12}}{\sqrt{g_{oo}(g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11})}}; \frac{g_{o1}g_{o3} - g_{oo}g_{13}}{\sqrt{g_{oo}(g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11})}} \right\}, \quad (6.3.4)$$

где  ${}^*h_{\mu\nu}$  — компоненты 3-мерного метрического тензора в хронометрической калибровке. Тогда компоненты 2-мерного метрического тензора  $\gamma_{\mu\nu}$  имеют вид:

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{g_{o\xi}g_{o\eta} - g_{oo}g_{\xi\eta}}{g_{oo}} - \frac{(g_{o\xi}g_{o1} - g_{1\xi}g_{oo})(g_{o\eta}g_{o1} - g_{1\eta}g_{oo})}{g_{oo}(g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11})}; \quad (6.3.5)$$

$$\gamma^{\xi\eta} = -g^{\xi\eta}; \quad \gamma_\xi^\xi = -g_\eta^\eta;$$

$$\gamma^{o1} = -g^{o1} + \frac{g_{o1}}{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}}; \quad \gamma^{oo} = -g^{oo} - \frac{g_{11}}{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}};$$

$$\gamma^{11} = -g^{11} + \frac{g_{oo}}{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}};$$

$$\gamma_{o\mu} = \gamma_{1\mu} = 0; \quad \gamma_o^\mu = \gamma_1^\mu = 0; \quad \gamma_\xi^o = \frac{g_{1\xi}g_{o1} - g_{o\xi}g_{11}}{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}};$$

$$\gamma_\xi^1 = \frac{g_{o\xi}g_{o1} - g_{1\xi}g_{oo}}{g_{o1}^2 - g_{oo}g_{11}}. \quad (6.3.6)$$

Здесь и в дальнейшем индексы  $\xi, \zeta, \eta, \varphi, \chi, \psi$  пробегают значения 2, 3.

Две координатные системы, в которых выполняется данная калибровка, обладают свойством  $\tau^i = \tau'^i = 0$ ;  $l^\xi = l'^\xi = 0$ , т. е. они связаны такими преобразованиями координат, что

$$\tau'^i = \tau^o \frac{\partial x'^i}{\partial x^o} = 0 \rightarrow \frac{\partial x'^i}{\partial x^o} = 0; \quad l'^\xi = l^1 \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^1} = 0 \rightarrow \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^1} = 0. \quad (6.3.7)$$

Это означает, что в этой калибровке из множества всевозможных допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1, x^2, x^3); \quad (6.3.8)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^2, x^3), \quad (6.3.9)$$

и в данном варианте диадного метода имеют дело со скалярами и 2-тензорами, инвариантными при преобразованиях (6.3.8) и ковариантными относительно преобразований (6.3.9) (метод хронохориометрических инвариантов). Таким свойством обладают все ковариантные и только с индексами 2 и 3 контравариантные  $\gamma$ -спроецированные тензоры.

### Кинеорометрическая калибровка

Откалибруем диаду  $\{\tau^\mu, l^\mu\}$  в два этапа способом, аналогичным кинеметрической калибровке монады:

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^o}{\sqrt{g^{oo}}} \rightarrow \tau^\mu = \frac{g^{o\mu}}{\sqrt{g^{oo}}}; \quad (6.3.10)$$

$$l_\mu = \frac{{}^*h_\mu^1}{\sqrt{{}^*h^{11}}} = \left\{ \frac{g^{o1}}{\sqrt{g^{oo}(g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11})}}; -\frac{\sqrt{g^{oo}}}{\sqrt{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}}}; 0; 0 \right\}; \quad (6.3.11)$$

$$l^\mu = \frac{{}^*h^{\mu 1}}{\sqrt{{}^*h^{11}}} = \left\{ 0; \frac{\sqrt{g^{o1}g^{oo} - g^{oo}g^{11}}}{\sqrt{g^{oo}}}; \frac{g^{o1}g^{o2} - g^{12}g^{oo}}{\sqrt{g^{oo}(g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11})}}; \frac{g^{o1}g^{o3} - g^{13}g^{oo}}{\sqrt{g^{oo}(g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11})}} \right\},$$

где  ${}^*h^{\mu 1}$  — компоненты метрического тензора 3-мерного пространственного сечения в кинеметрической калибровке монады. Компоненты 2-мерного метрического тензора  $\gamma_{\mu\nu}$  тогда находятся в виде

$$\gamma^{\xi\eta} = \frac{g^{o\xi}g^{o\eta} - g^{\xi\eta}g^{oo}}{g^{oo}} - \frac{(g^{o1}g^{\xi o} - g^{1\xi}g^{oo})(g^{1o}g^{\eta o} - g^{1\eta}g^{oo})}{g^{oo}(g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11})};$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -g_{\xi\eta}; \quad \gamma_\eta^\xi = -g_\eta^\xi;$$

$$\gamma_{oo} = -g_{oo} - \frac{g^{11}}{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}};$$

$$\gamma_{11} = -g_{11} - \frac{g^{oo}}{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}}; \quad \gamma_{o1} = -g_{o1} - \frac{g^{o1}}{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}};$$

$$\gamma^{o\mu} = \gamma^{1\mu} = 0; \quad \gamma_\mu^o = \gamma_\mu^1 = 0; \quad \gamma_o^\xi = \frac{g^{o1}g^{1\xi} - g^{o\xi}g^{11}}{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}}; \quad \gamma_1^\xi = \frac{g^{o1}g^{o\xi} - g^{1\xi}g^{oo}}{g^{o1}g^{o1} - g^{oo}g^{11}}. \quad (6.3.12)$$

Системы координат, в которых  $\tau_i = \tau'_i = 0$ ,  $l_\xi = l'_\xi = 0$ , связаны такими преобразованиями координат, что

$$\frac{\partial x^o}{\partial x'^i} = 0; \quad \frac{\partial x^1}{\partial x'^\xi} = 0.$$



Это приводит к выделению класса преобразований координат:

$$x'^o = x'^o(x^o); \quad x'^1 = x'^1(x^o, x^1); \quad (6.3.13)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^o, x^1, x^2, x^3). \quad (6.3.14)$$

Назовем кинеметрически-инвариантными (к. о. и.) 2-тензорами такие величины, которые инвариантны при преобразованиях (6.3.13) и ковариантны относительно преобразований (6.3.14). Такими свойствами обладают следующие комплексы, образованные из компонент произвольного тензора  $B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}$ :

$$\begin{aligned} B_{\mu \dots \nu \dots \beta \dots}^{\alpha \dots} \tau^\mu \dots l^\nu \dots (-1)^{p+k} \gamma_{\alpha\eta} \dots \gamma_\xi^\beta \dots \rightarrow \\ \rightarrow B_{ij \dots \xi \eta \dots}^{o \dots o} \frac{1}{(g^{oo})^{m/2}} \frac{1}{(*h^{11})^{n/2}} h^{i1} h^{j1} \dots h^{s1}. \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

Таким образом, (к. о. и.) тензорами являются все  $\tau$ - и  $l$ -спроецированные тензоры (скаляры), а также все контравариантные и только с ковариантными индексами 2 и 3  $\gamma$ -спроецированные тензоры. В такой калибровке достаточно использовать лишь (к. о. и.) величины.

### Кинехориометрическая калибровка

В этой калибровке вектор  $\tau^\mu$  задается кинеметрическим способом, а затем вектор  $l^\mu$  определяется хориометрическим образом (смешанная калибровка):

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^o}{g^{oo}}; \quad l^\mu = \frac{*h_1^\mu}{\sqrt{*h_{11}}} = \left\{ 0; -\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}; 0; 0 \right\}, \quad (6.3.16)$$

где  $*h_{\mu\nu}$  — компоненты 3-мерного метрического тензора в кинеметрической калибровке. В этом методе из множества допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^o = x'^o(x^o); \quad x'^1 = x'^1(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad (6.3.17)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^o, x^2, x^3), \quad (6.3.18)$$

а используемые величины и операторы инвариантны при преобразованиях (6.3.17) и ковариантны относительно (6.3.18) (метод кинехориометрических инвариантов).

### Хронометрическая калибровка

Данная калибровка диады также является смешанной, когда векторы задаются соотношениями:

$$\tau^\mu = \frac{g_o^\mu}{\sqrt{g_{oo}}}; \quad (6.3.19)$$

$$l_\mu = \frac{{}^*h_\mu^1}{\sqrt{{}^*h_{11}}} = \left\{ 0; -\frac{1}{\sqrt{-g^{11}}}; 0; 0 \right\}, \quad (6.3.20)$$

где  ${}^*h_{\mu\nu}$  — компоненты 3-мерного метрического тензора в хронометрической калибровке. В этом методе из множества допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^1); \quad (6.3.21)$$

$$x'^\xi = x'^\xi(x^1, x^2, x^3), \quad (6.3.22)$$

а используемые величины и операторы инвариантны при преобразованиях (6.3.21) и ковариантны относительно (6.3.22) (метод хронометрических инвариантов).

Укажем ряд задач, где целесообразно использовать диадный метод.

1. Впервые монадный метод возник из необходимости выделения пятой координаты в 5-мерной теории Калуцы. В гл. 8 будет рассмотрена 5-мерная теория на основе усовершенствованного монадного метода, осуществляющего такое  $1 + 4$ -расщепление. Однако в получившемся 4-мерном пространственно-временном сечении для описания наблюдаемых относительно системы отсчета необходимо произвести еще одно расщепление ( $1 + 3$ -расщепление). Таким образом, в совокупности опять приходим к двукратному  $1 + 1 + 3$ -расщеплению, т. е. к использованию диадного метода, однако в этом случае на первом этапе будет выделяться хориометрическим способом пространственно-подобное направление, соответствующее 5-й координате, а затем — времени-подобное, соответствующее 4-скорости системы отсчета. В такой теории формулы будут иметь аналогичный вид, отличие будет состоять в некоторых знаках.

2. Диадный метод необходим также в другом варианте 5-мерной теории, развивавшемся О. Клейном, В. А. Фоком и другими авторами. Там также на первом этапе выделяется скрытая координата  $x^4$ , а затем направление системы отсчета  $\tau^\mu$ .

3. Имеются варианты 6- и 7-мерных теорий грави-электрослабых взаимодействий, где последовательно выделяются два или более (скрытых) пространственно-подобных направлений. В таких случаях также окажутся полезными формулы, выписанные в этом разделе, при неко-

торых коррективах в знаках из-за пространственно-подобного характера обоих векторов диады.

4. Наконец, и в рамках 4-мерной теории могут возникнуть задачи, в которых необходимо выделить два пространственно-подобных направления, например, когда требуется задать два угла (сферические координаты) или когда требуется описание ориентации относительно двух выделенных объектов.

### 6.3.2. Диадные физико-геометрические тензоры

1. Из диадных составляющих метрического тензора и их первых производных в самом общем случае можно построить 11 независимых диадных физико-геометрических тензоров. Выпишем их в общековариантном виде. Введем для них унифицированные обозначения, обозначая индексом 0 в скобках величины, возникающие из прежних монадных тензоров, а индексом 1 в скобках — соответствующие второму вектору диады. Семь тензоров получаются всевозможными проецированиями трех монадных физико-геометрических тензоров на направления  $l$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} a(0) &\equiv l^\mu a_\mu; & a(0)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu a_\mu; & \hat{d}(0) &\equiv l^\mu l^\nu d_{\mu\nu}; & d(0)_{\alpha\beta} &\equiv \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu d_{\mu\nu}; \\ \omega(0)_{\alpha\beta} &\equiv \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \omega_{\mu\nu}; & \omega(0)_\alpha &\equiv \gamma_\alpha^\mu l^\nu \omega_{\mu\nu}; & d(0)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu d_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Три диадных физико-геометрических тензора получаются аналогично монадным заменой  $\tau^\mu$  и  $h_{\mu\nu}$  на соответственно  $l^\mu$  и  $\gamma_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} a(1)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu}); & \omega(1)_{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{2} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu}); \\ d(1)_{\alpha\beta} &\equiv -\frac{1}{2} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu;\nu} + l_{\nu;\mu}). \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

Наконец, одна векторная величина появляется из совместного рассмотрения двух векторных полей:

$$\omega(1)_\alpha = \frac{1}{2} \gamma_\alpha^\mu \tau^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu}). \quad (6.3.25)$$

Итого, имеем: четыре тензора второго ранга, пять векторов и два скаляра.

2. В групповых калибровках эти тензоры записываются с индексами, принимающими лишь два значения (2 и 3). После подстановки в эти формулы выражений в конкретных калибровках оказывается, что некоторые из них тождественно обращаются в нуль.

- 1) В хронохориометрической калибровке в самом общем случае отличны от нуля 10 диадных физико-геометрических тензоров, поскольку имеет место соотношение

$$d(0)_\xi = \omega(1)_\xi. \quad (6.3.26)$$

- 2) В кинееорометрической калибровке три из 11 физико-геометрических тензоров тождественно обращаются в нуль:

$$\omega(0)_\xi \equiv 0; \quad \omega(0)_{\xi\eta} \equiv 0; \quad \omega(1)_{\xi\eta} \equiv 0. \quad (6.3.27)$$

- 3) В кинехориометрической калибровке обращаются в нуль два диадных физико-геометрических тензора:

$$\omega(0)_{\xi\eta} = 0; \quad \omega(0)_\xi = 0. \quad (6.3.28)$$

- 4) В хронооорометрической калибровке тождественно равны нулю два физико-геометрических тензора:

$$\omega(1)_{\xi\eta} = 0; \quad \omega(1)_\xi = 0. \quad (6.3.29)$$

3. *Диадный метод наиболее естественен для описания электромагнитного или иного излучения относительно выделенной системы отсчета.* Действительно, электромагнитное или иное излучение, распространяющееся со скоростью света, характеризуется изотропным волновым вектором  $k^\mu$ . Времени-подобная часть этого вектора пропорциональна 4-скорости  $u^\mu = \tau^\mu$  используемой системы отсчета. Пространственно-подобную часть  $-h_\nu^\mu k^\nu$  используем для определения второго единичного вектора диады  $l^\mu$ , ортогонального  $\tau^\mu$  так, что

$$k^\mu = (\tau^\mu \pm l^\mu)\omega(x), \quad (6.3.30)$$

где  $\omega(x)$  — частота излучения (скалярная функция). Очевидно, так определенный вектор изотропен.

4. Характер конгруэнции изотропных линий можно описать с помощью трех оптических инвариантов:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}k_{;\mu}^\mu; \quad \Omega^2 = \frac{1}{4}(k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu})k^{\mu;\nu}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{4}(k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu})k^{\mu;\nu} - \varepsilon^2, \quad (6.3.31)$$

которые позволяют сопоставить контуры непрозрачного предмета с его тенью на экране, расположенном на некотором расстоянии  $dr$  за предметом (см. рис. 6.4). Величина  $\varepsilon dr$  характеризует растяжение или сжатие тени (рис. 6.4 а);  $\Omega dr$  — поворот (рис. 6.4 б), а  $|\sigma| dr$  — сдвиг (сплюснутость) тени (рис. 6.4 в).

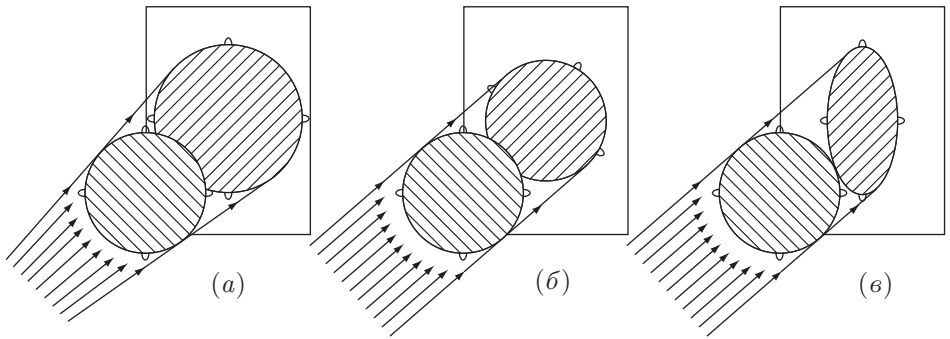


Рис. 6.4. Геометрический смысл трех оптических инвариантов

5. Оптические инварианты легко записать через диадные физико-геометрические тензоры. Для этого учтем, что изотропные линии, к которым касателен волновой вектор  $k^\mu$ , являются геодезическими, т. е. вектор  $k^\mu$  удовлетворяет условию:

$$k^\nu k_{;\nu}^\mu = 0 \rightarrow (\tau^\nu \pm l^\nu)[\omega_{,\nu}(\tau^\mu \pm l^\mu) + \omega(\tau^\mu \pm l^\mu)_{;\nu}] = 0. \quad (6.3.32)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует выбору  $k^\mu = (\tau^\mu + l^\mu)\omega$ , а нижний знак — аналогичному выражению со знаком минус. Проецируя это соотношение на направления  $\tau$ ,  $l$ ,  $\gamma$ , получаем:

$$\hat{d}(0) \mp a(0) + \frac{1}{\omega^2}\omega_{,\nu}k^\nu = 0; \quad (6.3.33)$$

$$a(0)_\nu + a(1)_\nu \mp 2(\omega(0)_\nu + \omega(1)_\nu) = 0. \quad (6.3.34)$$

Используя (6.3.23) и (6.3.24), оптические скаляры можно записать в виде

$$\varepsilon = -\frac{\omega}{2}(d(0) \pm d(1)); \quad (6.3.35)$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{2}[\omega(0)_{\mu\nu} \pm \omega(1)_{\mu\nu}][\omega(0)^{\mu\nu} \pm \omega(1)^{\mu\nu}]; \quad (6.3.36)$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{2}[d(0)_{\mu\nu} \pm d(1)_{\mu\nu}][d(0)^{\mu\nu} \pm d(1)^{\mu\nu}] - \frac{\omega^2}{4}(d(0) \pm d(1))^2. \quad (6.3.37)$$

Эти формулы позволяют наделить физическим смыслом диадные физико-геометрические тензоры  $\omega(1)_{\mu\nu}$ ,  $d(1)_{\mu\nu}$  и  $d(1)$ .

6. Наконец, укажем связь диадного метода с хроногеометрией [143]. Для этого определим в 2-мерной области хроногеометрическим образом

заданных координат  $\tau = x^0$ ,  $l = x^1$  два ортогональных направления (зададим диаду) и запишем уравнения двух изотропных конусов

$$f_{(1)}(T, R, y^\alpha) = f(x^\alpha(T + R); y^\alpha) = 0; \quad (6.3.38)$$

$$f_{(2)}(T, R, y^\alpha) = f(x^\alpha(T - R); y^\alpha) = 0 \quad (6.3.39)$$

с вершинами соответственно в точках  $x^\alpha(T + R)$  и  $x^\alpha(T - R)$  на мировой линии одиночного наблюдателя;  $y^\alpha$  — координата наблюдаемой точки, лежащей на пересечении этих конусов. Нормали к конусам  $f_{(1)\alpha} = \partial f_{(1)}/\partial y^\alpha$  и  $f_{(2)\alpha} = \partial f_{(2)}/\partial y^\alpha$  также являются изотропными. Вводя обозначения  $f_{(1)R} = \partial f_{(1)}/\partial R$  и  $f_{(2)R} = \partial f_{(2)}/\partial R$ , находим два вектора диады:

$$\tau_\alpha = \frac{f_{(1)R}f_{(2)\alpha} - f_{(1)\alpha}f_{(2)R}}{\sqrt{2f_{(1)R}f_{(2)R}f_{(1)\beta}f_{(2)\beta}}}; \quad l_\alpha = -\frac{f_{(1)R}f_{(2)\alpha} + f_{(1)\alpha}f_{(2)R}}{\sqrt{2f_{(1)R}f_{(2)R}f_{(1)\beta}f_{(2)\beta}}}, \quad (6.3.40)$$

соответственно ортогональные гиперповерхности  $T = \text{const}$  и  $R = \text{const}$ . Применяя формулы монадного и диадного методов, можно показать, что  $\omega(0)_{\alpha\beta} = 0$  и  $\omega(1)_{\alpha\beta} = 0$ . Таким образом, для описания данной ситуации целесообразно использовать *диадный метод в кинеметрической калибровке*.

### 6.3.3. Диадные операторы дифференцирования

1. В качестве основных диадных операторов (в общековариантном виде) выберем следующие три, которые при действии на  $\gamma$ -спроецированные тензоры дают опять  $\gamma$ -спроецированные тензоры:

1) диадный оператор временного дифференцирования

$$\bar{\partial}_T \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \Gamma_{\alpha\dots\nu\dots}^{\mu\dots\beta\dots} \mathcal{L}_{(\tau)} \tilde{B}_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \tau^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^\lambda} - \tilde{N}_{\lambda\dots}^{\mu\dots} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\lambda\dots} - \dots + \tilde{N}_{\nu\dots}^{\lambda\dots} \tilde{B}_{\lambda\dots}^{\mu\dots} + \dots, \quad (6.3.41)$$

где  $\tilde{N}_{\sigma\dots}^{\lambda\dots} = \tau_{,\sigma}^{\lambda\dots} - \tau^\lambda a_{\sigma\dots} - 2l^\lambda \omega(1)_{\sigma\dots} - 2l_{\sigma\dots} [d(0)^\lambda - \omega(1)^\lambda]$ ;

2) диадный оператор дифференцирования вдоль  $l$

$$\bar{\partial}_L \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \Gamma_{\alpha\dots\nu\dots}^{\mu\dots\beta\dots} \mathcal{L}_{(l)} \tilde{B}_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = l^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^\lambda} - \tilde{L}_{\lambda\dots}^{\mu\dots} \tilde{B}_{\nu\dots}^{\lambda\dots} - \dots + \tilde{L}_{\nu\dots}^{\lambda\dots} \tilde{B}_{\lambda\dots}^{\mu\dots} + \dots, \quad (6.3.42)$$

где  $\tilde{L}_{\sigma\dots}^{\lambda\dots} = l_{,\sigma}^{\lambda\dots} - l^\lambda a(1)_{\sigma\dots} - 2\tau^\lambda \omega(0)_{\sigma\dots} - 2\tau_{\sigma\dots} [d(0)^\lambda - \omega(1)^\lambda]$ ;

3) диадная ковариантная производная вдоль направлений  $\gamma$  (ковариантного 2-мерного дифференцирования):

$$\bar{\nabla}_\sigma \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = -\gamma_\sigma^\lambda \Gamma_{\alpha\dots\nu\dots}^{\mu\dots\beta\dots} \nabla_\lambda \tilde{B}_{\beta\dots}^{\alpha\dots}. \quad (6.3.43)$$

Выпишем эти операторы в двух (однородных) групповых калибровках.

2. В **хронохориометрической калибровке** диадные операторы дифференцирования представляются в виде:

1) Оператор временного дифференцирования

$$**\partial_T \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = \tau^o \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^o} \quad (6.3.44)$$

не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемой величины.

2) Оператор дифференцирования вдоль  $l$  также не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины и представляется в виде

$$**\partial_L \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = l^\mu \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^\mu} = l^o \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^o} + l^1 \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^1}. \quad (6.3.45)$$

3) Диадная ковариантная производная на 2-мерной поверхности представляется в форме:

$$**\nabla_\zeta \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = **\partial_\zeta \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} + **\Delta_{\varphi\zeta}^\xi \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} + \dots - **\Delta_{\eta\zeta}^\varphi \tilde{B}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} - \dots, \quad (6.3.46)$$

где, во-первых, введен новый хронохориометрически инвариантный оператор  $\gamma$ -дифференцирования

$$**\partial_\zeta \equiv -\gamma_\zeta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\zeta} - \tau_\zeta \tau^o \frac{\partial}{\partial x^o} + l_\zeta l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (6.3.47)$$

аналогичный хронометрически инвариантному оператору пространственного дифференцирования (3.4.11), также не зависящий ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемой величины; и, во-вторых, введена хронохориометрически инвариантная связность

$$**\Delta_{\varphi\zeta}^\xi = \frac{1}{2} \gamma^{\xi\psi} (**\partial_\varphi \gamma_{\psi\zeta} + **\partial_\zeta \gamma_{\psi\varphi} - **\partial_\psi \gamma_{\zeta\varphi}). \quad (6.3.48)$$

Заметим, что именно оператор (6.3.47) является аналогом «удлиненных» производных в многомерных геометрических моделях сильных и электрослабых взаимодействий.

3. В кинорометрической калибровке диадные операторы дифференцирования имеют вид:

1) оператор временного дифференцирования

$$**\partial_T \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = \tau^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^\lambda} - \tilde{N}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} - \dots + \tilde{N}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} \tilde{B}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} + \dots, \quad (6.3.49)$$

где  $\tilde{N}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = \tau^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}}$ ;

2) оператор дифференцирования вдоль  $l$

$$**\partial_L \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = l^i \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^i} - \tilde{L}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} - \dots + \tilde{L}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} \tilde{B}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} + \dots, \quad (6.3.50)$$

где  $\tilde{L}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = l^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}}$ ;

3) оператор ковариантного 2-мерного дифференцирования

$$**\nabla_{\zeta} \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = \frac{\partial \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\xi^{\dots}}}{\partial x^{\zeta}} + E_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} \tilde{B}_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} + \dots - E_{\eta^{\dots}}^{\varphi^{\dots}} \tilde{B}_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} - \dots, \quad (6.3.51)$$

где использованы 2-мерные символы Кристоффеля

$$E_{\varphi^{\dots}}^{\xi^{\dots}} = \frac{\gamma^{\xi\psi}}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{\varphi\psi}}{\partial x^{\zeta}} + \frac{\partial \gamma_{\zeta\psi}}{\partial x^{\varphi}} - \frac{\partial \gamma_{\zeta\varphi}}{\partial x^{\psi}} \right).$$

4. Запись основных соотношений ОТО в диадном виде означает представление общековариантных величин и выражений исключительно через скаляры и  $\gamma$ -спроецированные тензоры, диадные физико-геометрические тензоры и диадные операторы дифференцирования. В общем случае такие выражения имеют довольно громоздкий вид.

## 6.4. Диарный метод

Диарный метод [133] реализует, кроме уже рассмотренных монадного 1 + 3-, диадного 1 + 1 + 2- и тетрадного 1 + 1 + 1 + 1-расщеплений, еще одну возможность — неполного 2 + 2-расщепления 4-мерного пространственно-временного многообразия общей теории относительности. Этот метод, во-первых, представляет принципиальный интерес, позволяя более рельефно высветить некоторые аспекты монадного метода, и, во-вторых, подготавливает почву для построения многомерных геометрических моделей физических взаимодействий, где можно говорить о 4 + 4-расщеплении общего многообразия на классическое 4-мерное пространство-время и на скрытые четыре измерения.



### 6.4.1. Алгебра диарного метода

Поскольку диарный метод основан на расщеплении 4-мерного пространственно-временного многообразия в каждой точке на два 2-мерных сечения без выделения отдельных направлений внутри них, то метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}, \quad (6.4.1)$$

где  $b_{\mu\nu}$  — метрический тензор локального 2-мерного сечения, содержащего времени-подобные направления, а  $\gamma_{\mu\nu}$  — метрический тензор пространственно-подобного сечения.

Метрические тензоры 2-мерных сечений ортогональны:

$$b_{\mu\nu}\gamma^{\mu\alpha} = 0. \quad (6.4.2)$$

Кроме того, имеют место соотношения:

$$b_{\mu}^{\nu} = b_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = b_{\mu\alpha}b^{\alpha\nu}; \quad \gamma_{\mu}^{\nu} = \gamma_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = -\gamma_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha\nu}. \quad (6.4.3)$$

В диарном методе имеют дело с тензорными величинами, спроецированными по всем индексам на направления сечения  $b$  (их будем обозначать шляпкой сверху) и на направления сечения  $\gamma$ . Последние величины будем обозначать чертой сверху. Квадрат 4-мерного интервала представляется в виде

$$ds^2 = b_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} - \gamma_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \equiv db^2 - d\gamma^2. \quad (6.4.4)$$

В диарном методе, как и в монадном, можно определить групповые калибровки, основанные на выделении характерных классов координатных преобразований. При этом оказывается, что аналоги хронометрической и кинеметрической калибровок возникают парами, т. е. если в сечении  $b$  определяется калибровка типа хронометрической, то в сечении  $\gamma$  проявляется калибровка типа кинеметрической, и наоборот. Таким образом, в диарном методе, как и в случае монадного метода, имеют место две калибровки. Более того, при этом проявляются закономерности, которые можно было бы усмотреть в монадном методе, но они там оказываются завуалированы. Продемонстрируем основные свойства двух калибровок, которые будем именовать по характеру калибровки  $b$ -сечения: *хронометрически-подобной или кинеметрически-подобной*.

**Хронометрически-подобная калибровка** определяется тем, что в ней контравариантные компоненты 2-мерного тензора  $b^{\mu\nu}$  имеют вид, соответствующих свойствам контравариантных компонент монады  $\tau^{\mu}$ :

$$b^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} b^{oo} & b^{11} & 0 & 0 \\ b^{1o} & b^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4.5)$$

Примем соглашение, что латинские индексы  $a, b, c, \dots$  принимают значения 0, 1, а греческие индексы  $\xi, \eta, \varphi, \zeta$  — значения 2 и 3. Координатные системы,

где  $b^{\mu\nu}$  продолжают иметь вид (6.4.5), связаны такими преобразованиями, что

$$b^{\xi\eta} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^a} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^b} b^{ab} = 0; \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^o} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^1} = 0. \quad (6.4.6)$$

Данными условиями выделяются преобразования координат

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad x'^1 = x'^1(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad (6.4.7)$$

$$x'^2 = x'^2(x^2, x^3); \quad x'^3 = x'^3(x^2, x^3). \quad (6.4.8)$$

Нормировке монады  $\tau_{\mu}\tau^{\mu} = 1$  в диарном методе соответствует нормировка

$$b^{a\mu}b_{c\mu} = g_c^a. \quad (6.4.9)$$

Введя обозначение  $b \equiv g_{oo}g_{11} - g_{o1}^2$ , находим выражения компонент 2-мерного метрического тензора сечения  $b$  через компоненты 4-мерного метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ :

$$b^{oo} = \frac{g_{11}}{b}; \quad b^{o1} = -\frac{g_{o1}}{b}; \quad b^{11} = \frac{g_{oo}}{b};$$

$$b_{\xi\eta} = \frac{1}{b} [g_{11}g_{o\xi}g_{o\eta} + g_{oo}g_{1\xi}g_{1\eta} - g_{o1}(g_{o\xi}g_{1\eta} + g_{1\xi}g_{o\eta})]. \quad (6.4.10)$$

В общем случае отличны от нуля и другие компоненты ковариантного тензора  $b_{\mu\nu}$ , однако они явно не присутствуют в окончательных формулах данного метода.

Из калибровки тензора  $b_{\mu\nu}$  однозначно получаются выражения через компоненты  $g_{\mu\nu}$  и для другого 2-мерного тензора:

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{33}/\gamma & -\gamma^{23}/\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma^{32}/\gamma & \gamma^{22}/\gamma \end{pmatrix}; \quad (6.4.11)$$

$$\gamma^{ab} = \frac{1}{\gamma} [g^{33}g^{2a}g^{2b} + g^{22}g^{3a}g^{3b} - g^{23}(g^{2a}g^{3b} + g^{3a}g^{2b})], \quad (6.4.12)$$

где использовано обозначение  $\gamma \equiv (g^{23})^2 - g^{22}g^{33}$ .

Можно показать, что все выписанные компоненты двух 2-мерных метрических тензоров могут быть получены, если исходить из задания вида ковариантных компонент 2-мерного тензора  $\gamma_{\xi\eta}$  без их начальной конкретизации, но с условием нормировки

$$\gamma^{\xi\mu}\gamma_{\eta\mu} = g_{\eta}^{\xi}, \quad (6.4.13)$$

аналогичной (6.4.9).

Назовем *хронометрически-подобно инвариантными* величины, которые остаются инвариантными при преобразованиях координат (6.4.7) и являются 2-мерно ковариантными при преобразованиях (6.4.8). Таковыми являются компоненты с индексами  $\xi, \eta, \dots$   $\gamma$ -спроецированных тензоров. Аналогично, назовем *орометрически-подобно инвариантными* величины, которые, наоборот, инвариантны при преобразованиях (6.4.8) и 2-мерно ковариантны при

преобразованиях (6.4.7). Таковыми являются  $b$ -спроецированные компоненты тензоров с индексами 0 и 1.

Таким образом, в данной калибровке диарного метода одновременно имеются два класса инвариантных величин. В хронометрической и кинеметрической калибровках монадного метода фактически имела место аналогичная ситуация, однако там из величин одного типа (из-за их одномерности) можно было образовать инварианты относительно выделенного класса преобразований координат (делением на  $\sqrt{g_{oo}}$  или  $\sqrt{g^{oo}}$ ). Аналогичные инварианты можно построить и в этой калибровке диарного метода, однако только для тензоров четного ранга. Так, для симметричного тензора  $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$  имеем инварианты:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}b^{\mu\nu} &= \frac{1}{b}(B_{oo}g_{11} - 2B_{o1}g_{o1} + B_{11}g_{oo}); \\ B^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} &= \frac{1}{\gamma}(B^{22}g^{33} - 2B^{23}g^{23} + B^{33}g^{22}). \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

Для антисимметричных тензоров второго ранга  $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$  имеем инварианты:

$$\frac{A_{o1}}{\sqrt{-b}}; \quad \frac{A^{23}}{\sqrt{\gamma}}. \quad (6.4.15)$$

**Кинеметрически-подобная калибровка** диарного метода соответствует кинеметрической калибровке монадного метода и в каком-то смысле является обратной изложенной выше хронометрически-подобной калибровке. Эта калибровка определяется условием, что ковариантные компоненты 2-мерного метрического тензора  $b_{\mu\nu}$  имеют вид:

$$b_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} b_{oo} & b_{o1} & 0 & 0 \\ b_{1o} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.4.16)$$

Рассуждениями, подобными изложенным выше, выделяются преобразования, сохраняющие данный вид 2-мерного метрического тензора  $b_{\mu\nu}$ :

$$x'^o = x'^o(x^o, x^1); \quad x'^1 = x'^1(x^o, x^1); \quad (6.4.17)$$

$$x'^2 = x'^2(x^o, x^1, x^2, x^3); \quad x'^3 = x'^3(x^o, x^1, x^2, x^3). \quad (6.4.18)$$

Нормировка вида (6.4.9) и вид компонент (6.4.16) позволяют представить все составляющие 2-мерных тензоров  $b_{\mu\nu}$  и  $\gamma_{\mu\nu}$  в данной калибровке через компоненты 4-мерного метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ . В этой калибровке также имеются два класса инвариантных величин относительно двух пар преобразований (6.4.17) и (6.4.18).

Все остальное содержание алгебры данной калибровки строится аналогично изложенному выше.

Наконец, укажем **связь диарного метода с хроногеометрией**. Как уже отмечалось, диарный метод может оказаться полезным в тех задачах ОТО, где две пары координат рассматриваются симметрично друг с другом. Именно такая ситуация имеет место в хроногеометрии, поскольку в ней координаты времени и расстояния до мировой линии наблюдателя вводятся симметричным

образом. При этом можно говорить о произволе в задании координат  $T \rightarrow \tau$ ,  $R \rightarrow l$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , обусловленном тремя факторами:

- 1) выбором времени-подобного параметра вдоль мировой линии наблюдателя (заданием хода часов);
- 2) выбором закона  $T(\tau_1, \tau_2)$  и  $R(\tau_1, \tau_2)$ , где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — значения параметров вдоль мировой линии (показания часов), соответствующие испусканию и приему отраженного сигнала (разумеется, чисто формально можно определить  $T$  и  $R$  иначе, чем это сделано в формулах (6.1.1) и (6.1.2));
- 3) выбором (угловых) координат на поверхностях  $T = \text{const}$  и  $R = \text{const}$ .

Указанный произвол (в совокупности) соответствует преобразованиям координат:

$$T' = T'(T, R); \quad R' = R'(T, R); \quad (6.4.19)$$

$$x'^2 = x'^2(T, R, x^2, x^3); \quad x'^3 = x'^3(T, R, x^2, x^3), \quad (6.4.20)$$

которые совпадают с преобразованиями координат (6.4.17) и (6.4.18) в *кинематрически-подобной калибровке диарного метода*.

### 6.4.2. Диарные физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования

**Диарные физико-геометрические тензоры.** Из первых производных от диарных составляющих метрического тензора можно построить четыре и только четыре независимых диарных физико-геометрических тензора:

$$d(01)_{\alpha\gamma,\beta} \equiv \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\mu}b_{\gamma}^{\sigma} + b_{\gamma}^{\mu}b_{\alpha}^{\sigma})\gamma_{\beta}^{\nu}b_{\mu\nu;\sigma} = b_{\gamma}^{\sigma}b_{\alpha}^{\mu}B_{\mu\sigma,\varepsilon}b_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (6.4.21)$$

$$d(23)_{\alpha\gamma,\beta} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\gamma}^{\sigma} + \gamma_{\gamma}^{\mu}\gamma_{\alpha}^{\sigma})b_{\beta}^{\nu}b_{\mu\nu;\sigma} = \gamma_{\gamma}^{\sigma}\gamma_{\alpha}^{\mu}E_{\mu\sigma,\varepsilon}b_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (6.4.22)$$

$$a(01)_{\alpha\gamma,\beta} \equiv \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\mu}b_{\gamma}^{\sigma} - b_{\gamma}^{\mu}b_{\alpha}^{\sigma})\gamma_{\beta}^{\nu}b_{\mu\nu;\sigma} = b_{\gamma}^{\sigma}b_{\alpha}^{\mu}E_{\mu\sigma,\varepsilon}b_{\beta}^{\varepsilon}; \quad (6.4.23)$$

$$a(23)_{\alpha\gamma,\beta} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha}^{\mu}\gamma_{\gamma}^{\sigma} - \gamma_{\gamma}^{\mu}\gamma_{\alpha}^{\sigma})b_{\beta}^{\nu}b_{\mu\nu;\sigma} = \gamma_{\gamma}^{\sigma}\gamma_{\alpha}^{\mu}B_{\mu\sigma,\varepsilon}b_{\beta}^{\varepsilon}, \quad (6.4.24)$$

где использованы обозначения:

$$B_{\mu\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{\mu\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial b_{\sigma\varepsilon}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial b_{\mu\sigma}}{\partial x^{\varepsilon}} \right); \quad E_{\mu\sigma,\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{\mu\varepsilon}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial \gamma_{\sigma\varepsilon}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \gamma_{\mu\sigma}}{\partial x^{\varepsilon}} \right). \quad (6.4.25)$$

В *хронометрически-подобной калибровке* диарного метода  $a(01)_{ab,\xi} = 0$ , т. е. в общем случае, остаются три диарных физико-геометрических тензора.

В *кинематрически-подобной калибровке* диарного метода  $a(23)_{\xi\eta,a} = 0$ .

**Диарные операторы дифференцирования.** В общем случае можно определить 4 диарных оператора ковариантного дифференцирования, соответствующих двум возможным способам проецирования двух типов индексов при операторе  $\nabla_{\mu}$  и дифференцируемого тензора: на направления 2-мерных площадок  $b$  и  $\gamma$ .

Более подробное изложение диарного метода и его приложений изложено в работах [29, 133].

# **Фермионная материя в общей теории относительности**



Описание материальных источников диктует задание в рамках координатного пространства-времени дополнительной структуры — мировых линий, а вместе с ними введение в каждой их точке единичных касательных векторов, имеющих физический смысл 4-скорости материальных объектов. Другими словами, наряду с координатным пространством необходимо введение пространства скоростей, представляющего собой слой на базе координатного пространства-времени. Если в плоском пространстве-времени имеет место 10-параметрическая группа Пуанкаре, то в пространстве скоростей (в слое) имеется лишь 6-параметрическая группа Лоренца, причем последнее справедливо как в специальной, так и в общей теории относительности.

Напомним, что правая часть уравнений Эйнштейна описывается тензором энергии-импульса, строящимся из квадратичных комбинаций скоростей материальных источников. Между координатным пространством и пространством скоростей (импульсов) имеется далеко идущая симметрия. В классической механике она проявляется в канонических уравнениях Гамильтона. В квантовой механике она оказывается еще более значительной.

В классической теории (в макромире) скорости описываются векторами, тогда как в микромире ситуация существенно изменяется — на смену классическим представлениям приходят квантовомеханические, для которых характерен переход от привычных макропонятий к своеобразным «корням квадратным» от них. Это проявляется в замене классической вероятности  $W$  на квантовомеханическую амплитуду вероятности  $\psi$ , в замене уравнения Клейна—Фока на уравнения Дирака, представляющие собой «корень квадратный» из него, и т. д. Это касается и векторов скоростей, — в квантовой теории вместо них используется своеобразный «корень квадратный» из векторов — спиноры, ранее называвшиеся полувекторами.

Векторы представляются в виде квадратичных комбинаций из компонент спиноров. Извлечение квадратного корня из классических по-

---

нятий распространяется и на саму группу Лоренца — говорят о спинорном представлении группы Лоренца. Параметры группы Лоренца строятся в виде квадратичных комбинаций из комплексных параметров группы спинорных преобразований, которую также называют дважды накрывающей группы Лоренца. Эта глава посвящена изложению самых необходимых сведений из теории спиноров<sup>1)</sup> и биспиноров, причем это делается близким образом к изложенному ранее математическому аппарату тензорного исчисления.

Для описания фермионной материи в искривленном (координатном) пространстве-времени необходимо использовать такую формулировку ОТО, которая органически содержит в себе как группу допустимых координатных преобразований, ответственную за введение тензорных величин, так и группу Лоренца, характерную для спинорного исчисления. Поставленной цели отвечает тетрадный метод или тетрадный формализм ОТО, рассмотренный в предыдущей главе.

## 7.1. Спиноры и биспиноры

Обратимся к рассмотрению основ математического аппарата спиноров независимо от рассматривавшегося ранее координатного пространства-времени (см. [140]). В принципе, этот аппарат применим и для описания плоского координатного пространства-времени, однако, — и это представляется существенным, — *в физике спиноры необходимы именно для описания пространства скоростей* (импульсного пространства), т. е. слоя в расслоенном пространстве.

### 7.1.1. Двухкомпонентные спиноры

1. Начнем с 2-компонентных спиноров, которые, по определению, образуют 2-мерное комплексное пространство с группой линейных преобразований

$$\chi'^s = C_{.r}^s \chi^r \quad (\text{где } s, r = 1, 2), \quad (7.1.1)$$

оставляющих инвариантной антисимметричную квадратичную форму для любой пары векторов  $\chi$  и  $\phi$  этого пространства

$$\chi'^1 \phi'^2 - \chi'^2 \phi'^1 = (C_{.1}^1 C_{.2}^2 - C_{.2}^1 C_{.1}^2)(\chi^1 \phi^2 - \chi^2 \phi^1) = Inv. \quad (7.1.2)$$

Отсюда следуют, что коэффициенты линейного преобразования (7.1.1) удовлетворяют условию

$$C_{.1}^1 C_{.2}^2 - C_{.2}^1 C_{.1}^2 = 1, \quad (7.1.3)$$

<sup>1)</sup> Более подробно теорию спиноров см. в [62, 140].

приводящему к тому, что из 8 вещественных параметров, определяющих комплексную квадратную  $2 \times 2$ -матрицу  $C_r^s$ , независимыми являются лишь шесть. Линейные преобразования (7.1.1) с условием (7.1.3) составляют *унимодулярную (6-параметрическую) группу  $SL(2, C)$* .

2. В теории спиноров можно использовать принятые в тензорном исчислении обозначения, в частности, можно ввести ко- и контравариантные компоненты спиноров. Так, записав инвариант (7.1.2) в виде  $g_{sr}\chi^s\phi^r = Inv$ , приходим к понятию *ковариантного метрического спинтензора* с компонентами:

$$g_{sr} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1.4)$$

Ковариантному метрическому спинтензору  $g_{sr}$  по обычным правилам тензорной алгебры можно поставить в соответствие контравариантный метрический спинтензор:

$$g^{sr} = \frac{\text{Алгебр.дополн.}g_{sr}}{|g_{sr}|} \rightarrow g^{sr} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1.5)$$

Имеют место соотношения:

$$g_{sr}g^{sr} = 2; \quad g_{sr}g^{rl} = \delta_s^l, \quad (7.1.6)$$

где  $\delta_s^l$ , как и прежде, символы Кронекера.

С помощью компонент метрического спинтензора можно ввести ковариантные компоненты спиноров и записать обратные соотношения:

$$\chi_s = g_{sr}\chi^r; \quad \chi^s = g^{sr}\chi_r \rightarrow (\chi_1 = \chi^2; \quad \chi_2 = -\chi^1). \quad (7.1.7)$$

При этом следует обращать внимание на место «немого» индекса, по которому производится суммирование.

3. Комплексным спинорам можно поставить в соответствие комплексно сопряженные спиноры, преобразующиеся посредством комплексно-сопряженных параметров  $C_{.r}^*{}^s$ . Такие элементы будем изображать либо значком комплексного сопряжения  $\overset{*}{\chi}{}^s$ , либо точкой над соответствующим индексом  $\chi^{\dot{s}}$ . Для сопряженных спиноров имеют место преобразования:

$$\overset{*}{\chi}{}^s = C_{.r}^*{}^s \overset{*}{\chi}{}^r. \quad (7.1.8)$$

В пространстве сопряженных спиноров также определяются ко- и контравариантные спиноры, имеющие в точности те же компоненты (7.1.4) и (7.1.5), что и в пространстве спиноров.

4. Наряду с метрическим спинтензором  $g_{sr}$  определяются спинтензоры произвольного ранга, преобразующиеся как произведения произвольного числа спиноров из двух пространств. Так, спинтензор ранга  $m + n$  преобразуется как

$$B^{sr\dots\dot{l}p\dots} \sim \phi^s \chi^r \dots \xi^l \sigma^{\dot{p}} \dots \rightarrow B^{lsr\dots\dot{l}p\dots} = C_{.a}^s C_{.b}^r \dots C_{.c}^*{}^l C_{.d}^*{}^p \dots B^{ab\dots\dot{c}d\dots}. \quad (7.1.9)$$

Очевидно, что можно писать спинтензоры и с ковариантными индексами. При преобразованиях (7.1.1) остаются инвариантными комбинации вида  $B^{sr} B_{sr}$  и другие.

5. В теории спиноров особую роль играют смешанные спинтензоры второго ранга. Построим такой спинтензор из контравариантного и сопряженного ему спиноров, тогда матрицу из компонент этого спинтензора можно представить в следующих видах:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B^{1\dot{1}} & B^{1\dot{2}} \\ B^{2\dot{1}} & B^{2\dot{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \chi^1 \chi^{*1} & \chi^1 \chi^{*2} \\ \chi^2 \chi^{*1} & \chi^2 \chi^{*2} \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 - ik^2 \\ k^1 + ik^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} = k^0 I_2 + \sum_{l=1}^3 k^l \sigma_l, \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

где  $k^0, k^1, k^2, k^3$  — четверка вещественных чисел,  $I_2$  — единичная  $2 \times 2$ -матрица,  $\sigma_l$  — три  $2 \times 2$ -матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.1.11)$$

Матрицы Паули удовлетворяют известным соотношениям:

$$Sp(\sigma_k) = 0; \quad \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I_2; \quad \sigma_i \sigma_k = i\varepsilon_{ikl} \sigma_l + \delta_{ik} I_2. \quad (7.1.12)$$

6. Выразим обратно из (7.1.10) вещественные числа  $k^\mu$  через компоненты спинтензора:

$$\begin{aligned} k^0 &= \frac{1}{2}(B^{1\dot{1}} + B^{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(\chi^1 \chi^{*1} + \chi^2 \chi^{*2}); \\ k^1 &= \frac{1}{2}(B^{1\dot{2}} + B^{2\dot{1}}) = \frac{1}{2}(\chi^1 \chi^{*2} + \chi^2 \chi^{*1}); \\ k^2 &= \frac{i}{2}(B^{1\dot{2}} - B^{2\dot{1}}) = \frac{i}{2}(\chi^1 \chi^{*2} - \chi^2 \chi^{*1}); \\ k^3 &= \frac{1}{2}(B^{1\dot{1}} - B^{2\dot{2}}) = \frac{1}{2}(\chi^1 \chi^{*1} - \chi^2 \chi^{*2}). \end{aligned} \quad (7.1.13)$$



Легко показать, что 4 компоненты  $k^\mu$  не являются независимыми, но удовлетворяют условию изотропности

$$k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - (k^1)^2 - (k^2)^2 - (k^3)^2 = 0. \quad (7.1.14)$$

Более того, можно показать, что при спинорных преобразованиях (7.1.1) компоненты  $k^\mu$  преобразуются друг через друга по векторному закону

$$k'^\mu = L^\mu_\nu k^\nu, \quad (7.1.15)$$

где коэффициенты линейного преобразования  $L^\mu_\nu$  представляют собой квадратичные комбинации из коэффициентов спинорного преобразования (7.1.1):

$$\begin{aligned} L^0_{.0} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*1} + C_2^1 C_2^{*1} + C_1^2 C_1^{*2} + C_2^2 C_2^{*2}); \\ L^0_{.1} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_2^{*1} + C_2^1 C_1^{*1} + C_1^2 C_2^{*2} + C_2^2 C_1^{*2}); \\ L^0_{.2} &= -\frac{i}{2} (C_1^1 C_2^{*1} - C_2^1 C_1^{*1} + C_1^2 C_2^{*2} - C_2^2 C_1^{*2}); \\ L^0_{.3} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*1} - C_2^1 C_2^{*1} + C_1^2 C_1^{*2} - C_2^2 C_2^{*2}); \\ L^1_{.0} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*2} + C_2^1 C_1^{*1} + C_1^2 C_2^{*2} + C_2^2 C_2^{*1}); \\ L^1_{.1} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_2^{*2} + C_2^1 C_1^{*2} + C_1^2 C_1^{*2} + C_2^2 C_1^{*1}); \\ L^1_{.2} &= \frac{i}{2} (C_1^1 C_1^{*2} + C_2^2 C_1^{*1} - C_1^1 C_2^{*2} - C_1^2 C_2^{*1}); \\ L^1_{.3} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*2} + C_2^1 C_1^{*1} - C_1^2 C_2^{*2} - C_2^2 C_2^{*1}); \\ L^2_{.0} &= \frac{i}{2} (C_1^1 C_1^{*2} - C_2^1 C_1^{*1} + C_1^2 C_2^{*2} - C_2^2 C_2^{*1}); \\ L^2_{.1} &= \frac{i}{2} (C_1^1 C_2^{*2} - C_2^1 C_2^{*1} + C_1^2 C_1^{*2} - C_2^2 C_1^{*1}); \\ L^2_{.2} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_2^{*2} + C_2^2 C_1^{*1} - C_1^2 C_2^{*1} - C_2^1 C_1^{*2}); \\ L^2_{.3} &= \frac{i}{2} (C_1^1 C_1^{*2} - C_2^1 C_1^{*1} - C_1^2 C_2^{*2} + C_2^2 C_2^{*1}); \\ L^3_{.0} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*1} + C_2^1 C_2^{*1} - C_1^2 C_1^{*2} - C_2^2 C_2^{*2}); \\ L^3_{.1} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_2^{*1} - C_2^1 C_2^{*2} + C_1^2 C_1^{*1} - C_2^2 C_1^{*2}); \\ L^3_{.2} &= \frac{i}{2} (C_1^2 C_2^{*2} + C_2^1 C_1^{*1} - C_1^1 C_2^{*1} - C_2^2 C_1^{*2}); \\ L^3_{.3} &= \frac{1}{2} (C_1^1 C_1^{*1} - C_2^1 C_1^{*2} - C_1^2 C_2^{*1} + C_2^2 C_2^{*2}). \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

Легко убедиться, что, во-первых, все коэффициенты  $L^\mu_\alpha$  являются вещественными, во-вторых, они, как и  $C_r^s$ , определяются 6 независимыми

вещественными параметрами, в-третьих, 16 коэффициентов  $L^\mu_\alpha$  удовлетворяют 10 условиям:

$$g_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (7.1.17)$$

Таким образом, величины  $k^\mu$  составляют изотропный вектор в пространстве-времени Минковского. На этом основании спиноры называют *спинорным представлением группы Лоренца*. Можно рассуждать и обратным образом, т. е. утверждать, что преобразования с коэффициентами  $L^\mu_\alpha$ , образующие 6-параметрическую *ортогональную группу*  $O(1, 3)$ , являются *векторным представлением группы*  $SL(2, C)$ .

### 7.1.2. Биспиноры

1. Для того чтобы получить неизотропные (времени-подобные) векторы, следует взять спинтензорную комбинацию, составленную из двух спиноров и сопряженных им величин:

$$B^{sr} = \chi^s \bar{\chi}^r + \phi^s \bar{\phi}^r, \quad (7.1.18)$$

тогда матрица из компонент этого спинтензора будет представляться в виде (7.1.10). Обозначим четверку вещественных чисел теперь иначе — через  $u^\mu$ , тогда будем иметь в общем случае не равную нулю инвариантную комбинацию

$$\frac{1}{2} B_{sr} B^{sr} = u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (7.1.19)$$

где компоненты времени-подобного 4-мерного вектора

$$u^\mu = k^\mu(\chi) + k^\mu(\phi) \quad (7.1.20)$$

слагаются из двух изотропных векторов (на конусе будущего) и представляются в виде:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{2} \left( \chi^1 \bar{\chi}^1 + \chi^2 \bar{\chi}^2 + \phi^1 \bar{\phi}^1 + \phi^2 \bar{\phi}^2 \right); \\ u^1 &= \frac{1}{2} \left( \chi^1 \bar{\chi}^2 + \chi^2 \bar{\chi}^1 + \phi^1 \bar{\phi}^2 + \phi^2 \bar{\phi}^1 \right); \\ u^2 &= \frac{i}{2} \left( \chi^1 \bar{\chi}^2 - \chi^2 \bar{\chi}^1 + \phi^1 \bar{\phi}^2 - \phi^2 \bar{\phi}^1 \right); \\ u^3 &= \frac{1}{2} \left( \chi^1 \bar{\chi}^1 - \chi^2 \bar{\chi}^2 + \phi^1 \bar{\phi}^1 - \phi^2 \bar{\phi}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

2. Итак, массивные частицы должны описываться двумя спинорами (и двумя сопряженными спинорами), которые в совокупности характеризуются 4 парами комплексно сопряженных компонент. В теории

фермионной материи принято использовать такие две комбинации из четверок компонент, каждая из которых, во-первых, содержит полную информацию о двух спинорах, во-вторых, симметрично включает в себя спинор и один комплексно сопряженный спинор и, в-третьих, симметрично содержит ко- и контравариантные компоненты величин. В итоге имеет место тройная симметрия. Частицы характеризуются 4-компонентными столбцом и строкой вида

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ * \\ \phi_1 \\ * \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ * \\ \phi^2 \\ - \\ \phi^1 \end{pmatrix}; \quad (7.1.22)$$

$$\psi^\dagger = (\overset{*}{\chi}^1, \overset{*}{\chi}^2, \phi_1, \phi_2) = (\overset{*}{\chi}^1, \overset{*}{\chi}^2, \phi^2, -\phi^1).$$

3. Согласно приведенным выше соотношениям между ко- и контравариантными компонентами спинора, столбец  $\psi$  преобразуется при преобразованиях из группы  $SL(2, C)$  следующим образом:

$$\psi' = \begin{pmatrix} \chi'^1 \\ \chi'^2 \\ * \\ \phi'_1 \\ * \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_{.1} & C^1_{.2} & 0 & 0 \\ C^2_{.1} & C^2_{.2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{*}{C}^2_{.2} & -\overset{*}{C}^2_{.1} \\ 0 & 0 & -\overset{*}{C}^1_{.2} & \overset{*}{C}^1_{.1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ * \\ \phi_1 \\ * \\ \phi_2 \end{pmatrix} \equiv S\psi. \quad (7.1.23)$$

Поскольку матрица преобразований  $S$  приводима к блочному виду, а  $\psi$  составлено из вкладов двух спиноров, говорят, что  $\psi$  является *биспинором*.

4. Как уже отмечалось, при  $SL(2, C)$ -преобразованиях остаются инвариантными две билинейные комбинации:  $(\chi^1\phi^2 - \chi^2\phi^1)$  и  $(\overset{*}{\chi}^1\overset{*}{\phi}^2 - \overset{*}{\chi}^2\overset{*}{\phi}^1)$ . Для записанных в (7.1.22) величин можно подобрать матрицу, назовем ее  $\gamma(0)$ , такую, чтобы билинейная комбинация  $\psi^\dagger\gamma(0)\psi$  равнялась сумме инвариантов, т. е.

$$\psi^\dagger\gamma(0)\psi = (\chi^1\phi^2 - \chi^2\phi^1) + (\overset{*}{\chi}^1\overset{*}{\phi}^2 - \overset{*}{\chi}^2\overset{*}{\phi}^1) \equiv \bar{\psi}\psi. \quad (7.1.24)$$

Легко видеть, что  $\gamma(0)$  должно иметь вид

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1.25)$$

5. В (7.1.24) введено обозначение

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma(0) = (\phi_1, \phi_2, \chi^1, \chi^2). \quad (7.1.26)$$

Из (7.1.23) следует, что строка  $\bar{\psi}$  преобразуется по закону

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}, \quad (7.1.27)$$

где  $S^{-1}$  — матрица, обратная  $S$ :

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} C_{.2}^2 & -C_{.2}^1 & 0 & 0 \\ -C_{.1}^2 & C_{.1}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{.1}^* & C_{.1}^* \\ 0 & 0 & C_{.2}^* & C_{.2}^* \end{pmatrix}. \quad (7.1.28)$$

6. Легко показать, что компоненты  $u_\mu$  в (7.1.21) записываются посредством матрицы  $\gamma(0)$  и трех матриц  $\gamma(i)$ :

$$2u_\mu = \bar{\psi} \gamma(\mu) \psi, \quad (7.1.29)$$

где  $\gamma(i)$  — три пространственно-подобные матрицы Дирака в стандартном представлении

$$\gamma(1) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma(2) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma(3) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1.30)$$

Здесь  $\sigma_i$  — матрицы Паули, записанные в (7.1.11).

Зная, как преобразуются  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , можно показать, что компоненты  $u_\mu$  преобразуются по векторному закону

$$2u'_\mu = (\bar{\psi} \gamma(\mu) \psi)' = \bar{\psi} S^{-1} \gamma(\mu) S \psi = 2L_\mu^\alpha u_\alpha, \quad (7.1.31)$$

где  $L_\mu^\alpha$  — параметры, выписанные в (7.1.16).

### 7.1.3. 1 + 3-расщепление в пространстве спиноров

1. Как и в случае координатного пространства-времени, выделим из спинорных преобразований (в пространстве скоростей) такие, которые не выводят за пределы используемой системы отсчета. Очевидно, таковыми являются преобразования, оставляющие неизменными времени-подобную компоненту вектора  $u^\mu$  в (7.1.29). Расписывая эту компоненту

с учетом формул (7.1.21) и (7.1.25), приходим к выводу, что при таких преобразованиях должны оставаться инвариантными выражения вида

$$\chi^1 \chi^{*1} + \chi^2 \chi^{*2} = inv, \quad (7.1.32)$$

т. е. скалярные произведения спинора на сопряженный спинор (тот же самый или иной). Это условие будет выполняться, если на коэффициенты линейного преобразования спиноров (7.1.1) наложить три комплексных условия:

$$C_1^1 C_1^{*1} + C_1^2 C_1^{*2} = 1; \quad C_2^1 C_2^{*1} + C_2^2 C_2^{*2} = 1; \quad C_1^1 C_2^{*2} + C_1^2 C_2^{*1} = 0. \quad (7.1.33)$$

Это четыре условия на 8 вещественных параметров. Линейные преобразования (7.1.1) с условиями на коэффициенты (7.1.33) образуют *унитарную (4-параметрическую) группу*  $U(2)$ . Термин «унитарная группа» обусловлен тем, что матрицы преобразований с условиями (7.1.33) являются унитарными, т. е. для них выполняется соотношение  $C^\dagger C = I$ , где  $C^\dagger$  — матрица, получающаяся из  $C$  процедурами комплексного сопряжения и транспонирования.

2. Линейные преобразования (7.1.1), одновременно удовлетворяющие (спинорным) условиям (7.1.3) и условиям (7.1.33), образуют *унимодулярную унитарную (3-параметрическую) группу*  $SU(2)$ . Такие преобразования в спинорном пространстве соответствуют хронометрическим преобразованиям в координатном пространстве, не выводящим за пределы выделенной системы отсчета.

3. Рассмотрим более подробно свойства таких преобразований. Так, явно выражая  $C_2^2$  из третьего соотношения в (7.1.33) и подставляя его в (7.1.3), приходим с учетом первого соотношения из (7.1.33) к условиям на коэффициенты:

$$C_2^1 = -C_1^{*2}; \quad C_1^1 = C_2^{*2}. \quad (7.1.34)$$

Представляя два независимых комплексных коэффициента через 4 вещественных параметра  $a_0, a_1, a_2, a_3$ ,

$$C_2^1 = a_2 + ia_1; \quad C_1^1 = a_0 + ia_3, \quad (7.1.35)$$

находим, что матрица унимодулярных унитарных преобразований имеет вид

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ -C_1^{*2} & C_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix}, \quad (7.1.36)$$

где, вследствие (7.1.3), вещественные параметры удовлетворяют соотношению

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad (7.1.37)$$

т. е. независимыми являются только три из них.

4. Отдельно рассмотрим преобразования векторов, индуцированные подгруппой преобразований  $SU(2)$ . Подставляя коэффициенты  $C_r^s$ , удовлетворяющие условиям (7.1.3) и (7.1.33), в (7.1.16), находим, что в этом случае

$$L_o^o = 1; \quad L_i^o = 0; \quad L_o^i = 0. \quad (7.1.38)$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегает значения: 1, 2, 3. При этих преобразованиях времени-подобные компоненты векторов не изменяются, а преобразуются друг через друга лишь пространственно-подобные компоненты.

5. Укажем характерные случаи пространственно-подобных преобразований. Так, поворот в плоскости (2,3), т. е. поворот вокруг *первой оси* на угол  $\theta_1$ , соответствует следующим значениям параметров  $a_\mu$  из (7.1.36):

$$a_0 = \cos \frac{\theta_1}{2}; \quad a_1 = \sin \frac{\theta_1}{2}; \quad a_2 = a_3 = 0. \quad (7.1.39)$$

Вращениям вокруг *второй оси* (т. е. в плоскости (3,1)) на угол  $\theta_2$  соответствуют

$$a_0 = \cos \frac{\theta_2}{2}; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = \sin \frac{\theta_2}{2}; \quad a_3 = 0. \quad (7.1.40)$$

Вращениям вокруг *третьей оси* (т. е. в плоскости (1,2)) на угол  $\theta_3$  соответствуют

$$a_0 = \cos \frac{\theta_3}{2}; \quad a_1 = a_2 = 0; \quad a_3 = \sin \frac{\theta_3}{2}. \quad (7.1.41)$$

Подставляя, например, (7.1.39) в выражения для коэффициентов  $L_\alpha^\mu$ , а затем в выражение вида (7.1.15), находим

$$u^1 = u^1 \cos \theta_3 + u^2 \sin \theta_3; \quad u^2 = -u^1 \sin \theta_3 + u^2 \cos \theta_3; \quad u^3 = u^3. \quad (7.1.42)$$

6. Матрицу коэффициентов произвольного  $SL(2, C)$ -преобразования можно представить в виде произведения эрмитовой матрицы на унитарную

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_o + b_3 & b_1 - b_2 \\ b_1 + ib_2 & b_o - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_o + ia_3 & a_2 + ia_1 \\ -a_2 + ia_1 & a_o - ia_3 \end{pmatrix}, \quad (7.1.43)$$

следовательно, можно утверждать, что преобразования, дополняющие 3-параметрическую группу  $SU(2)$  до полной 6-параметрической группы

$SL(2, C)$ , характеризуются эрмитовыми матрицами вида

$$\begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 \\ C_1^2 & C_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_o + b_3 & b_1 - b_2 \\ b_1 + ib_2 & b_o - b_3 \end{pmatrix}, \quad (7.1.44)$$

где  $b_o, b_1, b_2, b_3$  — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = b_o^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1, \quad (7.1.45)$$

т. е. независимыми являются только три. Такие преобразования не образуют группу. В литературе они часто называются *бустами*. Эти преобразования описывают в спинорном пространстве переходы от одной системы отсчета к другой, т. е. в хронометрической калибровке монадного метода они соответствуют преобразованиям (3.2.17).

7. Обсудим преобразования векторов, соответствующие преобразованиям спиноров через эрмитовы матрицы (7.1.44), дополняющие подгруппу  $SU(2)$  до группы  $SL(2, C)$ . Легко видеть, что при таких преобразованиях времени-подобные и пространственноподобные компоненты векторов перемешиваются. Эти векторные преобразования дополняют подгруппу  $O(3)$  до группы  $O(1, 3)$ . Известно, что именно такими преобразованиями в специальной теории относительности описываются *переходы между различными системами отсчета*. Три независимых параметра  $b_\mu$  из (7.1.44) соответствуют трем компонентам скорости  $v_i$  движения одной системы отсчета относительно другой.

8. Приведем значения параметров  $b_\mu$  для трех случаев скоростей  $v_i$  второй системы отсчета вдоль соответствующих осей. Так, для движения вдоль *первой оси* (для псевдоповорота в плоскости  $(0,1)$ ) параметры следует выбрать в виде

$$b_o = \cosh \frac{\theta_1}{2}; \quad b_1 = \sinh \frac{\theta_1}{2}; \quad b_2 = b_3 = 0, \quad (7.1.46)$$

где  $\theta_1$  связано со скоростью  $v_1$  следующим образом:

$$\frac{v_1}{c} = \tanh \theta_1 = \frac{2b_o b_1}{b_o^2 + b_1^2}. \quad (7.1.47)$$

Здесь введена скорость света  $c$  для получения безразмерных величин.

Для описания перехода к другой системе отсчета, движущейся вдоль *второй оси* (для псевдоповорота в плоскости  $(0,2)$ ) со скоростью  $v^2$ , параметры следует выбрать в виде

$$b_o = \cosh \frac{\theta_2}{2}; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = \sinh \frac{\theta_2}{2}; \quad b_3 = 0, \quad (7.1.48)$$

где

$$\frac{v_2}{c} = \tanh \theta_2 = \frac{2b_o b_2}{b_o^2 + b_2^2}. \quad (7.1.49)$$

Аналогично, для описания *псевдоповорота в плоскости* (0,3) на угол  $\theta_3$  следует взять параметры в виде

$$b_o = \cosh \frac{\theta_3}{2}; \quad b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = \sinh \frac{\theta_3}{2}, \quad (7.1.50)$$

где

$$\frac{v_3}{c} = \tanh \theta_3 = \frac{2b_o b_3}{b_o^2 + b_3^2}. \quad (7.1.51)$$

9. Более подробно рассмотрим, например, случай движения вдоль первой оси. Используя (7.1.16) и (7.1.46), находим, что из всех коэффициентов  $L_{\alpha}^{\mu}$  остаются отличными от нуля лишь шесть:

$$\begin{aligned} L_{\cdot o}^o &= L_{\cdot 1}^1 = b_o^2 + b_1^2 = \cosh \theta_1; \\ L_{\cdot 1}^o &= L_{\cdot o}^1 = 2b_o b_1 = \sinh \theta_1; \\ L_{\cdot 2}^2 &= L_{\cdot 3}^3 = b_o^2 - b_1^2 = 1. \end{aligned} \quad (7.1.52)$$

Учитывая известные формулы гиперболической тригонометрии и (7.1.17), приходим к известным преобразованиям Лоренца:

$$u'^o = \frac{u^o + (v/c)u^1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad u'^1 = \frac{(v/c)u^o + u^1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad u'^2 = u^2; \quad u'^3 = u^3. \quad (7.1.53)$$

#### 7.1.4. Алгебры Клиффорда и 4-компонентные спиноры

1. В настоящее время принято вводить спиноры на основе алгебр Клиффорда  $C(s, r)$  над полем вещественных чисел [84, 147]. Согласно этому подходу, характер и число компонент спинора зависят от размерности  $(s + r)$  рассматриваемого многообразия и его сигнатуры  $s - r$ . Здесь  $s$  и  $r$  — соответственно числа времени-подобных и пространственно-подобных размерностей многообразия. Под характером спиноров подразумевается, какими величинами описываются компоненты спинора: вещественными, комплексными или кватернионами.

В алгебрах Клиффорда ключевую роль играет понятие *образующих алгебры*  $e(A)$ , где индекс в скобках нумерует образующие. Для них имеют место антикоммутиационные соотношения:

$$e(A)e(B) + e(B)e(A) = 2\eta(AB)I, \quad (7.1.54)$$

где индексы  $A$  и  $B$  принимают столько значений, какова размерность многообразия, а  $\eta(AB)$  — компоненты метрического тензора в нем.



2. Введенные выше матрицы Паули и  $\gamma$ -матрицы являются образующими алгебр Клиффорда. Так, матрицы Паули, вследствие соотношений (7.1.12), являются образующими алгебры Клиффорда  $C(3)$ , соответствующей 3-мерному евклидову пространству. В этой алгебре спиноры являются вещественными 2-компонентными.

Отметим, что в алгебрах Клиффорда возникает существенная разница сигнатур для одной и той же размерности. Для 4-мерных многообразий с сигнатурами  $(+ - - -)$  и  $(- + + +)$  спиноры оказываются, соответственно, 2-компонентными кватернионными или 4-компонентными вещественными. Из теории алгебр Клиффорда над полем вещественных чисел следует, что используемые в теоретической физике (комплексные) 4-компонентные спиноры соответствуют алгебре Клиффорда  $C(4, 1)$ , т. е. 5-мерному многообразию с сигнатурой  $(- + + +)$ .

3. Введенные выше 4 матрицы Дирака удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma(\mu)\gamma(\nu) + \gamma(\nu)\gamma(\mu) = 2\eta(\mu\nu)I_4, \quad (7.1.55)$$

т. е. являются образующими алгебры, но только их частью. С помощью четырех матриц  $\gamma(\mu)$  можно определить пятую матрицу

$$\gamma(5) = \gamma(0)\gamma(1)\gamma(2)\gamma(3) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad (7.1.56)$$

которая пространственно-подобна (т. е.  $\gamma(5)^2 = -1$ ) и в совокупности с 4 матрицами Дирака удовлетворяет соотношениям вида (7.1.54):

$$\gamma(A)\gamma(B) + \gamma(B)\gamma(A) = 2\eta(AB)I_4, \quad (7.1.57)$$

где индексы  $A$  и  $B$  пробегает значения: 0, 1, 2, 3, 5, а  $\eta(AB)$  — метрический тензор 5-мерного многообразия с сигнатурой  $(+ - - - -)$ . Отметим, что здесь нет противоречия с сигнатурой алгебры Клиффорда  $C(4, 1)$ , поскольку переход между двумя сигнатурами осуществляется умножением матриц на мнимую единицу.

4. С помощью матрицы  $\gamma(5)$  по прежним правилам (7.1.29) построим пятую компоненту  $u_5$ :

$$2u_5 = \bar{\psi}\gamma(5)\psi = -i \left[ (\chi^1\phi^2 - \chi^2\phi^1) - (\overset{*}{\chi}^1\overset{*}{\phi}^2 - \overset{*}{\chi}^2\overset{*}{\phi}^1) \right], \quad (7.1.58)$$

которая в общем случае вещественна и определяется разностью инвариантов (7.1.24). Из (7.1.19), (7.1.22) и (7.1.29) следует тождество 6-оптики (см. гл. 11):

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_5^2 - u_6^2 = 0, \quad (7.1.59)$$

где введено обозначение  $2u_6 = \bar{\psi}\psi$ .

5. Матрицы  $\gamma(5)$  позволяют ввести понятия левых ( $e_L$ ) и правых ( $e_R$ ) компонент массивного фермиона (электрона):

$$e_L \equiv \frac{1}{2}(1 - i\gamma(5))\psi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_R \equiv \frac{1}{2}(1 + i\gamma(5))\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ \phi_1 \\ * \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (7.1.60)$$

Аналогично, из 4-компонентной строки получаются сопряженные компоненты:

$$\begin{aligned} \bar{e}_L &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + i\gamma(5)) = (0, 0, \chi^{*1}, \chi^{*2}); \\ \bar{e}_R &\equiv \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - i\gamma(5)) = -(\phi_1, \phi_2, 0, 0). \end{aligned} \quad (7.1.61)$$

Таким образом, спинор  $\chi$  (и сопряженный ему спинор  $\chi^*$ ) характеризует левую компоненту фермионной частицы, а спинор  $\phi$  (и сопряженный ему  $\phi^*$ ) — правую компоненту.

Используя эти выражения, компоненты вектора (7.1.19) можно представить в виде

$$\bar{\psi}\gamma(\mu)\psi = \bar{e}_L\gamma(\mu)e_L + \bar{e}_R\gamma(\mu)e_R. \quad (7.1.62)$$

6. Особую роль в теории алгебр Клиффорда и спиноров играют произведения из образующих, составляющие *базис алгебры*. Легко непосредственно убедиться, что их число равно 16, так как имеют смысл произведения образующих, содержащие не больше их числа в алгебре. В теории спиноров им соответствуют квадратичные комбинации вида (7.1.29), где произведения образующих ( $\gamma$ -матриц) окаймлены столбцом  $\psi$  справа и строкой  $\bar{\psi}$  слева. Они соответствуют возможным тензорным величинам, которые можно образовать из спиноров. Выше были записаны шесть величин: скаляр (7.1.2), псевдоскаляр (7.1.58) и четыре векторные компоненты (7.1.29). Кроме этого, можно образовать следующие антисимметричные тензоры второго (6 компонент) и третьего (4 компоненты псевдовектора) рангов:

$$\bar{\psi}\gamma(\mu)\gamma(\nu)\psi; \quad \bar{\psi}\gamma(\mu)\gamma(\nu)\gamma(\lambda)\psi. \quad (7.1.63)$$

Тензорный характер преобразований выписанных комбинаций можно доказать, используя (7.1.29). Так, для величин  $\bar{\psi}\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\psi$  имеем

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\psi)' &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma(\alpha)\gamma(\beta)S\psi = \bar{\psi}(S^{-1}\gamma(\alpha)S)(S^{-1}\gamma(\beta)S)\psi = \\ &= \bar{\psi}L_\alpha^\mu\gamma(\mu)L_\beta^\nu\gamma(\nu)\psi = L_\alpha^{(\mu)}L_\beta^{(\nu)}\bar{\psi}\gamma(\mu)\gamma(\nu)\psi. \end{aligned} \quad (7.1.64)$$

Это закон преобразования тензора второго ранга. Из этих выражений следует эквивалентность двух способов рассмотрения спиноров: 1) можно полагать, что частицы описываются набором скаляров,

а преобразуются  $\gamma$ -матрицы, или 2) считать, как это обычно делается, что  $\gamma$ -матрицы постоянны, а преобразуется набор компонент фермионной частицы по спинорному представлению группы Лоренца.

## 7.2. Уравнения Дирака в плоском пространстве-времени

Ранее были рассмотрены важнейшие уравнения теоретической физики: уравнения Эйнштейна, Максвелла, Клейна—Фока и другие, однако пока отсутствовали уравнения поля для спинорных частиц. Заполним этот пробел, начав со случая плоского пространства-времени. Фермионные (спинорные) частицы (поля) описываются уравнениями Дирака

$$\left( -i\gamma(\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{\hbar c}A_\mu\gamma(\mu) + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (7.2.1)$$

где учтено взаимодействие с электромагнитным полем. Для этих уравнений, как и для других фундаментальных уравнений физики, справедливо сделанное выше утверждение: **уравнения Дирака не выводятся; они были открыты, а затем постулированы.**

### 7.2.1. Обсуждение уравнений Дирака

1. Как правило, в учебниках уравнения Дирака вводятся путем своеобразного извлечения «квадратного корня» из известных уравнений Клейна—Фока

$$I_4 \left[ \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = \left( -i\gamma(\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \left( i\gamma(\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \quad (7.2.2)$$

Именно исходя из этого выражения, обычно находится вид матриц Дирака и устанавливаются их свойства (7.1.55).

Отметим, что из-за того, что матрицы Дирака обычно выбираются раз и навсегда фиксированными, при обсуждении уравнений Дирака приходится доказывать их лоренц-инвариантность, что становится очевидным, если допустить векторный закон преобразований  $\gamma$ -матриц.

2. Уравнения Дирака могут быть получены вариационным методом, если постулировать лагранжиан спинорного поля в виде

$$\mathcal{L}_\psi = \frac{i\hbar c}{2} \left( \bar{\psi}\gamma(\mu)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma(\mu)\psi - \frac{2ie}{\hbar c}\bar{\psi}\gamma(\mu)\psi A_\mu + \frac{imc}{\hbar}\bar{\psi}\psi \right). \quad (7.2.3)$$

3. Используемый выше способ изложения спиноров в пространстве скоростей, как бы независимо от координатного пространства-времени, позволяет взглянуть на смысл уравнений Дирака под особым углом

зрения. Чтобы это сделать, еще раз отметим удивительную симметрию между координатами и импульсами, которая в классической физике проявляется в виде канонических уравнений. В квантовой физике она имеет более глубокий характер и проявляется в виде симметрии координатного и импульсного представлений волновых функций, соотношений неопределенностей и т. д. В частности, значения импульсов и координат частиц определяются симметричным образом через производные от волновых функций в соответствующих представлениях:

$$p_\mu \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu}; \quad x^\mu \psi(p) = i\hbar \frac{\partial \psi(p)}{\partial p_\mu}. \quad (7.2.4)$$

Данная симметрия даже послужила основанием В. Паули и ряду других физиков поставить вопрос, что более первично: координатное или импульсное пространство?

4. С другой стороны, векторы 4-скорости можно получить из спинорных волновых функций независимо, согласно (7.1.29), а следовательно, умножая на значение массы  $m$ , прийти к выражениям импульса  $p^\mu$  независимо от координатного пространства-времени. Этот факт позволяет взглянуть на *суть уравнений Дирака как на условие согласования двух определений скорости (импульса) частиц: одного в рамках понятий координатного пространства, а другого в рамках понятий пространства скоростей*. Уравнения Дирака означают, что проекция импульса  $p_\mu$  из (7.2.4) на единичный вектор 4-скорости  $u^\mu$  (7.1.29) определяется значением массы частицы  $m$ :

$$p_\mu u^\mu = m \rightarrow \text{label}7.2.4 \bar{\psi} \gamma(\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + (h.c.) = \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} \psi \rightarrow i\gamma(\mu) \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = \frac{mc}{\hbar} \psi. \quad (7.2.5)$$

5. Обратимся к классическим уравнениям движения. В их левых частях содержатся вторые производные от координат (ускорения) или рассматриваемых функций, а справа — некоторые выражения из скоростей и координат (функций). Как известно, скорость определяется как предел отношения разности координат двух точек (функций в двух точках) к промежутку времени (интервалу), т. е. основывается на рассмотрении двух близких точек или одного «шага». (Наиболее общий подход к одному «шагу» формулируется в дифференциальной геометрии в виде операции параллельного переноса.) Для определения ускорения необходимо рассматривать три точки, т. е. это понятие основано на двух «шагах». Следовательно, можно сказать, что все ключевые уравнения классической физики имеют «двухшаговую» природу. Таковыми являются уравнения второго закона Ньютона, уравнения геодезических линий в ОТО, а также сами уравнения Эйнштейна. Напомним, что

стоящие в левой части этих уравнений компоненты тензора кривизны (Риччи) определяются в геометрии через параллельный перенос по замкнутому контуру, что соответствует сравнению результатов двух переносов в разном порядке.

Поскольку уравнение Клейна—Фока представляет собой «двухшажное» соотношение, то уравнения Дирака, представляющие собой своеобразный «квадратный корень» из него, являются «одношажными», что отражено соотношением (7.2.2).

6. Следует подчеркнуть, что в общепринятой теории поля используется ограниченное понимание сути фермионных полей: они рассматриваются наряду со скалярными, векторными или тензорными полями, отличаясь от них лишь только своими трансформационными свойствами — преобразованием по спинорному представлению группы Лоренца. Однако в спинорных волновых функциях заключено значительно большее.

### 7.2.2. Спинорная запись фундаментальных уравнений

1. Формулами вида (7.1.13) фактически было определено соответствие между компонентами 4-мерных векторов и компонентами смешанных спинтензоров второго ранга. Вводя одинаковые коренные буквы для обозначений тех и других величин (например, букву  $A$ ), из этих формул можно найти обратные соотношения как для контравариантных, так и для ковариантных компонент:

$$A^{1\dot{1}} = A^0 + A^3 = A_0 - A_3; \quad A^{2\dot{2}} = A^0 - A^3 = A_0 + A_3; \\ A^{1\dot{2}} = A^1 - iA^2 = -A_1 + iA_2; \quad A^{2\dot{1}} = A^1 + iA^2 = -A_1 - iA_2; \quad (7.2.6)$$

$$A_{1\dot{1}} = A^{2\dot{2}} = A_0 + A_3; \quad A_{2\dot{2}} = A^{1\dot{1}} = A_0 - A_3; \\ A_{1\dot{2}} = -A^{2\dot{1}} = A_1 + iA_2; \quad A_{2\dot{1}} = -A^{1\dot{2}} = A_1 - iA_2. \quad (7.2.7)$$

2. Введем спинорные обозначения для комбинаций дифференциальных операторов, соответствующие приведенным формулам:

$$\partial_{1\dot{1}} = \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^3}; \quad \partial_{2\dot{2}} = \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}; \\ \partial_{1\dot{2}} = \frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}; \quad \partial_{2\dot{1}} = \frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}. \quad (7.2.8)$$

Эти формулы позволяют представить все дифференциальные соотношения, записанные ранее для тензорных величин (в плоском пространстве-времени), исключительно через спинтензорные величины и операторы [140]. Это особенно важно для записи уравнений Дирака, которые в форме (7.2.1) содержат как векторные, так и спинорные величины.

3. Но начнем с более простых соотношений. Легко убедиться, что условия Лоренца во введенных обозначениях представляются в виде:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \partial_{s\dot{r}} A^{s\dot{r}} \equiv \frac{1}{2} \left( \partial_{11} A^{11} + \partial_{1\dot{2}} A^{1\dot{2}} + \partial_{21} A^{21} + \partial_{2\dot{2}} A^{2\dot{2}} \right) = 0. \quad (7.2.9)$$

Здесь и далее индексы  $s$  и  $r$  принимают значения 1 и 2.

Уравнение Клейна—Фока в спинтензорных обозначениях имеет вид

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{1}{2} \partial_{s\dot{r}} \partial^{s\dot{r}} \varphi = 0. \quad (7.2.10)$$

4. Чтобы записать уравнения Максвелла, введем спинтензорные обозначения для специальных комбинаций из компонент тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} f_{11} &= (F_{10} + F_{13}) + i(F_{20} + F_{23}); & f_{12} &= F_{03} + iF_{21}; \\ f_{22} &= (F_{01} + F_{13}) + i(F_{20} + F_{32}). \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

Здесь вместо коренной буквы  $F$  введена буква  $f$ , чтобы не было путаницы между спинтензорными и тензорными компонентами электромагнитного поля. Легко убедиться, что эти комбинации представляются в следующем симметричном спинтензорном виде:

$$f_{sr} = \frac{1}{2} (\partial_{s\dot{q}} A_r^{\dot{q}} + \partial_{r\dot{q}} A_s^{\dot{q}}), \quad (7.2.12)$$

где  $A_r^{\dot{q}} = A_{r\dot{s}} g^{\dot{s}\dot{q}}$ .

Используя эти обозначения, первую пару уравнений Максвелла можно представить в форме

$$\partial_{s\dot{q}} f_r^{\dot{q}} - \partial_{r\dot{q}} f_s^{\dot{q}} = 0. \quad (7.2.13)$$

Вторая пара уравнений Максвелла представляется в виде

$$\partial_{s\dot{q}} f_r^{\dot{q}} + \partial_{r\dot{q}} f_s^{\dot{q}} = \frac{4\pi}{c} j_{s\dot{r}}. \quad (7.2.14)$$

5. Уравнения Дирака для свободной частицы легко находятся путем замены векторных операторов дифференцирования на спинтензорные согласно (7.2.8) и воспроизведения спинорных значков у 4-компонентного биспинора (7.1.22):

$$i \partial^{s\dot{r}} \chi_s - \frac{mc}{\hbar} \phi^{\dot{r}} = 0; \quad i \partial_{s\dot{r}} \phi^{\dot{r}} - \frac{mc}{\hbar} \chi_s = 0. \quad (7.2.15)$$

Инвариантность этих уравнений относительно спинорных преобразований очевидна.

6. Уравнения Дирака для электромагнитно взаимодействующего спинорного поля получаются общеизвестной заменой частной производной на удлиненную:

$$i \left( \partial^{s\dot{r}} + \frac{ie}{\hbar c} A^{s\dot{r}} \right) \chi_s - \frac{mc}{\hbar} \phi^{\dot{r}} = 0; \quad i \left( \partial_{s\dot{r}} + \frac{ie}{\hbar c} A_{s\dot{r}} \right) \phi^{\dot{r}} - \frac{mc}{\hbar} \chi_s = 0. \quad (7.2.16)$$

### 7.3. Фермионы в искривленном пространстве-времени

Перейдем к случаю искривленного пространства-времени, где определение импульсов (7.2.4) в координатном пространстве через частные производные должно быть заменено на ковариантные производные от спинора.

#### 7.3.1. Уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени

1. Определим операцию параллельного переноса спинорных волновых функций, следуя работам В. А. Фока [169] и В. А. Фока и Д. Д. Иваненко [168]. Для этого рассмотрим соотношение компонент спиноров в близких точках. Из общих соображений следует ожидать, что

$$\begin{aligned} \psi(x + dx) &= \psi(x) + \Gamma_\lambda \psi(x) dx^\lambda; \\ \bar{\psi}(x + dx) &= \bar{\psi}(x) + \bar{\psi}(x) \tilde{\Gamma}_\lambda dx^\lambda, \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

где  $\Gamma_\lambda$  и  $\tilde{\Gamma}_\lambda$  — квадратные 4-рядные матрицы. Установим связь между ними. Для этого используем общепринятые в релятивистской квантовой теории соотношения:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma(0); \quad \gamma(0) \gamma(0) = I. \quad (7.3.2)$$

Здесь и далее матрицы Дирака  $\gamma(\alpha)$  в одном из стандартных представлений будут писаться с локальными индексами, поскольку принято считать, что они инвариантны при координатных преобразованиях. Из (7.3.1) и (7.3.2) имеем

$$\bar{\psi}(x) \tilde{\Gamma}_\lambda = (\Gamma_\lambda \psi(x))^\dagger \gamma(0) = \psi^\dagger(x) \Gamma_\lambda^\dagger \gamma(0) = \bar{\psi}(x) \gamma(0) \Gamma_\lambda^\dagger \gamma(0), \quad (7.3.3)$$

т. е.

$$\tilde{\Gamma}_\lambda = \gamma(0) \Gamma_\lambda^\dagger \gamma(0). \quad (7.3.4)$$

2. Чтобы найти явный вид матриц  $\Gamma_\lambda$ , воспользуемся тем, что из величин  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  по стандартным правилам можно построить вектор

(локальный, т. е. относительно группы локальных ортогональных преобразований):

$$B(\alpha) = \bar{\psi}\gamma(\alpha)\psi, \quad (7.3.5)$$

а для произвольного вектора с локальным индексом известен закон параллельного переноса (6.2.15). Подставляя (7.3.1) в (7.3.5) и учитывая (7.3.4), получаем в первом приближении

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\gamma(\alpha)\psi)_{x+dx} &= (\bar{\psi}\gamma(\alpha)\psi)_x + \Delta_\sigma(\alpha\beta)dx^\sigma (\bar{\psi}\gamma(\beta)\psi)_x = \\ &= \bar{\psi}(x+dx)\gamma(\alpha)\psi(x+dx) = \bar{\psi}\gamma(\alpha)\psi(x) + \\ &+ \bar{\psi}\gamma(\alpha)\Gamma_\mu\psi(x)dx^\mu + \bar{\psi}(x)\gamma(0)\Gamma_\lambda^\dagger\gamma(0)\gamma(\alpha)\psi(x)dx^\lambda. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Отсюда находим уравнение для матриц  $\Gamma_\lambda$ :

$$\Delta_\sigma(\alpha\beta)\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)\Gamma_\sigma + \gamma(0)\Gamma_\sigma^\dagger\gamma(0)\gamma(\alpha). \quad (7.3.7)$$

3. Естественно решать это уравнение в виде выражений, составленных из  $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$  и матриц  $\gamma(\mu)$ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что простейшее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma &= i\mathcal{A}_\sigma + \frac{1}{4}\Delta_\sigma(\mu\nu)\gamma(\mu)\gamma(\nu); \\ \Gamma_\sigma^\dagger &= -i\mathcal{A}_\sigma + \frac{1}{4}\Delta_\sigma(\mu\nu)\gamma^\dagger(\nu)\gamma^\dagger(\mu), \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

где  $\mathcal{A}_\sigma$  — произвольный вектор.

4. Из (7.3.8) и (7.3.1) получаем выражение для ковариантной производной от спинора

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{1}{4}\Delta_\mu(\alpha\beta)\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\psi - i\mathcal{A}_\mu\psi; \\ \nabla_\mu\bar{\psi} &= \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{4}\Delta_\mu(\alpha\beta)\bar{\psi}\gamma(\beta)\gamma(\alpha) + i\mathcal{A}_\mu\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

5. Вводя обозначение

$$\frac{\partial}{\partial x(\lambda)} \equiv g^\mu(\lambda)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.3.10)$$

и вспоминая, что переход к искривленному пространству-времени осуществляется заменой частных производных ковариантными, находим уравнение Дирака в искривленном пространстве-времени (в локальных индексах):

$$\left[ -i\gamma(\lambda)\frac{\partial}{\partial x(\lambda)} - \mathcal{A}(\lambda)\gamma(\lambda) + \frac{i}{4}\Delta(\lambda\alpha\beta)\gamma(\lambda)\gamma(\alpha)\gamma(\beta) + \frac{mc}{\hbar} \right] \psi = 0. \quad (7.3.11)$$

Любопытно, что в выражениях (7.3.8)–(7.3.11) можно ввести в ковариантную производную вектор  $\mathcal{A}_\mu$ , который входит точно так же,



как векторный электромагнитный потенциал при учете взаимодействия спинорного и электромагнитного полей.

Уравнения (7.3.11) можно переписать с универсальными индексами, введя обозначение

$$\gamma^\mu = \gamma(\lambda)g^\mu(\lambda), \quad (7.3.12)$$

где  $g^\mu(\lambda)$  теперь определяет переход от криволинейной системы координат к такой локальной декартовой, в которой матрицы  $\gamma(\lambda)$  имеют обычный вид (значения в общепринятом представлении гамма-матриц). В результате получаем:

$$\left( -i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \mathcal{A}_\mu \gamma^\mu + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0. \quad (7.3.13)$$

6. Отметим, что матрицы  $\gamma_\mu$ , во-первых, теперь становятся функциями координат и, во-вторых, ведут себя как компоненты вектора с универсальным индексом, т. е. преобразуются по векторному закону при универсальных координатных преобразованиях (1.1.1).

Вместо известных антикоммутиационных соотношений для матриц Дирака  $\gamma(\alpha)$

$$\gamma(\alpha)\gamma(\beta) + \gamma(\beta)\gamma(\alpha) = 2I_4\eta(\alpha\beta) \quad (7.3.14)$$

для новых матриц  $\gamma_\alpha$  имеют место соотношения:

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2I_4g_{\alpha\beta}, \quad (7.3.15)$$

т. е. метрический тензор определяется через гамма-матрицы  $\gamma_\alpha$ .

7. Выписанные выше уравнения Дирака в искривленном (римановом) пространстве-времени несложно обобщить на случай неримановых геометрий (см. [88]). Здесь наибольший интерес представляет поведение фермионных полей в пространствах с кручением.

### 7.3.2. Квадрирование уравнений Дирака

Выше уже упоминалось, что в искривленном пространстве-времени в уравнении Клейна—Фока возникает дополнительное слагаемое со скалярной кривизной с некоторым коэффициентом, зависящим от способа получения этого уравнения. Найдем этот коэффициент, исходя из того, что более фундаментальными являются уравнения Дирака. Сделаем обратный шаг по сравнению с извлечением «квадратного корня» — получим уравнение Клейна—Фока квадрированием найденных уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени.

Квадрирование уравнений Дирака осуществляется действием слева на уравнения (7.3.13) комплексно сопряженным оператором:

$$\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{4} \Delta_{\mu\nu\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma - \frac{mc}{\hbar}\right) \left(i\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{i}{4} \Delta_{\alpha\beta\lambda} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda - \frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0. \quad (7.3.16)$$

Поясним ключевые положения из промежуточных выкладок.

1. Не следует забывать, что в искривленном пространстве-времени матрицы Дирака зависят от координат. При их дифференцировании следует воспользоваться формулами (6.2.21) и (7.3.12), которые приводят к выражению:

$$\frac{\partial \gamma^\nu}{\partial x^\mu} = (\Gamma_{\rho\mu}^\nu + \Delta_{\mu\rho}^{\cdot\nu}) \gamma^\rho. \quad (7.3.17)$$

2. Слагаемое, содержащее дифференцирование коэффициентов вращения Риччи, посредством выделения симметричной и антисимметричной частей приводится к виду

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \frac{\partial \Delta_{\nu\beta\lambda}}{\partial x^\mu} &= -\frac{1}{8} [(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) + (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)] \gamma^\beta \gamma^\lambda \frac{\partial \Delta_{\nu\beta\lambda}}{\partial x^\mu} = \\ &= -\frac{1}{8} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda \left( \frac{\partial \Delta_{\nu\beta\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Delta_{\mu\beta\lambda}}{\partial x^\nu} \right) - \frac{1}{4} \gamma^\beta \gamma^\lambda g^{\mu\nu} \frac{\partial \Delta_{\nu\beta\lambda}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

3. Легко видеть, что антисимметричную комбинацию производных от коэффициентов вращения Риччи в (7.3.18) можно рассматривать как часть выражения для тензора Римана—Кристоффеля. В связи с этим напомним, что этот тензор со всеми универсальными индексами связан с тензором кривизны в тетрадном методе соотношением (6.2.34)

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\beta\lambda} = R_{\mu\nu}(\alpha\kappa)g_\beta(\alpha)g_\lambda(\kappa) &= \frac{\partial \Delta_{\nu\beta\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Delta_{\mu\beta\lambda}}{\partial x^\nu} + \Delta_{\mu\sigma\lambda} \Delta_{\nu\cdot\beta}^\sigma - \Delta_{\nu\sigma\lambda} \Delta_{\mu\cdot\beta}^\sigma - \\ &- \Delta_{\nu\sigma\lambda} \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Delta_{\nu\beta\sigma} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma + \Delta_{\mu\sigma\lambda} \Gamma_{\beta\nu}^\sigma + \Delta_{\mu\beta\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma. \end{aligned} \quad (7.3.19)$$

Дополнительные слагаемые к антисимметричной комбинации производных от коэффициентов вращения Риччи возникают из производных от произведения трех матриц Дирака.

4. Легко видеть, что в квадрированном выражении тензор Римана—Кристоффеля возникает свернутым с произведением из четырех матриц Дирака. От него можно перейти к скалярной кривизне, представив произведение из трех последних матриц Дирака в виде комбинации

с циклической перестановкой индексов и используя тождества Риччи:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda R_{\mu\nu\beta\lambda} &= \frac{1}{3} \gamma^\mu (\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\lambda + \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\beta) R_{\mu\nu\beta\lambda} + \\ &+ \frac{2}{3} (\gamma^\mu \gamma^\lambda g^{\nu\beta} - 2\gamma^\mu \gamma^\beta g^{\nu\lambda}) R_{\mu\nu\beta\lambda} = -2R. \end{aligned} \quad (7.3.20)$$

5. Выражение, содержащее произведение из шести матриц Дирака, следует представить в виде

$$\frac{1}{16} \Delta_{\mu\nu\sigma} \Delta_{\alpha\beta\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \psi = \frac{1}{16} \gamma^\mu \gamma^\nu B_\mu B_\nu \psi + \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu\sigma} B^\sigma \psi, \quad (7.3.21)$$

где введено обозначение

$$B_\mu = \Delta_{\mu\nu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\lambda. \quad (7.3.22)$$

Произведя громоздкие, однако элементарные преобразования, квадрированное уравнение Дирака в искривленном пространстве-времени можно привести к следующему виду:

$$\left[ g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{1}{4} R - \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left( \nabla_\mu B_\nu - \frac{1}{4} B_\mu B_\nu \right) \right] \psi = 0. \quad (7.3.23)$$

Напомним, что в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах) квадрированное уравнение Дирака в присутствии электромагнитного поля имеет вид

$$\left[ \eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{ie}{2\hbar c} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi = 0, \quad (7.3.24)$$

где введен антисимметричный матричный 4-тензор

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (7.3.25)$$

Сравнивая (7.3.24) с (7.3.23) и учитывая (7.3.25), находим, что своеобразными аналогами тензора электромагнитного поля, свернутого с  $\sigma^{\mu\nu}$ , выступают, во-первых, тензор Римана—Кристоффеля (в квадратичной свертке с антисимметричным матричным 4-тензором) и, во-вторых, выражение  $B_\mu$ , содержащее в себе матричный 4-тензор, так как

$$B_\mu = \Delta_{\mu\nu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\lambda = \Delta_{\mu\nu\lambda} \sigma^{\nu\lambda}. \quad (7.3.26)$$

Не представляет труда записать квадрированное уравнение Дирака в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля.

# Многомерность физического мира



ОТО решает задачу геометризации взаимодействий лишь частично, ограничившись гравитационным взаимодействием. Но идеология геометризации физики диктует распространение ее принципов и на другие виды взаимодействий. В XX в. решению этой проблемы уделялось значительное внимание, причем интерес к ней то возрастал и она становилась в центре внимания, то затухал. К концу XX в. эта проблема вновь заняла достойное место в мировых исследованиях, и в настоящее время есть основания полагать, что в принципиальном плане эта проблема уже решена. В этой части показано, как это можно сделать в рамках 8-мерной геометрической теории.

## Размерность пространства-времени



Рис. III.1. Размерность пространства-времени и геометризация физических взаимодействий

Последовательное увеличение размерности пространства-времени позволяет геометризовать сначала электромагнитные, затем электро-слабые и, наконец, в рамках 8 измерений — сильные взаимодействия. Это проиллюстрировано схемой (см. рис. III.1), где по вертикальной оси отложена размерность пространства-времени, а по горизонтальной оси указаны бозонные поля, геометризуемые в многомерной теории соответствующей размерности: электромагнитное  $A_\mu$ , поля слабых взаимодействий  $Z_\mu$ ,  $W_\mu^\pm$ , переносчики сильных взаимодействий — глюонные поля  $\mathcal{A}(s)_\mu$ . Малый квадрат соотносится с 4-мерной ОТО; следующий за ним квадрат — с 5-мерной геометрической теорией гравитационных и электромагнитных взаимодействий Калуцы; еще больший квадрат — с 6-мерной теорией Калуцы—Клейна и, наконец, последний квадрат — с 8-мерной геометрической теорией грави-сильных взаимодействий. Промежуточный квадрат соответствует 7-мерной геометрической теории грави-электрослабых взаимодействий, получаемой из 8-мерной теории своеобразным усечением (склеивкой двух скрытых размерностей).

# Пятимерные теории Калуцы и Клейна



Т. Калуца предложил [75] способ объединения теорий гравитации и электромагнетизма на основе гипотезы, что наш мир представляет собой искривленное 5-мерное пространство-время, сделав следующий шаг (после открытия ОТО) в построении геометрофизики, т. е. в создании геометрической картины мира.

Подчеркнем наиболее существенные аспекты излагаемых в этой главе двух вариантов 5-мерной теории.

1. Теория Т. Калуцы возникла как непосредственное развитие идей эйнштейновской ОТО на случай геометрической теории пяти измерений и нацелена на объединение теорий гравитационных и электромагнитных взаимодействий.

2. Теория О. Клейна и ряда других авторов представляет иной вариант 5-мерной теории, предназначенный для геометрического описания масс покоя частиц и некоторых других аспектов современной физики.

3. Эта глава посвящена анализу 5-мерных теорий Калуцы и Клейна, рассматриваемых здесь лишь как промежуточные шаги на пути построения геометрофизики, охватывающей все известные виды физических взаимодействий. В последующих главах в рамках геометрии более высоких размерностей анализируются электрослабые и сильные взаимодействия, проявляющиеся в микромире.

4. При построении многомерных теорий следует с большой осторожностью переносить в них «правила игры», принятые в рамках 4-мерия. Это обусловлено тем, что, повышая размерность используемого многообразия, мы входим в неизученные области физического мироздания, где нужно не слепо руководствоваться закономерностями, вскрытыми в классическом 4-мерном мире, а исследовать, насколько они там справедливы и, самое главное, пытаться разглядеть, какие новые понятия и принципы там действуют. Как показывает опыт исследования многомерия, привлечение каждой новой размерности влечет за собой проявление чего-то нового, ранее не встречавшегося.

---

5. Забегая вперед, отметим, что многомерный геометрический подход на самом деле вскрывает лишь вершину айсберга физической реальности. Исследуя ее, мы будем стремиться разгадать еще более глубокие закономерности, действующие в подводной части айсберга реальности, которые можно будет использовать при построении более фундаментальной теории.

## 8.1. Основания перехода к пятимерной теории

1. Распространенное предубеждение против многомерия основано на открытии, впервые сделанном, по-видимому, И. Кантом, согласно которому законы обратных квадратов для гравитационной и электростатической сил связаны с 3-мерностью классического пространства. Это легко выводится из 3-мерных уравнений Пуассона для скалярных потенциалов соответствующих полей. В гипотетической теории, описывающей явления в плоском  $n$ -мерном пространстве, естественно также ожидать наличия сил, потенциалы которых  $\varphi$  удовлетворяют  $n$ -мерному уравнению Пуассона. Его решения и центральные силы находятся в виде

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{r^{n-2}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^{n-1}}, \quad (8.1.1)$$

где  $\alpha$  — постоянная;  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ .

Заметим, что аналогичная зависимость потенциала от радиальной координаты имеет место и в обобщении ОТО на случай  $n + 1$  измерений. Так, сферически-симметричное решение (Тангерлини) многомерных уравнений Эйнштейна в координатах кривизн находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r^{n-2}}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r^{n-2}} - r^2 d\Omega^2, \quad (8.1.2)$$

где  $r = x^1$ ;

$$d\Omega^2 = (dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2 + \sin^2 x^2 \sin^2 x^3 (dx^4)^2 + \dots + \prod_{l=2}^{n-1} \sin^2 x^l (dx^n)^2. \quad (8.1.3)$$

Можно показать тем же способом, что и в 4-мерной теории, что из этого выражения в основном приближении получается квазиньютонова сила вида (8.1.1). В частности, в 5-мерной теории такого типа силы убывают обратно пропорционально кубу расстояния от центра.

2. На данном факте основаны многочисленные особенности физического мира в пространстве-времени четырех измерений по сравнению с гипотетическими мирами в пространствах иной размерности (см. [29, 115]). Назовем главные из таких особенностей:

- 1) Атомы устойчивы лишь в пространстве-времени четырех и менее измерений.
- 2) Круговые орбиты пробных тел устойчивы в ньютоновом гравитационном поле лишь при  $n \leq 4$ .
- 3) Принцип Гюйгенса справедлив лишь в пространствах нечетной размерности (в пространстве-времени четной размерности).
- 4) Квантовая электродинамика неперенормируема в пространстве-времени с  $n \geq 4$ .
- 5) Четыре — наименьшая размерность, начиная с которой теория Эйнштейна в вакууме содержательна.
- 6) Уравнения Максвелла конформно инвариантны лишь в 4-мерном пространстве-времени.

Имеются и другие особенности 4-мерия, менее известные.

3. Несмотря на перечисленные свидетельства выделенности 4-мерия, в рассматриваемых далее многомерных (при  $n + 1 > 4$ ) геометрических теориях физических взаимодействий отсутствуют противоречия с выявленными особенностями 4-мерия благодаря следующим двум обстоятельствам.

- 1) Выводы об особенностях 4-мерия делались с использованием **постулата, что все дополнительные размерности равноправны с наблюдаемыми классическими**. Однако насколько необходим этот постулат? Уже в специальной теории относительности времени-подобная координата отличается от трех пространственно-подобных координат. В реальной обстановке для каждого из нас одна пространственно-подобная координата (направление вверх — вниз) выделена по сравнению с двумя другими (вперед — назад, влево — вправо). Оставшиеся две координаты также неравноправны. Чтобы в этом убедиться, достаточно взглянуть на стрелку компаса.

При построении многомерных геометрических теорий следует отказаться от постулата равноправности дополнительных и классических измерений, полагая, что физические обстоятельства нашего мира таковы, что в наблюдаемых условиях мир (точнее, метрический тензор многомерного пространства-времени) не зависит от дополнительных координат (или зависит циклически). В этом случае уже нельзя использовать симметрию вида (8.1.3),



принятую в решении Тангерлини (8.1.2); тогда как будет показано ниже, в решениях многомерных уравнений будет появляться наблюдаемая зависимость сил обратно пропорционально квадрату расстояния от центра.

- 2) При обсуждении электромагнитного поля подразумевалось, что оно вносится в многомерное пространство-время извне. В многомерных теориях будем полагать, что **электромагнитное и другие физические поля возникают из компонент многомерного метрического тензора в результате редуцирования к 4-мерной теории.**

4. Т. Калуца обнаружил, что если увеличить размерность пространства на единицу, то в обобщенной таким образом теории Эйнштейна возникают дополнительные степени свободы, которые можно использовать для описания электромагнитного поля. Поясним идею Калуцы.

Согласно общим принципам римановой геометрии, в 5-мерном многообразии вместо квадрата 4-мерного интервала  $ds^2$  следует взять 5-мерный интервал

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B, \quad (8.1.4)$$

где индексы  $A$  и  $B$  принимают значения: 0, 1, 2, 3, 5. (Пока индекс 4 пропустим — он будет использован при изложении варианта 5-мерия Клейна—Фока.) Компоненты 5-мерного метрического тензора  $G_{AB}$  образуют квадратную  $5 \times 5$ -матрицу, в общем случае имеющую 15 различных компонент:

$$G_{AB} = \left( \begin{array}{cccc|c} G_{00} & G_{01} & G_{02} & G_{03} & G_{05} \\ G_{10} & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{15} \\ G_{20} & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{25} \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{35} \\ \hline G_{50} & G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{55} \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{c|c} G_{\mu\nu} & G_{\mu 5} \\ \hline G_{5\nu} & G_{55} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\nu & G_{55} \end{array} \right). \quad (8.1.5)$$

Здесь греческие индексы  $\mu$  и  $\nu$  по-прежнему принимают четыре значения: 0, 1, 2, 3. Калуца показал, что компонентами  $G_{AB}$  можно распорядиться следующим образом: десять компонент  $G_{\mu\nu}$  (точнее, десять комбинаций из них) следует сопоставить с компонентами  $g_{\mu\nu}$  эйнштейновской ОТО; четыре компонента  $G_{\mu 5}$  можно связать с четырьмя компонентами электромагнитного векторного потенциала  $A_\mu$ , и остается еще одна, «лишняя», пятнадцатая компонента  $G_{55}$ , которая, в принципе, может описывать какое-то новое скалярное поле.

5. Данная трактовка компонент 5-мерной метрики вызывает множество вопросов. Они возникли и у Эйнштейна, когда в 1919 г. Калуца прислал ему на отзыв свою статью. В своем письме к Калуце от 21 апреля 1919 г. Эйнштейн писал: «Мысль, что электрическое поле

является «искаленной» величиной... также часто и настойчиво преследовала меня. Однако мне никогда не приходило в голову, что это можно получить в 5-мерном цилиндрическом мире; такая идея выглядит совершенно новой. Ваша мысль с первого взгляда очень понравилась мне... Если при более детальном чтении у меня не появится серьезных возражений, я буду рад представить Вашу работу в здешней Академии» (Цит. по [33, с. 65]).

Это высказывание Эйнштейна следует пояснить. Как известно, в теории Максвелла компоненты  $A_\mu$  образуют тензор напряженности  $F_{\mu\nu}$  согласно формуле (5.1.2). В искривленном (римановом) пространстве-времени своеобразным аналогом напряженности являются символы Кристоффеля:

$$F_{\mu\nu} \leftrightarrow \Gamma_{AC,B} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{AB}}{\partial x^C} + \frac{\partial G_{BC}}{\partial x^A} - \frac{\partial G_{AC}}{\partial x^B} \right). \quad (8.1.6)$$

Пусть один из индексов (скажем, C) равен 5, а остальные — принимают 4-мерные значения. Кроме того, постулируем, что компоненты  $G_{AB}$  не зависят от 5-й координаты (это так называемое условие цилиндричности по  $x^5$ ). При сопоставлении (8.1.6) имеем

$$\Gamma_{\mu 5, \nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^5} + \frac{\partial G_{\nu 5}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial G_{\mu 5}}{\partial x^\nu} \right) \rightarrow \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (8.1.7)$$

т. е. компоненты тензора напряженности электромагнитного поля оказались «искаженными» компонентами 5-мерного символа Кристоффеля.

Таким образом, дополнительное, пятое измерение проявляется в виде смешанных компонент 5-мерного метрического тензора  $G_{\mu 5}$  и компонент 5-мерного символа Кристоффеля.

6. Еще один довод в пользу перехода к 5-мерной теории можно увидеть в рамках общепринятой теории спинорных частиц, в частности в известных уравнениях Дирака. Напомним, что понятие спинора тесно связано с размерностью и сигнатурой геометрического многообразия. Согласно общей теории введения спиноров на основе алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел, используемые в современной физике 4-компонентные комплексные спиноры соответствуют именно 5-мерному псевдоевклидовому многообразию. Не случайно в стандартной электродинамике при описании спинорных частиц возникают дополнительные матрицы Дирака  $\gamma_5$ , которые вместе с матрицами  $\gamma_\mu$  являются образующими алгебры Клиффорда  $C(1, 4)$ . В теориях более высоких размерностей спиноры будут иметь иное число компонент: в 6- и 7-мерных теориях их восемь, в 8-мерной теории — уже шестнадцать и т. д.

## 8.2. Геометрический прообраз грави-электромагнитных взаимодействий

Отметим, что первая статья Калуцы и ряд последующих работ других авторов были недостаточно общими и четкими. Только спустя много лет идеи Калуцы были сформулированы в строгом и законченном виде. Оказалось, что для этой цели необходимо использовать монадный метод редуцирования 5-мерной теории на 4-мерное риманово пространство-время. Исторически монадный метод возник в связи с решением именно этой задачи [196], и лишь спустя много лет был переоткрыт и усовершенствован при разработке методов описания систем отсчета в рамках 4-мерной ОТО.

### 8.2.1. Монадный метод редуцирования (4 + 1-расщепления)

Чтобы прояснить все отождествления и ограничения, сделанные в 5-мерной теории Калуцы, начнем с изложения монадного метода в самом общем случае 5-мерного риманова пространства-времени.

Монадный метод опять удобно представить состоящим из четырех частей: 1) алгебры монадного метода; 2) задания монадных физико-геометрических тензоров; 3) определения монадных операторов дифференцирования; 4) записи основных соотношений теории в монадном виде.

**1. Алгебра монадного метода.** Постулируется, что в каждой точке 5-мерного многообразия с метрическим тензором  $G_{AB}$  определен вектор (монада)  $\lambda_A \equiv G(5)_A$ . Исходной формулой является представление метрического тензора в виде

$$G_{AB} = \pm \lambda_A \lambda_B + g_{AB}, \quad (8.2.1)$$

где  $g_{AB}$  — метрический тензор 4-мерного пространственно-временного сечения, ортогонального  $\lambda_A$ . Здесь для общности допускаются две возможные сигнатуры:  $(+ - - - +)$ , соответствующая верхнему знаку в  $\pm$ , и  $(+ - - - -)$ , соответствующая нижнему знаку. Составляющие 5-мерного метрического тензора в (8.2.1) удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\lambda_A \lambda_B G^{AB} = \pm 1; \quad \lambda_A g^{AB} = 0; \quad g_{AB} g^{AB} = 4. \quad (8.2.2)$$

Как уже отмечалось, в монадном методе оперируют лишь с величинами, спроецированными либо на выделенное направление, либо на ортогональную ему гиперповерхность. Это достигается внутренним умножением тензорных величин  $B_{C\dots}^{A\dots}$  либо на вектор монады  $\lambda_A$ , либо на компоненты 4-мерного метрического тензора.

Выберем монаду  $\lambda^A$  вдоль направления дополнительной координаты  $x^5$ , тогда из условия нормировки в (8.2.2) следует представление  $\lambda_A$  через компоненты 5-мерного метрического тензора:

$$\lambda^A = \frac{G_5^A}{\sqrt{\pm G_{55}}} = \{\lambda^\mu = 0; \lambda^5 = \frac{1}{\sqrt{\pm G_{55}}}\}; \quad (8.2.3)$$

$$\lambda_A = \frac{G_{A5}}{\sqrt{\pm G_{55}}} = \{\lambda_\mu = \frac{G_{5\mu}}{\sqrt{\pm G_{55}}}; \lambda_5 = \pm \sqrt{\pm G_{55}}\}.$$

Такое представление будем называть калибровкой монады, точнее — выбором *специальной калибровки* (типа хронометрической в ОТО). В дальнейшем монадный метод будет применяться и для изложения других вариантов теории, где вместо индекса 5 будут стоять другие числа.

В данной калибровке из формул (8.2.1) и (8.2.3) можно найти выражения компонент 4-мерного метрического тензора через компоненты  $G_{AB}$ , аналогичные (3.2.12) и (3.2.13):

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \mp \lambda_\mu \lambda_\nu = G_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu 5} G_{\nu 5}}{G_{55}}; \quad g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}; \quad g_\nu^\mu = G_\nu^\mu; \quad (8.2.4)$$

$$g_{5\mu} = 0; \quad g_{55} = 0; \quad g^{5\mu} = G^{5\mu}; \quad g_\mu^5 = \mp \lambda_\mu \lambda^5; \quad g_5^B = 0; \quad g^{55} = \pm[(\lambda^5)^2 - \lambda_5^2]. \quad (8.2.5)$$

В данной калибровке выделяется подмножество систем координат, связанных преобразованиями:

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5); \quad (8.2.6)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (8.2.7)$$

Назовем *калибровочно инвариантными* 4-тензорами величины, инвариантные при преобразованиях 5-й координаты (8.2.6) и ковариантные относительно 4-мерных преобразований (8.2.7). Таковыми будут компоненты 4-мерного метрического тензора (8.2.4) и все спроецированные на классическое пространство-время тензоры. В такой теории будут использоваться лишь калибровочно инвариантные величины и операторы. В дальнейшем их будем помечать тильдой сверху.

Квадрат 5-мерного интервала (8.2.1) можно представить в следующем виде

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B = ds^2 \pm d\lambda^2, \quad (8.2.8)$$

где использованы спроецированные смещения

$$d\lambda = dx^A \lambda_A; \quad ds^2 = g_{AB} d\tilde{x}^A d\tilde{x}^B \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8.2.9)$$

**2. Монадные физико-геометрические тензоры** — это тензоры, которые можно построить из монадных составляющих метрического тензора

и их первых производных. Как и в случае 4-мерной теории, имеются три и только три таких тензора:

$$\Phi_A = \mp \lambda^B (\lambda_{A,B} - \lambda_{B,A}) \rightarrow \Phi_\mu = \lambda^5 \left( -\frac{\partial \lambda_5}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^5} \right); \quad (8.2.10)$$

$$\tilde{F}_{AB} = \pm \frac{1}{2} g_A^C g_B^D (\lambda_{C,D} - \lambda_{D,C}) \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial x^\mu} + \Phi_\mu \lambda_\nu - \Phi_\nu \lambda_\mu \right); \quad (8.2.11)$$

$$D_{AB} = \frac{1}{2} (\lambda^C g_{AB,C} + \lambda_{,B}^C g_{AC} + \lambda_{,A}^C g_{BC}) \rightarrow D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\lambda_5} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^5}. \quad (8.2.12)$$

Во всех этих формулах сначала соответствующие тензоры записаны в общековариантном виде, а затем переписаны в используемой калибровке. Запятой, как обычно, обозначены частные производные.

3. **Монадные операторы дифференцирования** заменяют ковариантные производные и по определению таковы, что, действуя на спроецированные величины, приводят к спроецированным же выражениям. Таковых операторов, как и в 4-мерной теории, два.

- а) Монадный оператор по выделенному направлению записывается проецированием производной Ли по всем индексам на ортогональные  $\lambda_A$  направления. Запишем этот оператор сразу в используемой калибровке

$$\partial_5^+ \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \lambda^B \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^B} = \frac{1}{\lambda_5} \frac{\partial \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^5}. \quad (8.2.13)$$

Этот оператор не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемой величины.

- б) Оператор ковариантного дифференцирования по направлениям, ортогональным выделенному, имеет вид

$$\nabla_\sigma^+ \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \partial_\sigma^+ \tilde{B}_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu \tilde{B}_{\nu\dots}^{\lambda\dots} + \dots - \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^\lambda \tilde{B}_{\lambda\dots}^{\mu\dots} + \dots, \quad (8.2.14)$$

где использованы обозначения

$$\partial_\sigma^+ = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} - \frac{G_{5\sigma}}{G_{55}} \frac{\partial}{\partial x^5} \quad (8.2.15)$$

— калибровочно инвариантный оператор дифференцирования по направлениям сечения, ортогонального  $\lambda_A$  («удлиненная производная»);

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\lambda^+ g_{\sigma\nu} + \partial_\sigma^+ g_{\nu\lambda} - \partial_\nu^+ g_{\sigma\lambda}) \quad (8.2.16)$$

— калибровочно инвариантная связность в сечении.

### 8.2.2. Геометрические уравнения в монадном виде

Как и в случае 4-мерной теории, монадный вид соотношений означает их представление в такой форме, что в них входят только спроецированные величины, монадные физико-геометрические тензоры и монадные операторы дифференцирования. Выпишем в калибровочно инвариантном виде наиболее важные для построения физической теории геометрические величины и уравнения.

1. **Уравнения геодезических линий** в 5-мерной теории имеют вид

$$\frac{d^2 x^A}{dI^2} = -\Gamma_{BC}^A \frac{dx^B}{dI} \frac{dx^C}{dI}, \quad (8.2.17)$$

где 5-мерные символы Кристоффеля записываются по формуле (8.1.6).

Введем калибровочно инвариантные компоненты 5-скорости:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = \lambda_5 \frac{dx^5}{ds} + \lambda_\mu u^\mu, \quad (8.2.18)$$

тогда уравнения геодезических линий можно представить в виде скалярной и 4-мерной векторной частей:

$$\frac{d^2 \lambda}{ds^2} = \left[ 1 \pm \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] \left( D_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{d\lambda}{ds} \Phi_\mu u^\mu \right); \quad (8.2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{ds} = & -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta - 2 \frac{d\lambda}{ds} \tilde{F}_{\cdot\nu}^\mu u^\nu \pm \frac{d\lambda}{ds} u^\nu (u^\mu u^\alpha D_{\alpha\nu} - 2D_\nu^\mu) \pm \\ & \pm \left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 (\Phi^\mu - u^\mu u_\nu \Phi^\nu). \end{aligned} \quad (8.2.20)$$

(При записи векторного уравнения было использовано скалярное.)

2. **Компоненты 5-мерного тензора Риччи** в калибровочно инвариантном виде представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^5 R^{\mu\nu} = & {}^4 \tilde{R}^{\mu\nu} - \Phi^\mu \Phi^\nu \mp DD^{\mu\nu} \pm 2D^{\mu\sigma} D_\sigma^\nu \mp 2\tilde{F}^{\mu\sigma} F_{\cdot\sigma}^\nu - \\ & - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left( \frac{1}{2} (\nabla_\alpha^+ \Phi_\beta + \nabla_\beta^+ \Phi_\alpha) \pm \partial_5^+ D_{\alpha\beta} \right); \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

$${}^5 R_B^\mu \lambda^B = \nabla_\nu^+ (D^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\nu\mu} - Dg^{\mu\nu}) \pm 2\Phi_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu}; \quad (8.2.22)$$

$${}^5 R_{AB} \lambda^A \lambda^B = \mp (\mp \nabla_\alpha^+ \Phi^\alpha - \partial_5^+ D \mp \Phi^\alpha \Phi_\alpha - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}), \quad (8.2.23)$$

где

$${}^4 \tilde{R}_{\cdot\mu\nu\rho}^\sigma = \partial_\nu^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\rho^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\rho}^\sigma; \quad {}^4 \tilde{R}^{\mu\nu} = {}^4 \tilde{R}^{\rho\mu\nu}; \quad {}^4 \tilde{R} = {}^4 \tilde{R}_{\cdot\alpha\beta}^{\alpha\beta}. \quad (8.2.24)$$

Особый интерес представляет 5-мерная скалярная кривизна, играющая в физической теории роль геометрического лагранжиана. В монадном виде она представляется следующим образом

$${}^5R = {}^5R_{AB}G^{AB} = {}^4\tilde{R} \mp D^2 \mp D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - 2(\pm\partial_5^+ D + \Phi_\alpha\Phi^\alpha + \nabla_\alpha^+\Phi^\alpha). \quad (8.2.25)$$

3. **Обобщенные 5-мерные уравнения Эйнштейна** постулируются в том же виде, что и 4-мерные:

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}{}^5R = \tilde{\varkappa}Q_{AB}, \quad (8.2.26)$$

где  $\tilde{\varkappa}$  — постоянная. Эти уравнения сыграли важную роль при анализе возможностей теории Калуцы, поэтому выпишем их в самом общем калибровочно инвариантном виде:

$${}^4\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4\tilde{R} = \pm 2\left(\tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_\nu^\alpha - \frac{g_{\mu\nu}}{4}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}\right) + \tilde{\varkappa}\tilde{Q}_{\mu\nu} + \Phi_\mu\Phi_\nu + \frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\mu^+\Phi_\nu + \tilde{\nabla}_\nu^+\Phi_\mu) - g_{\mu\nu}(\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \tilde{\nabla}_\alpha^+\Phi^\alpha) + (\tilde{F}_\nu^\alpha D_{\mu\alpha} + \tilde{F}_\mu^\alpha D_{\nu\alpha}) + \pm DD_{\mu\nu} \mp 2D_{\mu\alpha}D_\nu^\alpha \pm \partial_5^+ D_{\mu\nu} \mp \frac{g_{\mu\nu}}{2}(D^2 + D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} + 2\partial_5^+ D); \quad (8.2.27)$$

$$\tilde{\nabla}_\nu^+(D^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\mu\nu} - Dg^{\mu\nu}) \pm 2\Phi_\alpha\tilde{F}^{\alpha\mu} = \tilde{\varkappa}Q_B^\mu\lambda^B; \quad (8.2.28)$$

$$-\frac{1}{2}{}^4\tilde{R} \pm \frac{3}{2}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \pm \frac{1}{2}(D^2 - D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}) = -\tilde{\varkappa}Q_{AB}\lambda^A\lambda^B. \quad (8.2.29)$$

### 8.3. Пятимерная теория Калуцы (упрощенный вариант)

Перейдем от 5-мерной геометрической теории в монадном виде к объединенной физической теории гравитационного и электромагнитного взаимодействий, основные формулы которой записаны в гл. 5 в рамках 4-мерной ОТО.

#### 8.3.1. Переход от 5-мерной геометрии к электродинамике в ОТО

Даже беглое сопоставление полученных в 5-мерной теории уравнений со стандартными в ОТО и электродинамике указывает на многочисленные удивительные аналогии и совпадения, которые вряд ли могут быть случайными. Перечислим отождествления и постулаты, используемые в упрощенном варианте теории Калуцы (без скаляризма).

- 1) Необходимо отождествить (через размерный множитель) антисимметричный физико-геометрический тензор  $\tilde{F}_{\mu\nu}$  с электромагнитным тензором  $F_{\mu\nu}$ , а  $\lambda_\mu$  — с векторным потенциалом  $A_\mu$ .
- 2) Для обеспечения нужного знака (минус) перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля (см. (5.1.7)) в правой части уравнения (8.2.27) следует выбрать 5-ю координату пространственно-подобной, т. е. взять сигнатуру  $(+ - - - -)$ .
- 3) Чтобы устранить из всех уравнений симметричное тензорное поле  $D_{\mu\nu}$ , достаточно постулировать независимость компонент 5-метрики от 5-й координаты (*условие цилиндричности* по  $x^5$ ):

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^5} = 0. \quad (8.3.1)$$

- 4) Для того чтобы сохранялось условие цилиндричности по 5-й координате, допустимые преобразования по дополнительной координате должны быть сужены до

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (8.3.2)$$

где  $f(x^\mu)$  — функция лишь четырех классических координат.

- 5) Для устранения векторного поля  $\Phi_\alpha$  достаточно, кроме условия цилиндричности, потребовать постоянство 15-й компоненты метрического тензора, например, положить

$$G_{55} = -1. \quad (8.3.3)$$

- 6) Для того чтобы слагаемое в (8.2.20) справа, содержащее  $F_{\mu\nu}$ , превратилось в известную в электродинамике силу Лоренца, необходимо положить, что пятая компонента скорости пропорциональна отношению электрического заряда частицы  $q$  к ее массе  $m$ :

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m\sqrt{G}}. \quad (8.3.4)$$

В итоге получается теория, в которой

- а) осуществляются следующие отождествления:

$$A_\mu = \frac{c^2}{2\sqrt{G}}G_{5\mu}; \quad F_{\mu\nu} = \frac{c^2}{\sqrt{G}}\tilde{F}_{\mu\nu}; \quad (8.3.5)$$

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{5\mu}G_{5\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{4G}{c^4}A_\mu A_\nu; \quad (8.3.6)$$



- б) при наложенных условиях обобщенные связности (8.2.16) превращаются в обычные символы Кристоффеля:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (8.3.7)$$

а 4-мерные аналоги тензора кривизны совпадают с общепринятыми 4-мерными величинами;

- в) скалярная кривизна (8.2.25) превращается в стандартную плотность лагранжиана гравитационного и электромагнитного полей;
- г) дополнительное скалярное уравнение геодезической линии (8.2.19) превращается в условие постоянства отношения электрического заряда частицы к ее массе:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{q}{m} \right) = 0 \rightarrow \frac{q}{m} = \text{const}; \quad (8.3.8)$$

- д) поскольку векторный электромагнитный потенциал не является инвариантом относительно преобразований 5-й координаты (8.2.6) и (8.3.2), то при преобразованиях (8.3.2) он изменяется по закону

$$A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}, \quad (8.3.9)$$

представляющему собой известные калибровочные преобразования электромагнитного векторного потенциала в стандартной электродинамике.

Резюмируя изложенное, можно утверждать, что 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма Калуцы обладает рядом несомненных достоинств. В литературе их иногда называют «чудесами» теории Калуцы [146]. Можно выделить четыре основных «чуда».

- 1) *Пятнадцать 5-мерных уравнений Эйнштейна автоматически расщепляются на десять обычных 4-мерных уравнений Эйнштейна, четыре уравнения Максвелла и еще одно скалярное уравнение.*
- 2) *В получаемой таким образом системе 4-мерных уравнений Эйнштейна в правой части автоматически возникает тензор энергии-импульса электромагнитного поля.*
- 3) *Уравнения 5-мерной геодезической линии автоматически приводят к уравнениям движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени при наличии электромагнитного поля.*
- 4) *Известные в электродинамике калибровочные преобразования векторного электромагнитного потенциала следуют из допустимых преобразований 5-й координаты.*

### 8.3.2. Негеометрические заряженные поля в теории Калуцы

1. В теории Калуцы используется условие цилиндричности (независимости) метрики по 5-й координате, однако внешние к геометрии физические поля  $\Phi$  (произвольного спина) в общем случае зависят от 5-й координаты. Постулируется, что зависимость от  $x^5$  имеет место для электрически заряженных полей и носит *циклический характер*

$$\Phi = \varphi(x^\mu) \exp(i\alpha\varepsilon_5 x^5) \equiv \varphi(x^\mu) \exp\left(\frac{ie\varepsilon_5}{2\sqrt{G}\hbar} x^5\right), \quad (8.3.10)$$

где  $\varphi(x^\mu)$  — часть волновой функции, зависящая только от четырех классических координат,  $\varepsilon_5$  — целое число (гармоника), характеризующее заряд поля  $Q$  в единицах заряда электрона  $e$ :

$$\varepsilon_5 = Q. \quad (8.3.11)$$

Циклическую зависимость (8.3.10) следует понимать как замкнутость (периодичность) многообразия по 5-й координате с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{4\pi\sqrt{G}\hbar}{ec} = 4\pi \frac{l_o}{\sqrt{\gamma_o}} \approx 10^{-31} \text{ см}, \quad (8.3.12)$$

где выделены две характерные физические константы:

$$l_o = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}; \quad \gamma_o = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

— соответственно планковская длина и постоянная тонкой структуры. Это означает, что в 5-мерной теории используется топология цилиндра в духе работы А. Эйнштейна и П. Бергмана [196] 30-х годов.

2. При сделанных отождествлениях собственные значения оператора монадного дифференцирования по 5-й координате (8.2.13) определяют электрический заряд поля. Второй оператор монадного 4-мерного дифференцирования (8.2.15) означает

$$\partial_\mu^+ \Phi = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{2\sqrt{G}}{c^2} A_\mu \frac{\partial}{\partial x^5} \right) \Phi = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{ie\varepsilon_5}{c\hbar} A_\mu \right) \Phi, \quad (8.3.13)$$

т. е. совпадает с общепринятой «удлиненной» производной в стандартной электродинамике.

3. Легко убедиться, что при допустимых в теории Калуцы преобразованиях 5-й координаты (8.3.2) 5-мерные волновые функции  $\Phi$  из

(8.3.10) испытывают известные калибровочные изменения

$$\Phi \rightarrow \Phi \exp\left(\frac{ie}{c\hbar}f\right) \quad (8.3.14)$$

одновременно с преобразованием электромагнитного векторного потенциала (5.1.1), тогда как оператор (8.3.13) при этом остается инвариантным.

4. Для скалярного поля  $\Phi$  (негеометрического происхождения) следует постулировать 5-мерное уравнение типа Клейна—Фока в виде

$$G^{AB}\nabla_A\nabla_B\Phi \pm \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\Phi + a(^5R)\Phi = 0, \quad (8.3.15)$$

где  $a$  — постоянная;  $\mu$  — некая фиктивная масса. Возможны различные варианты теории при разных значениях  $a$  и  $\mu$ , в том числе равных нулю. Полагая скалярное поле заряженным, то есть зависящим от  $x^5$  согласно (8.3.10), и используя другие введенные выше формулы, после процедуры 4 + 1-расщепления монадным методом уравнение (8.3.15) можно представить в следующем калибровочно инвариантном виде:

$$g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu^+\tilde{\nabla}_\nu^+\Phi + \left(\frac{e^2c^2}{4G\hbar^2} \pm \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right)\Phi + a(^5R)\Phi = 0. \quad (8.3.16)$$

Из этой формулы видно, что электрически заряженные частицы автоматически приобретают массовый вклад порядка планковской массы. Возникает проблема перенормировки масс до наблюдаемых значений. Именно для этой цели в (8.3.15) введена фиктивная масса  $\mu$ , которая при выборе отрицательного знака может быть использована для перенормировки планковской массы, так что эффективная масса  $m$  определяется выражением

$$m = \sqrt{\frac{e^2}{4G} - \mu^2}. \quad (8.3.17)$$

Ниже будут рассмотрены иные способы перенормировки планковских масс.

### 8.3.3. Спинорное поле

1. Для описания спинорного поля в 5-мерной теории необходимо использовать пентадный формализм, когда 5-мерный метрический тензор представляется в виде

$$G_{AB} = G_A(C)G_B(C). \quad (8.3.18)$$

Здесь  $G_A(C)$  — компоненты 5 векторов пентады, среди которых вектор с индексом  $C = 5$  совпадает с введенным выше вектором монады ( $G_A(5) =$

$\lambda_A$ ). Векторы  $G_A(C)$  удовлетворяют условиям ортонормированности

$$G_A(B)G^A(C) = G(BC), \quad (8.3.19)$$

где  $G(BC)$  — метрический тензор плоского 5-мерного пространства с сигнатурой  $(+ - - - | -)$ .

2. Определим гиперплотность лагранжиана спинорного поля  $\Psi$  по аналогии с 4-мерной теорией (см. §7.2), в виде

$$\mathcal{L}_\Psi = \sqrt{{}^5G} \frac{c\hbar}{2} \left( i\bar{\Psi}\gamma^A\nabla_A\Psi - \frac{m_0c}{\hbar}\bar{\Psi}\Psi \right) + h.c., \quad (8.3.20)$$

где  $m_0$  — масса покоя 4-компонентного комплексного спинорного поля  $\Psi$ ;  ${}^5G$  — определитель 5-мерного метрического тензора;  $\nabla_A\Psi$  — 5-мерная ковариантная производная от спинора, имеющая вид

$$\nabla_A\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^A} - \frac{1}{4}\Delta_A(BC)\gamma(B)\gamma(C)\Psi. \quad (8.3.21)$$

Здесь  $\Delta_A(BC)$  — 5-мерные коэффициенты вращения Риччи, которые обычным образом выражаются через компоненты пентады  $G_A(B)$ .

3. В (8.3.20) и (8.3.21) входят 4-рядные  $\gamma$ -матрицы с двумя сортами индексов: универсальными ( $\gamma_A$ ) и локальными ( $\gamma(B)$ ). Матрицы  $\gamma_A$  зависят от координат и связаны с метрическим тензором соотношением

$$\gamma_A\gamma_B + \gamma_B\gamma_A = 2I_4G_{AB}. \quad (8.3.22)$$

Пять матриц  $\gamma(B)$  являются образующими алгебры Клиффорда  $C(1, 4)$ ; Они постоянны и соответствуют общепринятым матрицам Дирака, причем, напомним,  $\gamma(5) = \gamma(0)\gamma(1)\gamma(2)\gamma(3)$ . Матрицы с индексами двух сортов связаны соотношением

$$\gamma_A = G_A(B)\gamma(B); \quad \gamma(B) = G^A(B)\gamma_A. \quad (8.3.23)$$

4. Произведем процедуру 4 + 1-расщепления введенных выше величин и операторов. В рамках пентадного метода она фактически соответствует объединению четырех индексов в один 4-мерный универсальный. Без вывода приведем несколько соотношений:

$$\gamma^A \frac{\partial}{\partial x^A} = \tilde{\gamma}^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial x^5} \right) - \gamma_5 \frac{\partial}{\partial x^5}; \quad (8.3.24)$$

$$\Delta_A(BC)\gamma^A\gamma(B)\gamma(C) = \Delta(\alpha, \beta\nu)\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\gamma(\nu) - \frac{\sqrt{G}}{2c^2}F_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5, \quad (8.3.25)$$

где использованы обозначения:  $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^A g_A^\mu \equiv \gamma^\mu$ ;  $\gamma_5 = \gamma_A \lambda^A$ .

5. Для перехода от гиперплотности лагранжиана спинорного поля (8.3.20) к 4-мерной плотности лагранжиана необходимо выражение (8.3.20) проинтегрировать по 5-й координате по периоду зависимости от  $x^5$ . Практически это означает сохранение лишь тех выражений, которые не содержат экспонент с  $x^5$ . В итоге имеем

$$L_{\Psi} = \frac{i\hbar c}{2} \sqrt{-g} \left( \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu}^{+} \psi - (\partial_{\mu}^{+} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi + \frac{2im_0 c}{\hbar} \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta\nu} \bar{\psi} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^{\nu} \psi - 2i\alpha \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \frac{\sqrt{G}}{2c^2} F_{\alpha\beta} \bar{\psi} \gamma^{\alpha} \gamma^{\beta} \right). \quad (8.3.26)$$

Обратим внимание на два дополнительных слагаемых к 4-мерной плотности лагранжиана спинорного поля. Последнее слагаемое в (8.3.26) описывает дополнительное взаимодействие спинорного и электромагнитного полей через аномальный магнитный момент. Предпоследнее слагаемое означает вклад в массу спинорного поля, порядка планковской массы.

## 8.4. Теория Калуцы со скаляризмом

В рассмотренном упрощенном варианте 5-мерной теории использовано условие (8.3.3) (постоянства 15-й компоненты метрического тензора  $G_{55}$ ), которое приводит к проблеме 15-го (скалярного) уравнения Эйнштейна (8.2.29), принимающего в электровакууме вид

$${}^4R + \frac{3G}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (8.4.1)$$

Согласно этому уравнению, в, например, кулоновском поле должна быть отличной от нуля скалярная кривизна, что противоречит 4-мерным уравнениям Эйнштейна (8.2.27). Это противоречие предлагалось устранять в рамках лагранжевой формулировки многомерной теории, в которой накладывался ряд условий на компоненты многомерной метрики (в том числе (8.3.3)), затем производится редуцирование (проецирование) гиперплотности лагранжиана на 4-мерие, и только после этого используется вариационный метод, приводящий в случае 5-мерия лишь к системе из 14 уравнений, не содержащей (8.4.1). Этот путь будет использован в следующих главах при построении многомерных теорий с размерностью  $n > 5$ , где геометризуются также короткодействующие физические поля, однако в случае 5-мерия, где оба геометризуемых поля медленно убывают с расстоянием, есть достаточно оснований опираться на полную систему из 15 уравнений (8.2.27)–(8.2.29). Отметим, что в основополагающей работе Калуцы [75] условие (8.3.3) не накладывалось.

### 8.4.1. Скаляризм в электродинамике и его интерпретация

1. Введем специальное обозначение для скалярного поля геометрического происхождения

$$G_{55} = -\phi^2 \rightarrow \lambda_5 = -\phi; \quad \lambda^5 = \phi^{-1}; \quad \lambda_\mu = G_{5\mu}/\phi. \quad (8.4.2)$$

При наличии скалярного поля необходимо переопределить записанные выше формулы (8.3.4)–(8.3.6), интерпретирующие геометрические величины через физические

$$\lambda_\mu = \frac{2\sqrt{G}\phi}{c^2}A_\mu; \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{G}\phi}{c^2}F_{\mu\nu}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m_o\sqrt{G}\phi}; \quad (8.4.3)$$

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{G_{5\nu}G_{5\mu}}{\phi^2} = G_{\mu\nu} + \frac{4G\phi^2}{c^4}A_\mu A_\nu. \quad (8.4.4)$$

Кроме того, теперь появится напряженность скалярного поля, описываемая физико-геометрическим вектором

$$\Phi_\mu = \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (8.4.5)$$

В данном варианте 5-мерной теории Калуцы встает проблема физической интерпретации скалярного поля  $\phi$ . В работах большинства авторов она рассматривается как потенциал пока не обнаруженного скалярного поля геометрического происхождения. Теорию с таким полем предлагается назвать 5-мерием со *скаляризмом* по аналогии с термином «электромагнетизм». Ниже будет рассмотрен ряд возможных эффектов, обусловленных геометрическим скалярным полем.

2. Однако есть возможность более определенно физически проинтерпретировать поле  $\phi$ . Для этого рассмотрим дополнительное (пятое) уравнение геодезической (8.2.19) в общем варианте 5-мерной теории Калуцы, которое в упрощенном варианте теории означало постоянство отношения электрического заряда к массе частицы, что, на первый взгляд, представляется естественным. Однако это условие влечет за собой исключение возможности рассмотрения процессов поглощения или испускания электромагнитного излучения, например, заряженным ионом. Действительно, если ион излучил или поглотил электромагнитный квант, то у него изменилась энергия, а следовательно, и значение  $m$  при постоянстве электрического заряда, но это противоречит условию (8.3.8). Исходя из этого, в общем случае следует положить  $\Phi_\mu \neq 0$  и считать, что скалярное поле характеризует излучение.

3. К аналогичному выводу приводит анализ 4-мерных уравнений движения (8.2.20), которые теперь принимают вид

$$\frac{du^\mu}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta + \frac{q}{m_o c^2} F_{\nu}^\mu u^\nu - \frac{q^2}{4Gm_o^2 \phi^2} (\Phi^\mu - u^\mu u_\nu \Phi^\nu). \quad (8.4.6)$$

Как уже отмечалось, при  $G_{55} = -1$  эти уравнения совпадают с общепринятыми уравнениями движения заряженных частиц в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля. Но при этом не было учтено, что заряженные частицы могут излучать, и уравнения движения (1.3.13) должны быть дополнены справа слагаемым, описывающим тормозное излучение.

4. Напомним, что в электродинамике в плоском пространстве-времени сила радиационного трения записывается в виде (см., например, [31, с. 34; 94, с. 270]):

$$f^\mu = \frac{2q^2}{3c} \left( \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} - u^\mu u_\nu \frac{d^2 u^\nu}{ds^2} \right), \quad (8.4.7)$$

так что итоговые уравнения представляются в форме:

$$m_o c \frac{du^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\nu}^\mu u^\nu + \frac{2q^2}{3c} \left( \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} - u^\mu u_\nu \frac{d^2 u^\nu}{ds^2} \right). \quad (8.4.8)$$

Из сравнения (8.4.6) и (8.4.8) находим, что дополнительные слагаемые в обоих уравнениях пропорциональны квадрату заряда движущейся частицы. Кроме того, выражения в скобках справа имеют одинаковую структуру, что дает основания для отождествления

$$\frac{1}{\phi^2} \Phi^\mu = -\frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{1}{\phi^2} \right) = -\frac{8Gm_o}{3c} \frac{d^2 u^\mu}{ds^2}. \quad (8.4.9)$$

Поскольку физико-геометрический вектор  $\Phi^\mu$  описывает свойства обобщенной «системы отсчета», универсальной для всех заряженных частиц, он является одинаковым для всех заряженных частиц в любой выделенной точке. Соотношение (8.4.9) следует рассматривать как выражение аналога принципа эквивалентности, т. е. имеет тот же характер, что и свойство всех тел в одной и той же точке пространства-времени падать с одинаковым ускорением, определяемым физико-геометрическим вектором  $a_\mu$ . Напомним, что в 5-мерной теории, представленной в монадном виде, физико-геометрический вектор  $\Phi_\mu$  является непосредственным аналогом вектора ускорения системы отсчета в ОТО.

Очевидно, что для нейтральной частицы дополнительные слагаемые в (8.4.6) равны нулю, и она движется по геодезической линии. Исходя из изложенного, *векторное физико-геометрическое поле  $\Phi_\mu$  следует трактовать как поле излучения*, присутствующее наравне с тензором напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ .

5. Обратим внимание на тот факт, что в теории Калуцы со скаляризмом можно ввести «обобщенную динамическую массу покоя» частицы

$$\tilde{m}_o = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (d\lambda/ds)^2}}, \quad (8.4.10)$$

напоминающую определение динамической массы в 4-мерной теории относительности (3.5.3). Тогда, вводя обобщенный импульс  $\tilde{p}^\mu \equiv \tilde{m}_o u^\mu$ , уравнения (8.4.6) можно представить в виде

$$\frac{d\tilde{p}^\mu}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \tilde{p}^\beta + \frac{q}{m_o c^2} F_{\nu}^\mu \tilde{p}^\nu - \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 \tilde{m}_o \Phi^\mu. \quad (8.4.11)$$

6. При повторном выделении уже координаты  $x^o$  для описания системы отсчета в 4-мерной теории масса  $\tilde{m}_o$  будет играть роль затравочной массы  $m_o$  в 4-мерии, так что в определении результирующей динамической массы частицы будут содержаться два корня в знаменателе:

$$m = \frac{\tilde{m}_o}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - (dl/d\tau)^2} \sqrt{1 - (d\lambda/ds)^2}}, \quad (8.4.12)$$

откуда следует аналогия:

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{v}{c} \longleftrightarrow \frac{d\lambda}{ds} = \left| \frac{q}{2m_o \sqrt{G}} \right|. \quad (8.4.13)$$

Поскольку для разных частиц отношения электрического заряда к массе могут быть разными, то из (8.4.13) следуют сопоставления:

$$v \longleftrightarrow \frac{q}{m_o}; \quad c \longleftrightarrow 2\sqrt{G}, \quad (8.4.14)$$

т. е. в 5-мерной теории удвоенный квадратный корень от ньютоновой гравитационной постоянной играет роль скорости света в 4-мерии.

7. В самом общем случае в каждой точке 5-мерной теории имеют место два изотропных «конуса»: обычный в рамках 4-мерного пространственно-временного сечения и второй (двумерный) — в плоскости  $(s, x^5)$ . Как и в случае 4-мерной теории, в плоскости  $(s, x^5)$  можно говорить 1) о точках и линиях, лежащих внутри «конусов», как аналогах времени-подобных понятий, 2) о точках (и линиях), лежащих на изотропных линиях (на «конусе»), и 3) об аналогах пространственно-



подобных понятий. Поскольку классическая теория имеет дело с объектами с постоянным отношением электрического заряда к массе, то предметом рассмотрения в 2-мерной плоскости  $(s, x^5)$  являются прямые мировые линии, с углом наклона, характеризуемым этим отношением.

Очевидно, такое рассмотрение приводит к выделению области дозволённых значений отношения заряда к массе частиц  $1 - (d\lambda/ds)^2 > 0 \rightarrow q/m_0 < 2\sqrt{G\phi}$ . Классические тела, обладающие малыми электрическими зарядами и значительными массами, характеризуются мировыми линиями с малым углом наклона к оси  $s$ , т. е. линиями, лежащими во времени-подобной области. Непосредственная оценка показывает, что 5-мерные мировые линии известных видов элементарных частиц попадают в запрещённую, т. е. в пространственно-подобную область плоского «конуса». Этот факт свидетельствует лишь о неприменимости для микрочастиц рассуждений с обобщённой динамической массой. Все иные уравнения для них остаются в силе.

#### 8.4.2. Сферически-симметричные решения многомерных уравнений Эйнштейна

1. Независимо от физической интерпретации компоненты  $G_{55}$  рассмотрим цилиндрические по 5-й координате статические сферически-симметричные решения 5-мерных уравнений Эйнштейна. Простейшее из них получается из 4-мерной метрики Шварцшильда добавлением компонент  $G_{55} = -1$ ,  $G_{5\mu} = 0$ :

$$dI^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dx^{02} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - dx^{52}. \quad (8.4.15)$$

2. Более общее сферически-симметричное решение, нежели (8.4.15), — со скалярным полем — было найдено Д. Крамером в виде [86, 97]:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{A-B} dx^{02} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{-A-B} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{2B} dx^{52}, \quad (8.4.16)$$

где  $\tilde{r}_g$ ,  $A$  и  $B$  — константы. Последние две связаны соотношением

$$A^2 + 3B^2 = 1. \quad (8.4.17)$$

Ясно, что (8.4.16) переходит в метрику (8.4.15) при  $B = 0$ ,  $A = 1$ .

3. В связи с тем что в следующих главах рассматриваются также 6- и 7-мерные варианты геометрических теорий, приведем здесь аналогичные точные сферически-симметричные решения (в 3-мерном смысле) вакуумных уравнений Эйнштейна. Так, 6-мерное решение в сигнатуре  $(+ - - - | - -)$  было найдено А. В. Каменевым в виде [76]:

$$d\Sigma^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{A-B} dx^{o2} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{-A-B} dr^2 - \\ - r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \\ - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{B+C} dx^{52} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{B-C} dx^{62}, \quad (8.4.18)$$

где три константы  $A, B, C$  связаны соотношением

$$A^2 + 2B^2 + C^2 = 1. \quad (8.4.19)$$

Очевидно, что при  $B = C$  метрика (8.4.18) переходит в тривиальное 6-мерное обобщение метрики Шварцшильда.

4. Для 7-мерной геометрии с сигнатурой  $(+ - - - | - - -)$  аналогом решений (8.4.16) и (8.4.18) является метрика

$$d\Xi^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{A-B} dx^{o2} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{-A-B} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{1-A-B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \\ - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{2B/3+C+D/3} dx^{52} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{2B/3-C+D/3} dx^{62} - \\ - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{2B/3-2D/3} dx^{72}, \quad (8.4.20)$$

где четыре константы  $A, B, C, D$  связаны соотношением

$$A^2 + C^2 + \frac{5}{3}B^2 + \frac{1}{3}D^2 = 1. \quad (8.4.21)$$

При  $D = B$  метрика (8.4.20) переходит в тривиальное 7-мерное обобщение метрики (8.4.15).

Особо подчеркнем, что во всех записанных выше решениях постулировалась сферическая симметрия в 3-мерном смысле. Если понимать сферическую симметрию в максимально общем виде (8.1.3), то приходим к метрике Тангерлини (8.1.2).

5. Характерным свойством выписанных 5-мерных метрик является отсутствие в них слагаемых, описывающих электромагнитное поле. Решения со сферически симметричным электромагнитным полем кулоновского типа можно получить из выписанных метрик при помощи преобразований координат, более общих, чем разрешенные в (8.3.2). Эти преобразования выводят за пределы обобщенной «системы отсчета» и в данном случае означают изменение физической ситуации в виде появления электрического поля.

Произведем линейные преобразования с участием 5-й координаты:

$$x^o = L_o^o x'^o + L_5^o x'^5; \quad x^5 = L_o^5 x'^o + L_5^5 x'^5; \quad x^i = x'^i, \quad (8.4.22)$$

где  $L_B^A$  — постоянные коэффициенты преобразований. При наложении асимптотических условий, чтобы при  $r \rightarrow \infty$  метрика стремилась к виду (8.4.15), получается сферически-симметричная 4-мерная метрика

$$ds^2 = \frac{1 - r_g/r}{(1 + L_5^{o2} r_g/r)^2} dx^{o2} - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r)(1 + L_5^{o2} r_g/r)} - \frac{r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{1 + L_5^{o2} r_g/r}, \quad (8.4.23)$$

отличающаяся от метрики Райсснера—Нордстрема (5.1.18).

Кроме того, при данном преобразовании координат возникает смешанная компонента 5-мерного метрического тензора  $G_{5o}$ , т. е. преобразования (8.4.22) порождают в центральном (ранее нейтральном) источнике электрический заряд  $q$ , равный массе источника, умноженной на величину, определяемую коэффициентами линейного преобразования. Кулоновское поле вокруг источника определяется выражением

$$F_{10} = \frac{M}{r^2} \frac{\sqrt{G} L_5^o L_5^5}{[1 + (r_g/r) L_5^{o2}]^2}. \quad (8.4.24)$$

Вместе с электрическим полем появляется напряженность скалярного поля

$$\Phi_r = -\frac{L_5^{o2}}{2(1 + L_5^{o2} r_g/r)} \frac{r_g}{r^2}. \quad (8.4.25)$$

Более общее решение можно получить аналогичным поворотом метрики (8.4.16). Подобным же образом можно генерировать и другие обобщения 4-метрик ОТО на случай присутствия электромагнитного и скалярного полей, например, можно построить аналоги метрик Керра—Ньюмена и других известных решений ОТО.

### 8.4.3. Скаляризм и конформный фактор

Учет геометрического скалярного поля сразу же вызывает следующую принципиальную проблему. Как правило, в теориях, где используются методы расщеплений (в частности, монадный метод), физическим смыслом наделяются величины, инвариантные при допустимых преобразованиях дополнительных координат (8.2.6) и ковариантные относительно 4-мерных преобразований (8.2.7). При использовании условия цилиндричности метрики по  $x^5$ , как уже указывалось, необходимо сузить выделенный класс преобразований 5-й координаты (8.2.6) до (8.3.2). Оказывается, это сужение класса преобразований вызывает расширение множества инвариантных при таких преобразованиях величин. Назовем величины, инвариантные при преобразованиях (8.3.2) и ковариантные относительно (8.2.7) *специально калибровочно инвариантными*. В частности, таковыми становится компонента  $G_{55}$ , а следовательно, и потенциал скалярного поля  $\lambda_5 = -\phi$ . Если теперь считать физически значимыми специально калибровочно инвариантные величины, то таковых становится много. Так, ими являются все величины, получаемые из калибровочно инвариантных умножением на произвольную функцию  $\mathcal{F}(\lambda_5)$ . В связи с этим возникает вопрос: какие конструкции из геометрических характеристик должны быть сопоставлены с физическими величинами, главным образом, с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$  и с тензором электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ ?

Рассмотрим конформное преобразование в 5-мерном многообразии. В соответствии с изложенным в гл. 4, два 5-мерных пространства с метрическими тензорами  $\tilde{G}_{MN}$  и  $G_{MN}$ , определенными на одном и том же многообразии точек, являются *конформно соответствующими*, если их метрики связаны соотношением

$$\tilde{G}_{MN} = \xi^2 G_{MN}, \quad (8.4.26)$$

где  $\xi^2(x)$  — конформный фактор — некоторая скалярная функция координат. Его выбор может быть осуществлен лишь на основе анализа электромагнитных величин и соотношений в этой теории, что нашло свое отражение в ряде вариантов 5-мерных теорий, развивавшихся разными авторами. Укажем несколько таких вариантов, оставивших заметный след в истории 5-мерия со скаляризмом.

1. Наиболее часто рассматривался вариант с  $\mathcal{F}(\lambda_5) = 1$ , т. е. случай, когда отождествляется с физической метрика  $g_{\mu\nu}$ , непосредственно получающаяся после процедуры 4 + 1-расщепления. Можно считать, что именно этот вариант 5-мерия был предложен в работе Калуцы [75]. В этом случае векторный потенциал и тензор электромагнитного по-

ля определяются согласно выше записанным формулам. Характерной чертой этого варианта является переменность гравитационной «постоянной» из-за множителя  $\lambda_5^2$  в (8.2.27) справа перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля. Это обстоятельство использовалось для реализации гипотезы Дирака [57] о возможности изменения фундаментальных физических констант.

2. Вариант  $\mathcal{F}(\lambda_5) = \lambda_5^{-1}$  использовался в работах Э. Шмутцера [189], П. Пижо [130] и других авторов. После перехода к новой переменной скалярного поля

$$\lambda_5 = \exp\left(\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\tilde{\phi}\right) \quad (8.4.27)$$

4-мерные уравнения Эйнштейна и 15-е уравнение в вакууме (электривакууме) принимают вид

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R = \\ = -\frac{2G}{c^4}\lambda_5^3\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) + \kappa\left(\tilde{\phi}_{,\mu}\tilde{\phi}_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\tilde{\phi}_{,\alpha}\tilde{\phi}_{,\beta}\right); \end{aligned} \quad (8.4.28)$$

$$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\tilde{\phi} + \frac{G}{c^4}\sqrt{\frac{3}{2\kappa}}\lambda_5^3F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0. \quad (8.4.29)$$

Во всех этих формулах подразумеваются значения  $\lambda_5$  до конформных преобразований.

Привлекательной чертой этого варианта 5-мерия со скаляризмом является отсутствие вторых производных в тензоре энергии-импульса скалярного поля  $\tilde{\phi}$  в (8.4.28), принимающем канонический вид.

3. Пусть  $\mathcal{F}(\lambda_5) = \lambda_5^2$ , тогда 5-мерные уравнения Эйнштейна (8.2.27)–(8.2.29) принимают вид

$$\begin{aligned} {}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4R = -\frac{2G}{c^4}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) + \\ + \frac{3}{\lambda_5}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\lambda_5 - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\lambda_5) - \frac{6}{\lambda_5^2}\lambda_{5,\mu}\lambda_{5,\nu} + \kappa T_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (8.4.30)$$

$$-\nabla_{\nu}F^{\nu\mu} - 3F^{\mu\nu}\frac{\lambda_{5,\nu}}{\lambda_5} = \frac{c^2\kappa}{\sqrt{G}}\lambda_5^3Q_B^{\mu}\lambda^B; \quad (8.4.31)$$

$$g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\lambda_5 - \frac{1}{6}\left({}^4R + \frac{3G}{2c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\lambda_5 = -\frac{\kappa}{3}\lambda_5^3Q_{AB}\lambda^A\lambda^B. \quad (8.4.32)$$

Этот вариант 5-мерия со скаляризмом обладает рядом достоинств:

- 1) В этом варианте после конформного преобразования  $G_{55} = -1$ , как в упрощенном варианте теории Калуцы. Весь вклад от этой компоненты содержится в скалярном поле  $\lambda_5$ , тогда как в предыдущем варианте он проявлялся в двух местах: в конформном факторе и в компоненте  $\lambda_5$  после конформного преобразования.
- 2) Скалярное уравнение (8.4.32) в вакууме при  $F_{\mu\nu} = 0$  представляет собой стандартное уравнение Клейна—Фока для безмассового скалярного поля  $\lambda_5$ .
- 3) Примечателен множитель  $-1/6$  перед скалярной кривизной в (8.4.32), обычно вводимый в стандартной теории из соображений конформной инвариантности 4-мерного уравнения безмассового поля (см. (5.1.12)).
- 4) Множитель перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля справа в (8.4.30) не содержит  $\lambda_5$ , т. е.  $G$  является истинной гравитационной постоянной.

Отличие тензора энергии-импульса скалярного поля в (8.4.30) от канонического не является недостатком теории. В ряде работ отмечалась неоднозначность в определении  $T_{\mu\nu}$  скалярного поля, допускалась возможность введения в него вторых производных.

#### 8.4.4. Эффекты скаляризма в 5-мерной теории

1. Будем исходить из метрики (8.4.16), представленной в варианте (3):

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{2B} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{A-3B} dx^{02} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{-A-3B} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r}\right)^{1-A-3B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx^{52} \right\}. \quad (8.4.33)$$

Для удобства сопоставления с метрикой Шварцшильда желательно записать 4-мерную часть метрики, полученную процедурой 4+1-расщепления из (8.4.33), в координатах кривизн, т. е. когда  $g_{22} = -r^2$ . Однако это можно сделать лишь в неявном виде [97], поэтому запишем 4-метрику в координатах кривизн приближенно. Переобозначим константы

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{2B}{A-B} \rightarrow \tilde{r}_g = r_g \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}; \\ A &= \frac{\tilde{\alpha} + 2}{2\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}}; \quad B = \frac{\tilde{\alpha}}{2\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}} \end{aligned} \quad (8.4.34)$$

и преобразуем  $r$  согласно формуле

$$r'^2 = r^2 \left( 1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{1-A-3B}. \quad (8.4.35)$$

Очевидно, это преобразование входит в класс дозволённых преобразований (8.2.7). Легко видеть, что при  $\tilde{\alpha} = 0$  метрика (8.4.33) переходит в (8.4.15).

Представим компоненты метрики в виде рядов по  $r_g/r$ . После несложных вычислений находим

$$ds^2 \simeq \left[ 1 - (1 - \tilde{\alpha}) \frac{r_g}{r} \right] dx^{02} - \left[ 1 + (1 + 2\tilde{\alpha}) \frac{r_g}{r} \right] dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (8.4.36)$$

$$\lambda_5^2 \equiv \phi^2 \simeq 1 - \tilde{\alpha} \frac{r_g}{r} - \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)}{2} \left( \frac{r_g}{r} \right)^2. \quad (8.4.37)$$

В любой интерпретации скаляризма  $\lambda_5$  описывает распределённое вокруг источника безмассовое скалярное поле. При этом константа  $\tilde{\alpha}$  (точнее,  $\tilde{\alpha}r_g$ ) характеризует скалярный заряд источника.

2. В ряде работ обсуждались возможные эффекты в 5-мерной теории с переменной компонентой  $G_{55}$ , понимаемой как потенциал пока неоткрытого скалярного поля геометрического происхождения (см. [29, 32]). Прежде всего обращалось внимание на поправки к классическим эффектам ОТО. Они находятся из уравнений геодезических линий в 5-мерной метрике (8.4.33) (или в приближенной метрике (8.4.36) со скалярным полем (8.4.37)). Вычисления, аналогичные проделанным в метрике Шварцшильда, дают для смещения перигелия (Меркурия) значение

$$\delta\varphi = (1 + 2\tilde{\alpha})\delta\varphi_o, \quad (8.4.38)$$

где  $\delta\varphi_o$  — угловое смещение перигелия в ОТО. Аналогично находится поправка к известному общерелятивистскому эффекту отклонения лучей света, проходящих вблизи Солнца,

$$\delta\beta = \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{2} \right) \delta\beta_o, \quad (8.4.39)$$

где  $\delta\beta_o$  — угол отклонения света в ОТО.

Ставился вопрос об обнаружении этих поправок или, по крайней мере, об оценках неизвестной константы  $\tilde{\alpha}$ . Из формул (8.4.38) и (8.4.39) следует, что при достаточно малых значениях параметра  $\tilde{\alpha}$  различия между классическими эффектами в ОТО и в 5-мерной теории могут быть неощутимыми.

3. Значительно более ощутимые эффекты скаляризма можно ожидать, используя 5-е уравнение геодезической (8.2.19) при условии цилиндричности метрики по 5-й координате (когда  $D_{\mu\nu} = 0$ ). Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \frac{(d\lambda/ds)^2}{1 - (d\lambda/ds)^2} \right| = -2 \frac{d}{ds} \ln \lambda_5, \quad (8.4.40)$$

где пока не использован конкретный вид  $\lambda_5$ . Интегрируя это уравнение, в общем случае находим

$$\left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 = \frac{q^2}{4Gm^2} = \frac{W_o^2}{\lambda_5^2 + W_o^2(1 - \lambda_5^2)}, \quad (8.4.41)$$

где  $W_o^2$  — постоянная интегрирования. Таким образом, как уже отмечалось, отношение электрического заряда  $q$  к массе  $m$  частицы в 5-мерной теории со скаляризмом становится переменной величиной и определяется скалярным полем  $\lambda_5$ .

Подставляя в (8.4.41) приближенное решение для  $\lambda_5$  из (8.4.37), получаем

$$\left( \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \simeq W_o^2 \left[ 1 + \frac{r_g \tilde{\alpha}}{r} \right], \quad (8.4.42)$$

где положено  $W_o = q_o/m_o$ .

4. Из (8.4.42) следует, что отношение  $q/m$ , измеренное на Земле, должно изменяться с высотой из-за влияния скалярного заряда Земли. Кроме того, это отношение должно зависеть от расстояния Земли от Солнца (из-за влияния скалярного заряда Солнца). Учитывая, что орбита Земли — эллипс (максимальное расстояние в начале июля  $\sim 152$  млн км и минимальное расстояние в начале января  $\sim 147$  млн км), в теории со скаляризмом следовало бы ожидать сезонные изменения отношения  $q/m$  для измерений, проведенных на Земле. При этом наиболее выгодно производить измерения для частиц с максимально возможным значением  $q/m$ , т. е. для электронов ( $q/m \sim 10^{18}$ ). Из (8.4.42) видно, что значения вариаций зависят от отношения  $r_g/r$ , а также от значения параметра  $\tilde{\alpha}$ , который должен быть определен экспериментально.

5. Обсуждалась верхняя оценка значения  $\tilde{\alpha}$  при существующей точности экспериментальных измерений. Для решения данной задачи существенно, чтобы сопоставлялись результаты различных по физической природе экспериментов, в которых измеряются величины, зависящие от разных комбинаций заряда и массы. Теория допускает изменения как одной из них, так и вариацию обеих величин. В частности, обсуждались измерения джозефсоновской частоты  $2e/\hbar$  или определения величины



$\hbar/e^2$  на основе квантового эффекта Холла. В таких экспериментах даже при сезонном изменении эталонов можно надеяться получить результат за счет различного характера вариаций. Заметим, что величина эффекта также зависит от используемых в эталоне носителей заряда через их массу (различные отношения  $q/m$ ) в формуле (8.4.42). Вариации  $q/m$  могли бы также сказаться при регулярных изменениях постоянной Ридберга для оптических переходов в атомах.

Теоретический анализ имеющихся экспериментальных данных на предмет выделения данного эффекта затруднен тем, что в публикациях, как правило, отсутствуют указания на время года, когда были проведены соответствующие измерения. Тем не менее анализ ряда результатов измерений джозефсоновской частоты, привязанных ко времени года, обнаруживает тенденцию зависимости частоты от времени года, причем именно указанного здесь характера (см. [32, с. 80]).

6. Другое возможное проявление изменения  $q/m$  предлагалось связать с сезонной периодичностью частоты землетрясений, проявляющейся синхронно в обоих полушариях. Полагалось, что колебания отношения  $q/m$  влекут за собой колебания упругих сил в коре Земли, противодействующих силам гравитационного сжатия. Изменения давления могут послужить спусковым механизмом землетрясений.

7. Следует упомянуть, что большое число работ, выполненных по скалярно-тензорным теориям типа теорий Йордана—Бранса—Дикке (см., например, [152, с. 76–87], имеют своим истоком именно 5-мерие со скаляризмом. Как известно, в теории Йордана—Бранса—Дикке скалярное поле вводится феноменологически с помощью специальной дополнительной константы  $\omega$ . Ее значение предполагалось найти из эксперимента. На сегодняшний день проявления скалярного поля с такой интерпретацией не обнаружено. Лишь приведены верхние оценки для значения константы  $\omega$ .

В 5-мерной теории такой константы нет, однако в решениях, в частности в сферически-симметричных, появляется иная неизвестная константа, определяющая возможный скалярный заряд источника скалярного поля.

## 8.5. Вариант 5-мерной теории Клейна—Фока—Румера

В настоящее время принято называть 5-мерную теорию гравитации и электромагнетизма теорией Калуцы—Клейна, однако под этим названием кроются совершенно различные теории, преследующие разные цели. Как уже отмечалось, теория Калуцы нацелена на геометризацию

электромагнитных взаимодействий, тогда как теория Клейна [80], точнее, теория Клейна—Фока—Румера [141] предназначена для геометрического описания масс. Рассмотрим основные идеи второго варианта 5-мерной теории.

### 8.5.1. Общая теория относительности как 5-оптика

1. На стандартную ОТО можно взглянуть как на оптику в 5-мерном пространстве-времени. Для этого квадрат 4-мерного интервала следует представить в форме

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - ds^2 \equiv G_{AB} dx^A dx^B = 0, \quad (8.5.1)$$

где в качестве пятой координаты, которую теперь будем нумеровать индексом 4, выбран интервал

$$s \equiv x^4 \rightarrow ds = dx^4. \quad (8.5.2)$$

Эту дополнительную координату также следует считать пространственно-подобной, т. е. данное многообразие имеет сигнатуру  $(+ - - - | -)$  и компоненты 5-мерной метрики вида

$$G_{AB} = \left( \begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right). \quad (8.5.3)$$

2. Метрике 5-оптики (8.5.1) в импульсном пространстве соответствует выражение

$$m_o^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \rightarrow g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - (p^4)^2 \equiv G_{AB} p^A p^B = 0, \quad (8.5.4)$$

где в качестве дополнительной (пятой) компоненты импульса выступает масса покоя  $m_o$  частицы:

$$p^4 = m_o. \quad (8.5.5)$$

3. Оскар Клейн [80] и В. А. Фок [166, 167] в своих работах 1926 г. обратили внимание на то, что релятивистское обобщение уравнения Шрёдингера (уравнение Клейна—Фока) можно представить как оптическое уравнение, описывающее распространение скалярных безмассовых волн в 5-мерном пространстве-времени с метрикой (8.5.3)

$$G^{AB} \nabla_A \nabla_B \Phi = 0, \quad (8.5.6)$$

если постулировать, что 5-мерная волновая функция  $\Phi(x^A)$  циклическим образом зависит от дополнительной координаты  $x^4$

$$\Phi(x^A) = \varphi(x^\mu) \exp(i\beta x^4) \equiv \varphi(x^\mu) \exp\left(\frac{imc x^4}{\hbar}\right). \quad (8.5.7)$$

Здесь  $\varphi(x^\mu)$  — часть волновой функции, зависящая лишь от четырех классических координат. В самом деле, если в (8.5.6) подставить (8.5.7), то для функции  $\varphi(x^\mu)$  получается хорошо известное 4-мерное уравнение

$$\left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi(x^\mu) = 0. \quad (8.5.8)$$

4. Легко показать, что уравнения изотропных геодезических линий в 5-мерном многообразии

$$k^A \nabla_A k^B = 0, \quad (8.5.9)$$

где  $k^A$  — изотропный вектор ( $G_{AB} k^A k^B = 0$ ) с метрикой вида (8.5.3), сводятся к уравнениям неизотропных геодезических линий (1.3.7) в 4-мерном римановом пространстве-времени. Для этого нужно положить

$$k^A = \frac{dx^A}{ds}, \quad (8.5.10)$$

тогда из (8.5.9) при значениях индекса  $B = \mu$  получаем уравнения 4-мерных геодезических линий. Пятое уравнение геодезической линии при сделанных предположениях выполняется тождественно.

5. Легко также показать, что из 5-мерных уравнений Эйнштейна

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2} G_{AB} ({}^5R) = \varkappa T_{AB} \quad (8.5.11)$$

при значениях индексов  $A, B = 0, 1, 2, 3$  для метрики вида (8.5.3) получаются 4-мерные уравнения Эйнштейна.

6. Таким образом, действительно, стандартную 4-мерную ОТО можно переформулировать в 5-мерном виде, где движение частиц происходит по изотропным («световым») геодезическим линиям. В связи с этим следует вспомнить, что еще в конце XIX в. Ф. Клейн обнаружил, что в классической механике Ньютона «каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде» [141, с. 11]. Эта идея, высказанная в 90-х годах XIX в., оказалась преждевременной, была забыта и затем фактически переоткрыта в XX в. в работах О. Клейна и В. А. Фока.

### 8.5.2. 5-Мерная теория Клейна—Фока—Румера

1. На изложенную выше 5-мерную переформулировку ОТО можно смотреть как на формальный прием, однако О. Клейн, В. А. Фок,

а позже и Ю. Б. Румер увидели за этим нечто большее. Они исследовали 5-мерную теорию с более общим видом метрики, нежели в (8.5.3). О математическом содержании такой теории можно сказать практически все то же, что и о рассмотренной выше 5-мерной теории Калуцы. В частности, для ее построения следует использовать изложенный выше монадный метод 4 + 1-расщепления, когда 5-мерный метрический тензор представляется в виде

$$G_{AB} = g_{AB} - \xi_A \xi_B, \quad (8.5.12)$$

где  $\xi_A$  — 5-мерный вектор — монада, заменяющий вектор  $\lambda_A$  в теории Калуцы.

Как и ранее, будем использовать калибровку, аналогичную хронометрической в ОТО, т. е. вектор  $\xi$  направим вдоль линий координаты  $x^4$ . В такой теории сохраняют силу все предыдущие формулы этой главы, только вместо координаты  $x^5$  следует писать координату  $x^4$ . По-прежнему возникают три физико-геометрических тензора, которые будем отличать от прежних выражений индексом «4» в правом верхнем углу:  $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$ ,  $\Phi_{\mu}^{(4)}$ ,  $D_{\mu\nu}^{(4)}$ .

2. Далее необходимо конкретизировать зависимость компонент метрики от координаты  $x^4$ . Если не преследовать цель геометризации материи, то естественно наложить на 5-мерную метрику условие цилиндричности по дополнительной координате

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^4} = 0. \quad (8.5.13)$$

В упрощенном варианте теории (не претендующем на описание эффектов скаляризма) положим, что

$$G_{44} = -1. \quad (8.5.14)$$

Это означает, что два из монадных физико-геометрических тензоров, определенных выше, обращаются в нуль:

$$\Phi_{\mu}^{(4)} = 0; \quad D_{\mu\nu}^{(4)} = 0. \quad (8.5.15)$$

Отличным от нуля в общем случае может быть только тензор  $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$ , принимающий чисто роторный вид от  $\xi_{\mu}$ .

В такой теории скалярная кривизна  ${}^5R$  принимает следующий монадный вид

$${}^5R = {}^4R + \tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)} \tilde{F}^{(4)\mu\nu}. \quad (8.5.16)$$

3. В данном подходе возникает проблема физической интерпретации антисимметричного тензора  $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$ . Имеются две возможности:

- 1) Первая возможность состоит в допущении существования некоторого нового, пока неизвестного (гипотетического) векторного поля  $\xi_\mu$ , напряженность которого описывается тензором  $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$ . В этом случае основная задача теории состоит в предсказании новых возможных эффектов и следствий из существования нового поля.
- 2) Вторая возможность состоит в отождествлении векторного поля  $\xi_\mu$  через некоторый размерный коэффициент с уже известным полем. Поскольку в 20-х годах XX в. уже был известен вариант 5-мерной теории Калуцы, то О. Клейн, В. А. Фок и Ю. Б. Румер предложили отождествить данное геометрическое поле с электромагнитным полем.

4. Однако в такой теории сразу же возникла трудность из-за того, что, согласно исходному постулату этой теории, негеометрические поля циклически зависели от дополнительной координаты согласно формуле (8.5.7), где в экспоненту входит масса частицы, а не электрический заряд, как это постулируется в (8.3.10) в рамках 5-мерной теории Калуцы. Это приводит к появлению в «удлиненных» производных (8.3.13) не электрического заряда, а массы частиц. Чтобы избежать эту трудность, указанные авторы предложили ввести электрический заряд непосредственно в компоненты 5-мерной метрики

$$\tilde{G}_{\mu 4} = \frac{e}{mc^2} A_\mu; \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{e^2}{m^2 c^4} A_\mu A_\nu, \quad (8.5.17)$$

тогда «удлиненные» производные (8.2.16) совпадают с «удлиненными» производными в стандартной электродинамике.

Но такой прием означал отход от универсальности пространства-времени, т. е. отказ от важного принципа, лежащего в основе как ОТО, так и 5-мерной теории Калуцы. Вместо универсального пространства-времени вводилось *конфигурационное пространство*, в котором метрический тензор зависит от характеристик рассматриваемой частицы. При одном сорте частиц это допустимо, но в общем случае нет.

5. Отметим, что поскольку в 5-мерной теории Клейна—Фока—Румера дополнительная координата  $x^4$  имеет физический смысл *действия*, то восприятие скрытой размерности с такой физической интерпретацией оказывается менее болезненным, нежели признание неведомой принципиально новой координаты  $x^5$  в теории Калуцы.

Важно также иметь в виду, что исследования Румера данного варианта 5-мерной теории были нацелены не столько на описание электромагнетизма, сколько на геометризацию квантовой теории, что будет более подробно обсуждено в гл. 11.

### 8.5.3. Квантовая механика и геометрофизика

1. Обсудим физический смысл дополнительных (скрытых) размерностей в рамках редуцированной на 6-мерие многомерной геометрофизики. Оказывается, **скрытые размерности тесно связаны с закономерностями квантовой механики**. Чтобы это показать, еще раз подчеркнем главное отличие квантовой теории от классической. Квантовая теория имеет дело с элементарным звеном процесса, для которого существенны лишь характеристики возможных состояний микросистем и (амплитуды) вероятности переходов между ними. Строго говоря, обсуждение промежуточных стадий переходов между состояниями бессмысленно. Квантовую теорию можно строить на основе представлений о S-матрице, где нет эволюции иной, чем дискретный переход между двумя состояниями.

Классическая же теория описывает эволюцию макросистем и закономерности соотношений между огромными совокупностями осуществившихся процессов. Теория относительности в рамках 4 измерений является классической теорией. Квантовомеханические релятивистские (волновые) уравнения современной теории отражают стремление описать поведение микросистем в рамках привычных классических представлений, итогом которых является принцип дополнительности координатного и импульсного представлений.

2. Как продемонстрировано в этой части книги, *геометрофизика в рамках большего числа измерений, нежели 4, также нацелена на описания явлений микромира*, но это достигается на основе идеи о компактификации дополнительных размерностей. С позиций охарактеризованного отличия квантовой теории от классической суть компактификации в геометрофизике состоит в том, что для скрытых размерностей отсутствует понятие эволюции. Вместо записи волновых уравнений, из которых следовало бы искать зависимость от дополнительных координат, в теории постулируется экспоненциальная зависимость от них, т. е. волновое уравнение заменяется на уравнение стоячей волны (без динамики). Это наталкивает на мысль о связи скрытых размерностей с квантовомеханическими закономерностями.

3. Квантовомеханическая трактовка скрытых размерностей была предложена Ю. Б. Румером в его работах по 5-оптике [141]. Напомним, что он развивал клейновский вариант 5-мерной теории, где дополнительная координата  $x^4$  соответствует классическому действию. Румер предложил связать циклический (компактифицированный) характер зависимости от этой координаты с волновыми закономерностями в кван-

товой механике. Он писал: «Можно, однако, прийти к представлению о топологически замкнутом 5-мерном пространстве совершенно с «другого конца», независимо от попыток построения единой теории тяготения и электричества. Этот путь ведет к обнаружению возможности приписать пятой координате  $S$  физический смысл действия, ее периоду  $b$  — численную величину постоянной Планка  $\hbar$ , и приводит к глубокому синтезу геометрических идей, заложенных в ОТО, с идеями квантовой теории. Привычное в современной физике разделение на «макроскопику» и «микроскопику», связанное с величиной постоянной Планка  $\hbar$ , находит свое геометрическое отображение в понятиях «четырёхмерия» и «пятимерия»» [141, с. 8].

4. Характеризуя суть своего подхода, он писал: «Было бы, однако, неверным рассматривать пятимерную оптику только как один из вариантов единой теории поля; ее основное содержание заключается скорее в геометризации основных понятий квантовой физики, поскольку в ней квантование обнаруживается как проявление периодической зависимости всех физических полей от пятой координаты действия. Поскольку само «пятимерие» оказывается квантовым эффектом, становятся понятными неудачи всех предшествующих попыток построения пятимерных единых теорий поля на базе одних лишь классических представлений без существенного привлечения квантовых понятий» [141, с. 9].

Резюмируя результаты своих исследований по 5-оптике, Ю. Б. Румер, в частности, выделил следующие положения:

- «1) Пятая координата конфигурационного пространства получает отчетливый физический смысл действия. В отношении пятой координаты конфигурационное 5-пространство топологически замкнуто.
- 2) Вместо условия цилиндричности для метрических потенциалов и условия цикличности для волновых функций все физические величины удовлетворяют единому условию периодичности в 5-й координате действия.
- 3) Обнаруживается, что период пятой координаты имеет универсальную величину постоянной Планка, которая получает отчетливый геометрический смысл.
- 4) Квантование движения материальной точки есть проявление периодической зависимости физических величин от координаты действия.
- 5) Во всякой последовательной классической теории мы обязаны полагать  $\hbar \rightarrow 0$ , т. е. пренебрегать периодической зависимостью физических величин от координаты действия. Во всякой последо-

вательной квантовой теории мы обязаны учитывать периодическую зависимость физических величин от координаты действия. Поэтому, с точки зрения 5-оптики, является непоследовательным пренебрегать, как это делает современная квантовая механика, периодической зависимостью составляющих внешнего поля от координаты действия» [141, с. 150–151].

5. При развитии этой чрезвычайно интересной идеи Румер столкнулся с рядом трудностей, и данное исследование осталось незавершенным. Главная причина неудачи состояла в том, что Румер ограничился теорией 5 измерений, пытаясь решить сразу две задачи: геометрической интерпретации квантовой механики и геометризации электромагнитного взаимодействия, что, как было показано выше, диктует использование еще, как минимум, одной размерности, а для описания и других взаимодействий требуются еще две дополнительные (скрытые) размерности.

## 8.6. Анализ критических замечаний по 5-мерной теории

Следует констатировать, что, несмотря на свои достоинства, 5-мерная теория Калуцы не завоевала всеобщего признания и не стала рабочим инструментом физиков. Это было обусловлено рядом обстоятельств различного характера. Некоторые из них имели субъективный (мнимый) характер, часть обстоятельств была связана с наличием альтернативных вариантов построения геометрической теории, но, как стало ясно позже, главные недостатки 5-мерных теорий были обусловлены тем, что они оказались неполными, урезанными частями цельной 8-мерной геометрической теории. Перечислим высказывавшиеся претензии к 5-мерной теории Калуцы.

1. Долгое время не был ясен физический смысл 5-й координаты. Известно, сколько трудностей психологического характера было связано с признанием теории относительности, в которой был осуществлен переход от 3-мерного пространства к 4-мерному пространству-времени. Но там новая размерность была физически интерпретируема как время, а в 5-мерии новая размерность вводилась из «небытия». Многие теоретики, начиная с Э. Маха [101], мыслили дополнительную размерность обладающей теми же свойствами, что и четыре классические, и пытались к ним подобрать соответствующую физическую интерпретацию.

Последующие исследования показали, что дополнительная размерность должна быть компактифицирована, т. е. замкнута с очень малым периодом. Физическим смыслом обладает не 5-я координата, а 5-я ком-



понента импульса, через которую вводятся электрические заряды частиц.

2. Сомнения вызывало условие цилиндричности компонент 5-мерной метрики по 5-й координате. Эйнштейн писал: «Условие цилиндричности не является естественным даже формально» [195, с. 367]. «Среди соображений, которые заставляют усомниться в этой теории, на первом месте стоит следующее: вряд ли разумно заменять 4-мерный континуум на 5-мерный и затем искусственно налагать ограничение на одно из пяти измерений с тем, чтобы объяснить, почему оно не проявляет себя физически» [195, с. 347].

Как стало затем ясно, условие цилиндричности по 5-й координате означает отсутствие у рассматриваемых полей электрического заряда. Очевидно, что и гравитационное поле (метрика  $g_{\mu\nu}$ ), и электромагнитное поле (смешанные компоненты 5-мерной метрики) являются электрически нейтральными. Волновые функции заряженных частиц зависят от 5-й координаты, — пятая компонента импульса частиц имеет физический смысл электрического заряда, а 5-я компонента скорости характеризует отношение электрического заряда к массе.

3. В 20-х годах Эйнштейн считал существенным недостатком теории Калуцы необходимость волевым образом вводить в правую часть электромагнитных уравнений плотность электрического тока внешней материи. Однако претензии к наличию правой части у 5-мерных уравнений в равной степени относятся и к его 4-мерным уравнениям. Это общее свойство геометрических теорий рассматриваемой парадигмы. Впрочем, Эйнштейн не удовлетворял этот факт и в 4-мерной теории: везде, где это было возможно, он избегал написания тензора энергии-импульса в правой части своих уравнений.

4. Эйнштейн писал: «Не удастся физически истолковать компоненту  $G_{55}$ » [195, с. 367]. Этот вопрос был обсужден выше. Любой вариант его решения не может служить доводом против 5-мерной теории.

5. Наиболее сложную проблему в 5-мерии представило 15-е уравнение Эйнштейна, налагавшее жесткое условие связи 4-мерной скалярной кривизны с инвариантом электромагнитного поля. Ее решение зависит от интерпретации компоненты метрики  $G_{55}$ .

6. Констатировалось, что в теории получено лишь формальное единство ОТО и электромагнетизма Максвелла. Эйнштейн писал: «Цель Калуцы, несомненно, заключалась в том, чтобы прийти к новому физическому взгляду на гравитацию и электричество путем введения единой структуры пространства. Однако эта цель не была достигнута» [196, с. 497]. В частности, неоднократно отмечалось, что 5-мерная теория не

дала каких-либо новых экспериментальных предсказаний. Действительно, в упрощенном варианте теории Калуцы получалось лишь то, что было известно и без 5-мерной теории, однако в варианте теории со скаляризмом есть ряд новых предсказаний. Но самое главное достоинство 5-мерной теории состоит в том, что она позволяет достичь значительной экономии в исходных постулатах, приводящих к достаточно широкому кругу следствий, хотя и полученных ранее иным путем.

7. Некоторые сложности также психологического характера возникли в связи с появлением *проективного варианта* 5-мерной теории, представлявшего третью ветвь развития многомерных теорий. В проективной 5-мерной теории объявлялись эквивалентными (неразличимыми) все точки, координаты которых отличаются друг от друга общим множителем. Этот прием фактически означал понижение размерности теории на единицу и упрощал объяснение причин ненаблюдаемости дополнительной координаты. Проективный вариант 5-мерия развивался в работах О. Веблена, Б. Гофмана, В. Паули [126], Э. Шмутцера [189] и ряда других авторов<sup>1)</sup>. Неопределенность в выборе направления исследований 5-мерной теории была устранена В. Паули, показавшим эквивалентность проективного 5-мерия и теории Калуцы с условием цилиндричности по 5-й координате.

8. Принятию 5-мерной (многомерной) теории также препятствовали исследования альтернативных вариантов единых геометрических теорий, опирающихся на обобщения римановой геометрии в рамках 4-мерного пространства-времени. Среди них особое место занимала теория Вейля. Эйнштейн писал: «До сих пор были сделаны две наиболее простые и естественные попытки связать гравитацию и электромагнетизм с помощью единой теории поля: одна — Вейлем, другая Калуцей» [196, с. 492]. Долгое время Эйнштейну и другим исследователям не было ясно, какой из этих путей предпочесть. Главное достоинство 4-мерия связывалось с отсутствием проблемы осмысления сути дополнительной размерности.

Эта проблема со временем была решена в пользу теории Калуцы, поскольку теория Вейля столкнулась с рядом трудностей, которые пришлось устранять посредством введения дополнительных постулатов. Тем не менее в современной физике широко используются конформные преобразования (4.6.1), явившиеся важным элементом теории Вейля.

---

<sup>1)</sup> В первом издании «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица (1941 г.) сохранился параграф с изложением проективного варианта 5-мерной теории. Во всех последующих изданиях этой книги изъято даже упоминание о многомерных теориях.

9. Развиваемые с 30-х годов теории слабых и сильных взаимодействий позволили говорить о четырех видах фундаментальных взаимодействий. А поскольку 5-мерная теория связывала только два из них, это рассматривалось как ее существенный недостаток. В середине 70-х годов вера в многомерие стала угасать даже у такого стойкого приверженца, как Ю. Б. Румер, также не видевшего путей разрешения данной проблемы [142]. Только в 80-е годы, когда стало ясно, что слабые и сильные взаимодействия переносятся промежуточными векторными бозонами, была осознана применимость многомерных теорий для описания не только электромагнитного, но и других взаимодействий при еще большем увеличении размерности.

10. Кроме основной задачи многомерной теории — объединения физических взаимодействий — в 8-мерной теории решается целый комплекс оставшихся проблем 5-мерной теории, которые оказываются тесно связанными друг с другом. Так, в теории Калуцы при описании заряженных элементарных частиц возникают значения масс порядка планковской массы. Это ставит вопрос о геометрических способах перенормировки планковских масс до экспериментально известных значений.

11. В другом варианте 5-мерной теории, развивавшемся Клейном, Фоком и Румером, названная трудность теории Калуцы отсутствует. Однако вместо нее встают другие проблемы, связанные с вводом в смешанные компоненты метрики значений электрических зарядов частиц, нарушавших характер эйнштейновской геометрической теории: пространство-время принимало конфигурационный характер, т. е. становилось не универсальным, а зависело от сорта рассматриваемых частиц.


Объединения достоинств этих двух вариантов 5-мерия можно достичь, перейдя к теории шести измерений, в которой задачи каждого из них решаются с помощью отдельной размерности. Однако при этом возникают новые трудности, например, связанные с физической интерпретацией смешанных компонент метрики  $G_{4\mu}$ . В рамках 6-мерия не видно путей решения этой проблемы, которые открываются при последовательном уменьшении размерностей, исходя из 8-мерной теории.

12. Одним из препятствий на пути признания 5-мерия стала квантовая теория, интенсивно развивавшаяся в 20–30-х годах. Ощущалась естественная потребность перебросить мостик между квантовой теорией и 5-мерием. Как уже отмечалось, в работах В. А. Фока и О. Клейна на базе идей 5-мерия было впервые записано волновое (первично квантованное) уравнение Клейна—Фока, однако ожидалось значительно большее. Затем исследования в этом направлении были продолжены

Ю. Б. Румером, но оказалось, что решение этой задачи также требует дальнейшего увеличения размерности (см. гл. 11).

В связи с изложенным в этой главе уместно вспомнить слова Т. Калуцы: «Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них *степени формального единства*, — всего лишь капризная игра обманчивой случайности. Но если удастся показать, что за предполагаемыми взаимосвязями стоит нечто большее, нежели пустой формализм, то это будет новым триумфом *общей теории относительности Эйнштейна*, о логическом применении которой к случаю *пятимерного мира* здесь шла речь» [75, с. 534].

## 8-Мерная геометрическая теория грави-сильных взаимодействий



Опираясь на идеи 5-мерной объединенной теории гравитации и электромагнетизма, перейдем к рассмотрению более глобальной проблемы геометрофизики — к построению единой геометрической теории фундаментальных взаимодействий, включающей слабые (электрослабые) и сильные взаимодействия. Для этого необходимо еще более увеличить размерность пространственно-временного многообразия.

В наших работах [32–34, 37–39] использовался индуктивный метод исследования, т. е. последовательно изучались возможности геометрий 5, 6, 7 и 8 измерений для решения данной задачи. В частности, было показано, что для построения объединенной теории гравитационных и электрослабых взаимодействий следует использовать пространства 6 (упрощенный вариант [34]) или 7 измерений [37]. Затем было показано, что в рамках 8 измерений можно построить объединенную геометрическую теорию гравитационных и сильных взаимодействий [38]. При этом существенно использовался принцип соответствия с известными калибровочными моделями сильных и электрослабых взаимодействий, развитых в рамках иного (не геометрического) подхода.

Далее встал вопрос о путях объединения построенных теорий, в частности, нужно ли для этого продолжать наращивать размерности? В этой и следующей главах показано, что для решения этой программы **достаточно ограничиться восемью измерениями**. Это позволило перейти к дедуктивному (обратному) способу изложения геометрофизики — сначала построить общую 8-мерную геометрическую теорию, а затем от нее спускаться к специальным случаям, описывающим отдельные виды физических взаимодействий [40].

Таким образом, на основе 8-мерия формируется обобщенная геометрическая теория (геометрофизика), вобравшая в себя классическое пространство-время, все виды бозонных полей — переносчиков фундаментальных физических взаимодействий и понятия «внутренних пространств» из теории элементарных частиц. Фермионные поля, между которыми осуществляются взаимодействия, представляют собой

---

вторую (метафизическую) категорию, вкладываемую в 8-мерную геометрию.

В этой главе основное внимание сосредоточено на выделении из 8-мерной геометрии объединенной теории гравитационных и сильных взаимодействий, совмещающей в себе принципы эйнштейновской ОТО и калибровочной модели сильных взаимодействий — хромодинамики (в специальной калибровке).

## 9.1. Основания 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий

Перечислим основные понятия и методы, используемые в многомерной геометрической теории гравитационных и сильных взаимодействий.

1. Первый вопрос, возникающий при построении многомерной теории грави-сильных взаимодействий, — о необходимой для этой цели размерности. Его решение тесно связано с количеством векторных полей (глюонов) — переносчиков сильных взаимодействий и зарядов частиц (кварков), которые следует описать геометрическими средствами. Как известно, в калибровочной теории сильных взаимодействий (в хромодинамике) вводится 8 векторных полей глюонов. Если строго придерживаться опыта построения 5-мерной теории Калуцы, где одной дополнительной размерности соответствовало одно векторное поле (электромагнитное), то для создания теории грави-сильных взаимодействий следовало бы ввести 8 дополнительных размерностей, что с учетом 4 классических координат означало бы переход к 12-мерному многообразию.

К концу XX в. были преодолены психологические барьеры для использования дополнительных размерностей. В литературе обсуждались геометрические теории 24, 32 и большего числа измерений, однако анализ, опирающийся на изложенные ниже соображения, позволяет ограничиться значительно *меньшим числом размерностей*.

2. Согласно калибровочным моделям как сильных, так и электро-слабых взаимодействий, ряд промежуточных векторных полей является *заряженными* (хроматически или электрически). Это существенно изменяет характер многомерной теории по сравнению со случаем теории Калуцы, описывающей лишь *нейтральное* электромагнитное поле. Уже в рамках 5-мерной теории Калуцы было установлено, что заряженные поля должны зависеть от дополнительных координат, причем циклическим образом. Поскольку в развиваемой здесь модели исполь-

зуются метрический вариант описания физических полей (через дополнительные компоненты метрики), для компонент метрики необходимо отказаться от использования условия цилиндричности, заменив его на условие циклической зависимости от дополнительных координат. Это приводит к разложению дополнительных компонент метрики как бы в ряды по гармоникам циклической зависимости. Векторные коэффициенты такого разложения представляют собой дополнительные степени свободы, которые можно использовать для описания заряженных векторных полей, что позволяет существенно сократить число необходимых дополнительных размерностей.

3. Согласно сложившимся представлениям о сильных взаимодействиях, кварки  $q$  — элементарные составляющие адронов (сильно взаимодействующих частиц) — могут находиться в трех цветовых состояниях  $q_{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ . В геометрической теории для их описания предлагается использовать следующую зависимость волновых функций кварков от трех дополнительных координат калуцевского типа:

$$q_{(1)} \sim \exp(i\gamma x^5); \quad q_{(2)} \sim \exp(i\gamma x^6); \quad q_{(3)} \sim \exp(i\gamma x^7). \quad (9.1.1)$$

Из-за симметрии трех цветовых зарядов в этих выражениях использованы одинаковые параметры компактификации  $\gamma$  для всех трех измерений, вообще говоря, отличные от параметра компактификации  $\alpha$  в теории Калуцы. Данный постулат диктует использование, как минимум, многообразий 7 измерений, однако анализ показывает, что необходимо использовать еще одно измерение клейновского типа, ранее описывавшееся координатой  $x^4$ . В итоге приходим к **8-мерной геометрической модели, в которой проявляется симметрия по числу 4 внешних (классических) и внутренних (скрытых) размерностей**. Симметрия проявляется и в выделенности одного из измерений в каждой из этих четверок. В классических измерениях выделена времени-подобная размерность, а в скрытых — одна клейновская координата.

4. Как уже отмечалось, *физические векторные поля 8 видов глюонов вводятся как коэффициенты разложения 4-мерных компонент векторов  $G_\alpha(s)$ , соответствующих четырем дополнительным размерностям  $s = 4, 5, 6, 7$  по гармоникам зависимостей от скрытых координат*. Конкретный вид гармоник определяется характером глюонов — переносчиков взаимодействий. Два вида нейтральных глюонов не меняют цветовых зарядов кварков, т. е. не зависят от дополнительных координат, тогда как 6 видов заряженных глюонов описывают взаимодействия между кварками различных цветовых зарядов, что диктует следующие

виды зависимости их от дополнительных координат калуцевского типа:

$$G_\alpha(s) = C_o \{ a_s \tilde{A}_\alpha + b_s \tilde{B}_\alpha + x_s^+ X_\alpha^{(+)} \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + x_s^- X_\alpha^{(-)} \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + y_s^+ Y_\alpha^{(+)} \exp[-i\gamma(x^5 - x^7)] + y_s^- Y_\alpha^{(-)} \exp[i\gamma(x^5 - x^7)] + z_s^+ Z_\alpha^{(+)} \exp[-i\gamma(x^6 - x^7)] + z_s^- Z_\alpha^{(-)} \exp[i\gamma(x^6 - x^7)] \}, \quad (9.1.2)$$

где  $C_o$  — некая размерная константа,  $\tilde{A}_\alpha$  и  $\tilde{B}_\alpha$  — два нейтральных глюонных поля,  $X_\alpha^{(\pm)}$ ,  $Y_\alpha^{(\pm)}$  и  $Z_\alpha^{(\pm)}$  — шесть заряженных глюонных полей,  $a_s$ ,  $b_s$ ,  $x_s^\pm$ ,  $y_s^\pm$ ,  $z_s^\pm$  — безразмерные константы ( $s = 4, 5, 6, 7$ ), которые должны быть определены из тех или иных предположений. Ниже будут использованы условия соответствия бозонных секторов геометрофизики и хромодинамики. Всего здесь введены 33 константы.

5. Особо подчеркнем, что ниже будет использовано компактифицированное по 4 скрытым размерностям 8-мерное пространственно-временное многообразие с топологией 4-тора. На практике это означает использование следующей зависимости величин (полей) от координат

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp[i\beta x^4 + i\gamma(\varepsilon_5 x^5 + \varepsilon_6 x^6 + \varepsilon_7 x^7)], \quad (9.1.3)$$

где  $\psi(x^\mu)$  — слагаемая как геометрических, так и вводимых в геометрию извне величин, зависящая лишь от классических координат,  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры размерности  $[\text{см}^{-1}]$ , характеризующие периоды компактификации по дополнительным размерностям,  $\varepsilon_s$  — безразмерные параметры — гармоники зависимостей от дополнительных координат (здесь  $s = 5, 6, 7$ ). В общем случае  $\beta \neq \gamma$ .

6. В согласии с характером дуалистической метафизической парадигмы, в рамках которой строится как ОТО, так и теория Калуцы, в качестве ключевого (базового) выражения единой геометрической теории выбирается **8-мерная гиперплотность лагранжиана**, слагающаяся из геометрической части (скалярной кривизны) и внешней к геометрии спинорной материи

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{\pm G^{(8)}} \left[ -\frac{8R}{2\kappa c} + \frac{i\hbar c}{2} (\bar{\Psi} \Gamma^M \nabla_M \Psi + (\nabla_M \bar{\Psi}) \Gamma^M \Psi) \right], \quad (9.1.4)$$

где  $G^{(8)}$  — определитель матрицы из компонент 8-мерного метрического тензора  $G_{MN}$  ( $M, N = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) в одной из двух возможных сигнатур (+ - - - | - - - -),  $8R$  — 8-мерная скалярная кривизна;  $\Psi$  — многокомпонентный спинор;  $\nabla_M \Psi$  — 8-мерная ковариантная производная от спинора того же вида, что и в ОТО (7.3.9);  $\Gamma_M$  — квадратные многокомпонентные матрицы, обобщающие 4-рядные матрицы Дирака.



7. Как уже отмечалось, при общепринятом описании спиноров в рамках алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел имеется жесткая связь между размерностью, сигнатурой многообразия и числом компонент спиноров. Для размерности 8 следует использовать *16-компонентные спиноры*:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \\ \Psi(3) \\ \Psi(4) \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma(0) = (\bar{\Psi}(4), \bar{\Psi}(3), \bar{\Psi}(2), \bar{\Psi}(1)), \quad (9.1.5)$$

где  $\Psi(s)$  и  $\bar{\Psi}(s) = \Psi^\dagger(s)\gamma(0)$  — 4-компонентные комплексные спиноры ( $s = 1, 2, 3, 4$ ). Отсюда следует, что матрицы  $\Gamma_M$  в (9.1.4) являются квадратными  $16 \times 16$ -матрицами, связанными с 8-мерным метрическим тензором соотношением

$$\Gamma_M \Gamma_N + \Gamma_N \Gamma_M = 2I_{16} G_{MN}. \quad (9.1.6)$$

8. Как и в предыдущих многомерных геометрических моделях физических взаимодействий, предлагается использовать обобщения монадного метода редуцирования на 4-мерие. В данном случае это будет усеченный октадный метод, в котором отдельно выделены 4 скрытые размерности, тогда как 4 классические размерности рассматриваются слитно. По аналогии с ранее использовавшимся в 4-мерии диадным методом  $1+1+2$ -расщепления данный метод  $4+1+1+1+1$ -расщепления будем называть *тетрадным методом в 8-мерии*.

9. Окончательное выражение для плотности 4-мерного лагранжиана единой геометрической теории получается из 8-мерной гиперплотности (9.1.4) посредством *усреднения по малым периодам зависимостей от дополнительных координат*, т. е. посредством интегрирования по периодам циклических зависимостей. После такого интегрирования все экспоненциальные слагаемые, содержащие дополнительные координаты, сокращаются и получается выражение, зависящее лишь от четырех классических координат<sup>1)</sup>.

10. Отдельно следует выделить вопрос описания масс покоя бозонных и фермионных полей в 8-мерной теории. Здесь, как и в теории Калуцы, возникает проблема перенормировки планковских масс. Предложено

---

<sup>1)</sup>Следует отметить, что получающаяся в итоге плотность 4-мерной функции Лагранжа отличается от общепринятой постоянным размерным коэффициентом (из-за интегрирования по периодам скрытых размерностей), однако это несущественно ввиду известной неоднозначности в определении функции Лагранжа.

решение этой задачи посредством использования *процедуры конформного преобразования исходной 8-мерной метрики*.

## 9.2. Геометрический прообраз грави-сильных взаимодействий

Систематически изложим основные положения 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий, представляющей собой базис единой геометрической теории фундаментальных физических взаимодействий.

### 9.2.1. Тетрадный метод в 8-мерной теории

Опираясь на ранее изложенный материал по монадному и диадному методам редукции, приведем самые необходимые сведения о тетрадном методе  $4 + 1 + 1 + 1 + 1$ -расщепления. Будем следовать прежней схеме изложения: алгебра, физико-геометрические тензоры, операторы дифференцирования. . .

#### 1. Алгебра геометрической 8-мерной теории

1. Для описания фермионной материи в 8-мерной геометрической теории необходимо использовать октадный метод, соответствующий тетрадному методу в ОТО, однако для описания бозонной части теории достаточно использовать усеченный октадный метод, в котором выделены четыре вектора (тетрада), соответствующие дополнительным измерениям. В такой теории 8-мерный метрический тензор можно представить в следующих видах:

$$\begin{aligned} {}^8G_{MN} &= G_M(A)G_N(A) \equiv g_{MN} + b_{MN} = g_{MN} + G_M(s)G_N(s) \equiv \\ &\equiv g_{MN} \mp \xi_M\xi_N - \lambda_M\lambda_N - \eta_M\eta_N - \omega_M\omega_N, \quad (9.2.1) \end{aligned}$$

где введены унифицированные обозначения для векторов октады, в том числе для тетрады дополнительных векторов:

$$\begin{aligned} G_M(4) &= \xi_M, \quad G_M(5) = \lambda_M, \quad G_M(6) = \eta_M, \\ G_M(7) &= \omega_M; \quad b_{MN} = G_M(s)G_N(s). \end{aligned}$$

Здесь внутренний индекс  $s$  пробегает четыре значения: 4, 5, 6, 7. Как и ранее, будем полагать, что векторы октады ортонормированы, причем вектор  $G_M(4)$  может быть как времени-, так и пространственно-подобным, а остальные три вектора — пространственно-подобны.

2. Для перехода к физической теории необходимо должным образом распорядиться значениями компонент тетрады:

$$G_M(s) = \begin{pmatrix} \frac{G_\alpha(4)}{G_4(4)} & \frac{G_\alpha(5)}{G_4(5)} & \frac{G_\alpha(6)}{G_4(6)} & \frac{G_\alpha(7)}{G_4(7)} \\ G_5(4) & G_5(5) & G_5(6) & G_5(7) \\ G_6(4) & G_6(5) & G_6(6) & G_6(7) \\ G_7(4) & G_7(5) & G_7(6) & G_7(7) \end{pmatrix}. \quad (9.2.2)$$

Здесь отделенные чертой верхние компоненты 8-мерных векторов с классическими индексами  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  будут определять 4-мерные векторные поля переносчиков известных видов физических взаимодействий, а нижние компоненты в геометрической теории дуалистической парадигмы ОТО будут полагаться постоянными. Они будут участвовать в определении зарядов элементарных частиц.

3. Будем использовать калибровку типа четырежды «хронометрической», когда компоненты векторов тетрады следующим образом связаны с компонентами 8-мерного метрического тензора:

$$\begin{aligned} G^M(4) &= \frac{G_4^M}{\sqrt{\mp G_{44}}}; & G^M(7) &= \frac{\hat{G}_7^M}{\sqrt{-\hat{G}_{77}}}; \\ G^M(6) &= \frac{\tilde{G}_6^M}{\sqrt{-\tilde{G}_{66}}}; & G^M(5) &= \frac{\tilde{\tilde{G}}_5^M}{\sqrt{-\tilde{\tilde{G}}_{55}}}, \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{G}_{MN} &= {}^8G_{MN} \pm G_M(4)G_N(4); & \tilde{G}_{MN} &= \hat{G}_{MN} + G_M(7)G_N(7); \\ \tilde{\tilde{G}}_{MN} &= \tilde{G}_{MN} + G_M(6)G_N(6). \end{aligned}$$

В данной калибровке компоненты составляющих метрического тензора имеют довольно громоздкий вид и зависят от принятого порядка выделения размерностей.

4. Поскольку компоненты 8-мерной тетрады  $G_a(s)$  характеризуют заряды частиц, которые будем считать постоянными, то естественно принять постулат

$$G_{ab} = \text{const} \leftrightarrow G_a(b) = \text{const} \quad \text{при } a, b = 4, 5, 6, 7. \quad (9.2.4)$$

Воспользуемся произволом в преобразованиях дополнительных (скрытых) координат, имеющимся в данной калибровке, и приведем компоненты тетрады с дополнительными компонентами  $G_a(b)$  к диагональному виду  $G_a(b) = \text{diag}(G_4(4), G_5(5), G_6(6), G_7(7))$ , тогда компоненты тетрады

существенно упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} G^M(4) &= \frac{G_4^M}{\sqrt{\mp G_{44}}}; & G^M(5) &= \frac{G_5^M}{\sqrt{-G_{55}}}; \\ G^M(6) &= \frac{G_6^M}{\sqrt{-G_{66}}}; & G^M(7) &= \frac{G_7^M}{\sqrt{-G_{77}}}. \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Для ковариантных компонент имеем

$$G_A(B) = \left( \begin{array}{c|c} G_\alpha(\mu) & G_\alpha(b) \\ \hline G_a(\mu) = 0 & G_a(b) = \text{diag} \end{array} \right),$$

где

$$\begin{aligned} G_\alpha(4) &= \mp \frac{G_{4\alpha}}{\sqrt{\mp G_{44}}}; & G_\alpha(5) &= -\frac{G_{5\alpha}}{\sqrt{-G_{55}}}; \\ G_\alpha(6) &= -\frac{G_{6\alpha}}{\sqrt{-G_{66}}}; & G_\alpha(7) &= -\frac{G_{7\alpha}}{\sqrt{-G_{77}}}. \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Компоненты 4-мерного метрического тензора  $g_{MN}$  в данной калибровке, как и в случае хронометрической калибровки монадного метода или хронохориометрической калибровки диадного метода, автоматически имеют отличные от нуля лишь компоненты с классическими 4-мерными индексами  $g_{\mu\nu}$ , т. е.

$$\begin{aligned} g_{MN} = G_M(\beta)G_N(\beta) = G_{MN} - G_M(s)G_N(s) &\Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right); \\ g_\alpha^s &= \sum_\beta G^s(\beta)G_\alpha(\beta). \end{aligned} \quad (9.2.7)$$

Для данной теории наиболее существенно то, что остаются допустимые преобразования классических 4-мерных координат, присущие ОТО.

## 2. Физико-геометрические тензоры

В усеченном октадном (тетрадном) методе из составляющих метрического тензора и их первых производных в самом общем случае строятся 54 четырехмерных физико-геометрических тензора. Для удобства введем объекты неголономности для векторов дополнительной тетрады

$$C_{PQ}(a) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G_P(a)}{\partial x^Q} - \frac{\partial G_Q(a)}{\partial x^P} \right), \quad (9.2.8)$$

через которые определяются 4 антисимметричных тензора, соответствующие тензорам напряженностей векторных бозонных полей (или

тензору угловой скорости вращения в монадном методе):

$$F_{MN}^{(a)} = g_M^P g_N^Q C_{PQ}(a), \quad (9.2.9)$$

16 векторных полей, соответствующих векторам ускорения в монадном методе:

$$\Phi_N^{(ab)} = 2g_N^P G^Q(a) C_{PQ}(b), \quad (9.2.10)$$

и 24 скаляра:

$$\Omega^{(abc)} = G^P(a) G^Q(b) C_{PQ}(c) = -\Omega^{(bac)}. \quad (9.2.11)$$

Кроме того, имеются четыре 4-мерных симметричных тензора, соответствующие тензору скоростей-деформаций в монадном методе:

$$D_{MN}^{(a)} = \frac{1}{2} g_M^P g_N^Q (\nabla_P G_Q(a) + \nabla_Q G_P(a)) \quad (9.2.12)$$

и шесть векторов:

$$\Lambda_N^{(ab)} = \frac{1}{2} g_{NP} \left( G^Q(a) \frac{\partial G^P(b)}{\partial x^Q} - G^Q(b) \frac{\partial G^P(a)}{\partial x^Q} \right). \quad (9.2.13)$$

Выпишем несколько соотношений между введенными физико-геометрическими тензорами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_N^Q G^P(a) (\nabla_P G_Q(b) + \nabla_Q G_P(b)) &= \frac{1}{2} \Phi_N^{(ba)} + \Lambda_N^{(ab)}; \\ G^Q(a) G^P(c) (\nabla_P G_Q(b) + \nabla_Q G_P(b)) &= \Omega^{(bca)} + \Omega^{(acb)}; \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

$$C_{MN}(a) = F_{MN}^{(a)} + \frac{1}{2} \left( G_N(b) \Phi_M^{(ba)} - G_M(b) \Phi_N^{(ba)} \right) + G_M(b) G_N(c) \Omega^{(bca)}.$$

В использованной четырежды «хронометрической» калибровке при наличии условий (9.2.4) обращаются в нуль 34 физико-геометрических тензора:

$$\Lambda_N^{(ab)} = 0; \quad D_{MN}^{(a)} = 0; \quad \Omega^{(abc)} = 0. \quad (9.2.15)$$

Из оставшихся 20 физико-геометрических тензоров 4 соответствуют нелинейным тензорам напряженности (с неабелевыми «хвостами») бозонных полей в калибровочных теориях как сильных, так и электрослабых взаимодействий:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^{(s)} &= \frac{1}{2} \{ [G_\alpha(s),_\beta - G_\beta(s),_\alpha] + G^5(5) [G_\beta(5) G_\alpha(s),_5 - G_\alpha(5) G_\beta(s),_5] + \\ &+ G^6(6) [G_\beta(6) G_\alpha(s),_6 - G_\alpha(6) G_\beta(s),_6] + \\ &+ G^7(7) [G_\beta(7) G_\alpha(s),_7 - G_\alpha(7) G_\beta(s),_7] \}, \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

а 16 тензоров принимают более простой вид

$$\Phi_{\alpha}^{(ab)} = G^Q(a) \frac{\partial G_{\alpha}(a)}{\partial x^a}. \quad (9.2.17)$$

Эти физико-геометрические тензоры описывают массовые слагаемые векторных полей.

Заметим, что во всех этих выражениях нет слагаемых с дифференцированием по  $x^4$ , поскольку ниже будет использоваться условие цилиндричности векторных полей по этой координате.

### 3. Операторы дифференцирования

В рассматриваемой теории ключевую роль играют пять «тетрадных» операторов дифференцирования. В качестве таковых можно взять следующие операторы:

$$\partial_4^* = G^M(4) \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow G^4(4) \frac{\partial}{\partial x^4}; \quad (9.2.18)$$

$$\partial_5^* = G^M(5) \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow G^5(5) \frac{\partial}{\partial x^5}; \quad (9.2.19)$$

$$\partial_6^* = G^M(6) \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow G^6(6) \frac{\partial}{\partial x^6}; \quad (9.2.20)$$

$$\partial_7^* = G^M(7) \frac{\partial}{\partial x^M} \Rightarrow G^7(7) \frac{\partial}{\partial x^7}; \quad (9.2.21)$$

$$\partial_{\mu}^* = g_{\mu}^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \pm G_{\mu}(4)\partial_4^* + G_{\mu}(5)\partial_5^* + G_{\mu}(6)\partial_6^* + G_{\mu}(7)\partial_7^*. \quad (9.2.22)$$

Действие всех этих операторов не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемых величин.

## 9.2.2. Геометрическая часть гиперплотности лагранжиана

Чтобы расписать 8-мерную скалярную кривизну  ${}^8R$ , входящую в гиперплотность лагранжиана (9.1.4), представим 8-мерные символы Кристоффеля в самом общем тетрадном виде:

$$\begin{aligned} {}^8\Gamma_{MN}^P = & {}^4\Gamma_{MN}^P + \frac{1}{2}G^P(a)(G_M(a),_N + G_N(a),_M) + \\ & + (G_M(a)F_{,N}^{(a)P} + G_N(a)F_{,M}^{(a)P}) - G^P(a)(D_{MN}^{(a)} + G_M(b)\Lambda_N^{(ba)} + G_N(b)\Lambda_M^{(ba)}) - \\ & - \frac{1}{2}G^P(a)(G_M(b)\Phi_N^{(ab)} + G_N(b)\Phi_M^{(ab)}) + \frac{1}{2}\Phi^{(ab)P}(G_M(a)G_N(b) + G_N(a)G_M(b)) + \\ & + \Omega^{(abc)}G^P(a)(G_M(c)G_N(b) + G_N(c)G_M(b)), \quad (9.2.23) \end{aligned}$$

где по индексам  $a, b, c$ , принимающим значения 4, 5, 6, 7, производится суммирование с учетом сигнатуры  $(\mp, - - -)$ . Кроме того, использовано

обозначение

$${}^4\Gamma_{MN}^P = \frac{g^{PQ}}{2}(g_{MQ,N} + g_{NQ,M} - g_{MN,Q}). \quad (9.2.24)$$

Подставляя (9.2.23) в выражение для 8-мерной скалярной кривизны и учитывая обращение в нуль ряда физико-геометрических тензоров, согласно (9.2.15), находим

$$\begin{aligned} {}^8R &= R_{(out)} + R_{(bos)} + R_{(m)} = \\ &= {}^4\tilde{R} - F_{MN}^{(a)} F^{(a)MN} + 2\tilde{\nabla}_Q \Phi^{(aa)Q} - \Phi_Q^{(aa)} \Phi^{(bb)Q} - \frac{1}{2} \Phi_Q^{(ab)} (\Phi^{(ab)Q} + \Phi^{(ba)Q}), \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

где

$$R_{(out)} = {}^4\tilde{R} \quad (9.2.26)$$

определяет 4-мерный гравитационный лагранжиан. В самом общем случае это выражение строится как тензор кривизны, в котором вместо символов Кристоффеля стоит величина

$$L_{MN}^Q = {}^4\Gamma_{MN}^Q - g_{M,N}^Q. \quad (9.2.27)$$

При использованном ниже условии цикличности компонент 4-мерного метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  по дополнительным (скрытым) координатам (9.2.26) совпадает с 4-мерной скалярной кривизной ОТО.

Второе слагаемое во второй строке (9.2.25)

$$R_{(bos)} = -F_{MN}^{(a)} F^{(a)MN} \quad (9.2.28)$$

определяет динамическую часть гиперплотности лагранжиана векторных бозонов (глюонов). Учитывая вид физико-геометрического тензора (9.2.16), отсюда видно, что это достаточно сложная нелинейная комбинация физических векторных полей, входящих в разложения компонент тетрады (9.1.2). В нее входят вторые, третьи и четвертые степени глюонных полей, соответствующие неабелевым слагаемым в «удлиненных» производных калибровочной хромодинамики.

Далее гиперплотность геометрического лагранжиана (9.2.28) усредняется по периодам зависимостей от дополнительных координат. После этой процедуры остаются только те слагаемые, в которых экспоненциальные множители гасят друг друга. В частности, остаются лишь квадратичные и четвертой степени комбинации из заряженных глюонных полей, а также слагаемые второй, третьей и четвертой степеней с участием нейтральных и заряженных глюонных полей. Получившиеся в итоге выражения, составляющие 4-мерную геометрическую плотность бозонного лагранжиана, выписаны в [36, с. 394].

Оставшиеся в (9.2.25) выражения, содержащие физико-геометрический тензор  $\Phi_M^{(ab)}$ , определяют массовые слагаемые векторных бозонов (см. разд. 9.5.1).

### 9.2.3. Фермионная часть гиперплотности лагранжиана

1. В фермионной части гиперплотности лагранжиана 8-мерной теории

$$\mathcal{L}_{(\Psi)} = \frac{1}{2} \sqrt{\pm G^{(8)}} i(\hbar c) (\bar{\Psi} \Gamma^M (\nabla_M \Psi) - (\nabla_M \bar{\Psi}) \Gamma^M \Psi), \quad (9.2.29)$$

ковариантные производные от спиноров записаны в (8.3.21). Представим свертки частных производных с  $\Gamma$ -матрицами в тетрадном виде 8-мерной теории:

$$\Gamma^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \tilde{\Gamma}^\mu \partial_\mu^* - \Gamma(a) \partial_a^*, \quad (9.2.30)$$

где введены проекции  $\Gamma$ -матриц:

$$\tilde{\Gamma}^\mu = g_M^\mu \Gamma^M; \quad \Gamma(a) = G_M(a) \Gamma^M. \quad (9.2.31)$$

2. Для 16-рядных матриц  $\Gamma(M)$  можно выбрать следующее представление:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 0_4 & 0_4 & 0_4 & \gamma(\mu) \\ 0_4 & 0_4 & \gamma(\mu) & 0_4 \\ \hline 0_4 & \gamma(\mu) & 0_4 & 0_4 \\ \gamma(\mu) & 0_4 & 0_4 & 0_4 \end{array} \right); & \Gamma(4) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 0_4 & 0_4 & 0_4 & \gamma(4) \\ 0_4 & 0_4 & \gamma(4) & 0_4 \\ \hline 0_4 & \gamma(4) & 0_4 & 0_4 \\ \gamma(4) & 0_4 & 0_4 & 0_4 \end{array} \right); \\ \Gamma(5) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 0_4 & 0_4 & 0_4 & -I_4 \\ 0_4 & 0_4 & I_4 & 0_4 \\ \hline 0_4 & -I_4 & 0_4 & 0_4 \\ I_4 & 0_4 & 0_4 & 0_4 \end{array} \right); & \Gamma(6) &= i \left( \begin{array}{cc|cc} 0_4 & 0_4 & I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 & 0_4 & -I_4 \\ \hline I_4 & 0_4 & 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & -I_4 & 0_4 & 0_4 \end{array} \right); \\ \Gamma(7) &= i \left( \begin{array}{cc|cc} I_4 & 0_4 & 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & I_4 & 0_4 & 0_4 \\ \hline 0_4 & 0_4 & -I_4 & 0_4 \\ 0_4 & 0_4 & 0_4 & -I_4 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

где  $I_4$  — 4-рядная единичная матрица;  $\gamma(4) = \gamma(0)\gamma(1)\gamma(2)\gamma(3)$ ;  $0_4$  — 4-рядная нулевая матрица;  $\gamma(\mu)$  — 4-рядные матрицы Дирака, записанные в (7.1.30).



3. Используя (9.2.30), фермионную гиперплотность (9.2.29) можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(\Psi)} = \mathcal{L}_{(int)} + \mathcal{L}_{(\Delta)} + \mathcal{L}_{(M)}, \quad (9.2.33)$$

где  $\mathcal{L}_{(int)}$  — гиперплотность лагранжиана свободных фермионных полей и их непосредственного (прямого) взаимодействия с векторными бозонами,  $\mathcal{L}_{(\Delta)}$  — часть гиперплотности лагранжиана, содержащая коэффициенты вращения Риччи и описывающая взаимодействие с гравитацией и аномальные моменты,  $\mathcal{L}_{(M)}$  — массовые слагаемые фермионного поля.

4. Наибольший интерес представляет первое слагаемое справа

$$\mathcal{L}_{(int)} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (i\hbar c) (\bar{\Psi} \tilde{\Gamma}^\mu (\partial_\mu^* \Psi) - (\partial_\mu^* \bar{\Psi}) \tilde{\Gamma}^\mu \Psi), \quad (9.2.34)$$

где оператор тетрадной удлиненной производной выписан в (9.2.22). Будем использовать представление матриц  $\tilde{\Gamma}^\mu$  через стандартные (в плоском пространстве-времени)  $4 \times 4$ -матрицы Дирака  $\gamma^\mu \rightarrow \gamma(\mu)$  согласно (9.2.32).

5. Учитывая симметрию трех кварков, предлагается использовать следующее симметричное по цветовым состояниям представление введенных в (9.1.5) 4-компонентных спиноров через кварковые волновые функции

$$\Psi(s) = c_s \{q_{(1)} \exp(i\gamma x^5) + q_{(2)} \exp(i\gamma x^6) + q_{(3)} \exp(i\gamma x^7)\}, \quad (9.2.35)$$

где для трех цветовых состояний кварков, в согласии с (9.1.1), введена циклическая зависимость от трех дополнительных координат калуцевского типа;  $q_{(j)}$  — части волновых функций кварков, зависящие только от 4 классических координат;  $c_s$  — четыре комплексных коэффициента, которые находятся из условий соответствия с хромодинамикой. Отметим, что здесь использован тот же принцип разложения четверки 4-компонентных спиноров через возможные физические состояния, что и в формуле (9.1.2) для разложения четверки 4-компонентных тетрад через возможные физические промежуточные векторные поля.

6. Далее необходимо подставить формулы (9.1.2), (9.2.35) в выражение для части фермионной гиперплотности (9.2.34) и произвести усреднение (интегрирование) по периодам зависимостей от дополнительных калуцевских координат. В итоге получается достаточно громоздкое выражение для 4-мерной плотности фермионного лагранжиана, содержащее коэффициенты разложения из (9.1.2) и (9.2.35). Эти коэффициенты находятся из принципа соответствия геометрической теории с калибровочной моделью хромодинамики, причем для коэффициентов

разложения векторов тетрады в (9.1.2) не должно быть расхождений в условиях соответствия, полученных в бозонном и фермионном секторах двух теорий.

Анализ этого вопроса в рамках 7-мерной геометрической модели гравитационно-сильных взаимодействий со скрытыми размерностями исключительно калуцевского типа показал, что условия на коэффициенты разложения компонент триады в бозонном и фермионном секторах оказываются несовместными. Это заставило перейти к 8-мерной геометрической теории, в которой присутствует четвертая дополнительная размерность, причем именно клейновского типа.

### 9.3. Сведения из калибровочной модели сильных взаимодействий

Общепринятая теория сильных взаимодействий, именуемая *хромодинамикой*, строится на принципиально иных (негеометрических) принципах. Не вдаваясь в подробности хромодинамики (см., например, [120, 185]), назовем главные ее следствия, сравнив их с положениями 8-мерной геометрической теории.

**1. Глюонные векторные поля.** Хромодинамика основана на калибровочном подходе к описанию взаимодействий (см. разд. 12.2), в котором наряду с плоским 4-мерным пространством-временем определяется *внутреннее пространство элементарных частиц*, обладающее  $SU(3)$ -симметрией. Восемь параметров этой группы делаются зависимыми от классических четырех координат. Для сохранения инвариантности плотности лагранжиана относительно локализованной группы  $SU(3)$  необходимо ввести в частные производные добавочные векторные поля  $V_\mu^a$ , где индекс  $a$ , нумерующий поля, пробегает восемь значений: 1, 2, ..., 8 — по числу параметров группы. Эти поля объявляются *глюонными полями переносчиков сильных взаимодействий*.

В геометрической теории глюонные поля предлагается описывать 4-мерными компонентами  $G_\mu(s)$  дополнительных компонент октады (тетрады).

**2. Кварки.** Согласно хромодинамике, сильно взаимодействующие частицы — адроны (барионы и мезоны) состоят из кварков, которые обладают *тремя цветами* (цветовыми зарядами). В частности, барионы (протоны, нейтроны, гипероны, ...) образуют цветовой триплет

$$q_{(j)} = \begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \\ q_{(3)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_R \\ q_Y \\ q_G \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{красный} \\ \text{желтый} \\ \text{зеленый} \end{pmatrix}. \quad (9.3.1)$$

**3. Лагранжиан хромодинамики** в каноническом виде состоит из трех частей — бозонной, фермионной и массовой, обеспечивающей значения масс ча-

стиц;

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Bos} + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_m \equiv -\frac{1}{4c} F_{\mu\nu}^{(a)} F^{\mu\nu}_{(a)} + \left[ \sum_{(f)} (i\hbar c) \bar{q}_f \gamma^\mu \partial_\mu^* q_f + (h.c.) \right] + \mathcal{L}_m, \quad (9.3.2)$$

где  $\partial_\mu^*$  — оператор удлиненной производной, определенный ниже,  $\mathcal{L}_m$  — массовые слагаемые. В этом выражении использована матричная запись, где под  $q$  понимается вектор-столбец из 4-компонентных функций.

Лагранжиан хромодинамики (9.3.2) соответствует гиперплотности лагранжиана 8-мерной геометрической теории, где первая (бозонная) часть возникает из 8-мерной скалярной кривизны, тогда как вторая (фермионная) часть представляет собой негеометрическую материю (в данном варианте теории).

#### 4. Бозонная часть плотности лагранжиана (9.3.2)

$$\mathcal{L}_{Bos} = -\frac{1}{4c} F_{\mu\nu}^{(a)} F^{\mu\nu}_{(a)} \quad (9.3.3)$$

записывается через тензоры напряженности восьми калибровочных полей  $V_\mu^a$ , которые имеют вид

$$F_{\mu\nu}^a = \left( \frac{\partial V_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial V_\mu^a}{\partial x^\nu} \right) - \frac{g_o}{\hbar c} f_{bc}^a V_\mu^b V_\nu^c, \quad (9.3.4)$$

где  $f_{bc}^a$  — структурные константы группы  $SU(3)$ , антисимметричные по всем трем индексам, например,

$$f_{123} = -f_{132} = -f_{213} = f_{231} = f_{312} = -f_{321} = 1. \quad (9.3.5)$$

Кроме  $f_{123}$  отличны от нуля следующие константы:

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}; \quad f_{458} = f_{478} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9.3.6)$$

и другие константы, получающиеся из них перестановками индексов. Остальные равны нулю.

Как будет показано ниже, в геометрической теории грави-сильных взаимодействий восемь нелинейных напряженностей хромодинамики  $F_{\mu\nu}^{(a)}$  соответствуют четырем (также нелинейным) антисимметричным физико-геометрическим тензорам  $F_{\mu\nu}(s)$ .

**5. Оператор «удлиненной» производной** в фермионной части лагранжиана хромодинамики (9.3.2) имеет вид

$$\partial_\mu^* = \partial_\mu + i g_o \vec{V}_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_o}{2\hbar c} \lambda_a V_\mu^a, \quad (9.3.7)$$

где  $\lambda_a$  — матрицы Гелл-Манна,  $g_o$  — калибровочная константа связи по группе  $SU(3)$ . Здесь везде подразумевается матричная запись, т. е.  $\partial_\mu \rightarrow I_3 \partial_\mu$ , где  $I_3$  — единичная  $3 \times 3$ -матрица.

Приведем вид матриц Гелл-Манна в наиболее часто встречающемся представлении

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{9.3.8}$$

Легко видеть, что «удлиненная» производная хромодинамики (9.3.7) соответствует оператору пространственно-временного дифференцирования (9.2.22) в 8-мерной геометрической модели.

**6. Нейтральные векторные поля.** Из восьми матриц Гелл-Манна две ( $\lambda_3$  и  $\lambda_8$ ) являются диагональными. Стоящие при них векторные поля называются *нейтральными глюонными полями*. Для них приняты специальные обозначения:

$$V_\mu^3 \equiv \tilde{A}_\mu; \quad V_\mu^8 \equiv \tilde{B}_\mu. \tag{9.3.9}$$

Поскольку матрицы  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$  эрмитовы, можно им сопоставить две характеристики цветовых зарядов:  $Q_a$  — цветовой изотопический заряд и  $Q_b$  — гиперцветовой заряд, которые являются источниками нейтральных глюонных полей  $\tilde{A}_\mu$  и  $\tilde{B}_\mu$  соответственно. Значения этих зарядов (в единицах  $g_0$ ) для основных частиц: кварков и глюонов, рассматриваемых в хромодинамике, приведены в таблице

Частицы		$Q_a$	$Q_b$
Кварки	$q_{(1)} \equiv q_R$	1/2	$1/(2\sqrt{3})$
	$q_{(2)} \equiv q_Y$	-1/2	$1/(2\sqrt{3})$
	$q_{(3)} \equiv q_G$	0	$-1/\sqrt{3}$
Глюоны	$A_\mu, \tilde{B}_\mu$	0	0
	$X_\mu^+$	-1	0
	$Y_\mu^+$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$
	$Z_\mu^+$	1/2	$-\sqrt{3}/2$

(9.3.10)

Используя введенные заряды, оператор (9.3.7) можно переписать еще в одном виде

$$\partial_\mu^* = I_3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} + I_3 \frac{ig_0}{\hbar c} Q_a \tilde{A}_\mu + I_3 \frac{ig_0}{\hbar c} Q_b \tilde{B}_\mu + \frac{ig_0}{2\hbar c} \lambda_n V_\mu^n, \tag{9.3.11}$$

где индекс  $n$  пробегает шесть значений: 1, 2, 4, 5, 6, 7.

В геометрической теории соответствующие им векторные поля не зависят от дополнительных координат, т. е. подчиняются условиям цилиндричности по дополнительным размерностям.

**7. Хроматически заряженные векторные поля** описываются шестью величинами  $V_\mu^n$ . Вместо них используются следующие три пары специальных комбинаций:

$$\begin{aligned} X_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^1 + iV_\mu^2); & X_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^1 - iV_\mu^2); \\ Y_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^4 + iV_\mu^5); & Y_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^4 - iV_\mu^5); \\ Z_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^6 + iV_\mu^7); & Z_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^6 - iV_\mu^7). \end{aligned} \quad (9.3.12)$$

В новых обозначениях фермионная часть плотности лагранжиана хромодинамики представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \hbar c \left\{ i\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q - \frac{g_0}{2\hbar c} \bar{q}\gamma^\mu [(\lambda_3 \tilde{A}_\mu + \lambda_8 \tilde{B}_\mu) + \right. \\ &\left. + \sqrt{2}(\tau_{21} X_\mu^+ + \tau_{31} Y_\mu^+ + \tau_{32} Z_\mu^+ + \tau_{12} X_\mu^- + \tau_{13} Y_\mu^- + \tau_{23} Z_\mu^-)] q \right\} + (h.c.), \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

где вместо 6 матриц Гелл-Манна введены новые 3-рядные матрицы (в базисе Картана–Вейля):

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \tau_{21} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \tau_{13} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \tau_{31} &= \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \tau_{23} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \tau_{32} &= \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.3.14)$$

Операторы, соответствующие матрицам  $\tau_{ab}$ , действуют как повышающие и понижающие операторы в 3-мерном цветовом пространстве. Расположения единиц показывают, какое значение цветового заряда в какое новое место перебрасывает соответствующий оператор.

Поскольку определенные так глюонные поля входят в плотность лагранжиана (в «удлиненные» производные) в комбинациях с соответствующими матрицами  $\tau_{ab}$ , легко проинтерпретировать роль этих глюонных полей. Они изменяют цветовые заряды соответствующих кварков, т. е. генерируют переходы кварков между состояниями, поясненными на диаграммах рисунка 9.1.

В геометрической теории этот факт отражен постулированной в (9.1.2) зависимостью глюонов от дополнительных координат.

## 9.4. Принцип соответствия сильных взаимодействий в геометрофизике и хромодинамике

Чтобы найти введенные в разложениях (9.1.2) константы, следует сопоставить друг с другом плотности лагранжианов сильных взаимодействий в геометрофизике и в хромодинамике, причем это нужно сделать как в бозонном, так и в фермионном секторах.

### 9.4.1. Условия соответствия двух теорий в бозонном секторе

Сопоставим друг с другом, с одной стороны, геометрическую часть (9.2.28) 8-мерной теории, а с другой стороны, бозонную часть плотности лагранжиана стандартной хромодинамики (9.3.3). Из их отождествления следуют 46 условий (уравнений) на 33 коэффициента разложения векторов тетрады (смешанных компонент 8-мерной метрики) (9.1.2) по физическим векторным полям глюонов и на одну константу

$$C = \frac{\gamma G^5(5)C_0}{g_0}, \quad (9.4.1)$$

где  $g_0$  — константа связи сильных взаимодействий в хромодинамике. Вследствие симметрии хроматических зарядов будем полагать  $G^5(5) = G^6(6) = G^7(7)$ .

По характеру сопоставляемых величин эти условия разбиваются на 5 групп:

- 1) 6 условий из сравнения квадратичных комбинаций из глюонных полей;
- 2) 12 условий из сравнения кубичных комбинаций нейтральных и заряженных глюонных полей;

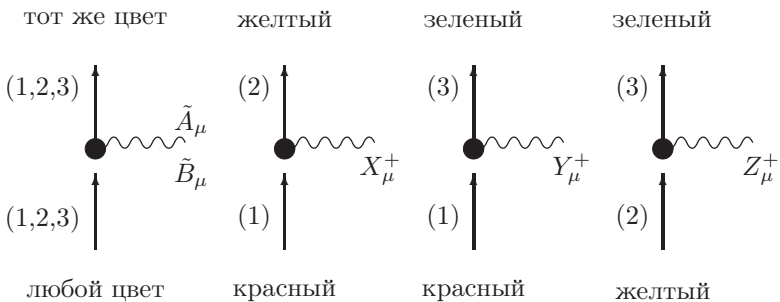


Рис. 9.1. Кварк-глюонные взаимодействия

- 3) 6 условий из сравнения кубических комбинаций только заряженных глюонных полей;
- 4) 12 условий из сравнения комбинаций четвертой степени только заряженных глюонных полей;
- 5) 10 условий из сравнений смешанных комбинаций четвертой степени заряженных и нейтральных глюонных полей.

Все эти условия, порой имеющие довольно громоздкий вид, выписаны в [36, с. 394–398]. Отметим, что число получившихся условий оказывается большим числа неизвестных коэффициентов (34), тем не менее система оказывается совместной.

**1. Решение для нейтральных коэффициентов.** Явно выпишем 3 условия для коэффициентов при нейтральных полях, следующих из сравнения квадратичных комбинаций:

$$\pm a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 = 1; \quad (9.4.2)$$

$$\pm b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 = 1; \quad (9.4.3)$$

$$\pm a_4 b_4 + a_5 b_5 + a_6 b_6 + a_7 b_7 = 0; \quad (9.4.4)$$

и 6 условий для этих же коэффициентов, следующих из сравнения кубических комбинаций:

$$C(a_6 - a_5) = -1; \quad C(a_7 - a_5) = -\frac{1}{2}; \quad C(a_6 - a_7) = -\frac{1}{2}; \quad (9.4.5)$$

$$C(b_6 - b_5) = 0; \quad C(b_7 - b_5) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad C(b_7 - b_6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (9.4.6)$$

Из этой системы уравнений относительно 8 коэффициентов  $a_s$ ,  $b_s$  и константы  $C_o$  (при условии их вещественности) находим решение:

$$a_4 = 0; \quad a_5 = -a_6 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a_7 = 0; \quad (9.4.7)$$

$$b_4 = 0; \quad b_5 = b_6 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad b_7 = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad (9.4.8)$$

$$C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (9.4.9)$$

Во всех этих выражениях знаки плюс-минус согласованы друг с другом. Они отражают тот факт, что искомые коэффициенты входят в ряд выражений квадратично.

Особо обратим внимание на тот факт, что решения для двух троек коэффициентов с номерами: 5, 6, 7 соответствуют двум (диагональным) матрицам Гелл-Манна  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$  из (9.3.8), если их расположить в соответствии с номерами:  $5 \rightarrow 1$ ;  $6 \rightarrow 2$ ;  $7 \rightarrow 3$ . Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_3; \quad (9.4.10)$$

$$\begin{pmatrix} b_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_8. \quad (9.4.11)$$

**2. Решения для коэффициентов при заряженных полях.** Подставляя найденные решения в оставшиеся уравнения, находим решения для коэффициентов при заряженных векторных полях. Отдельно выпишем коэффициенты с индексами «4»:

$$x_4^+ = x_4^- = y_4^+ = y_4^- = z_4^+ = z_4^- = k, \quad (9.4.12)$$

где  $k = \pm i$  для сигнатуры  $(+ - - - | + - - -)$  и  $k = \pm 1$  для случая сигнатуры  $(+ - - - | - - - -)$ . Оставшиеся коэффициенты с индексами: 5, 6, 7 удобно представить в 3-мерном векторном виде, например

$$\vec{x}^\pm = (x_5^\pm, x_6^\pm, x_7^\pm).$$

Для них находятся 8 пар решений. Представим их в виде следующей таблицы:

	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант
$\vec{x}^-$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$
$\vec{x}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, \pm 1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{y}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
$\vec{z}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \mp 1, 0)$
$\vec{z}^+$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
	5-й вариант	6-й вариант	7-й вариант	8-й вариант
$\vec{x}^-$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{x}^+$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, \mp 1, 0)$
$\vec{y}^-$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$
$\vec{y}^+$	$(\pm 1, 0, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(\mp 1, 0, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$
$\vec{z}^-$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$	$(0, \pm 1, 0)$
$\vec{z}^+$	$(0, \mp 1, 0)$	$(0, 0, \mp 1)$	$(0, \pm 1, 0)$	$(0, 0, \pm 1)$

(9.4.13)



Совокупность этих решений удваивается за счет выбора двух знаков у коэффициентов с индексами «4» в (9.4.12).

Ниже будет показано, что условия, вытекающие из согласования фермионных секторов двух теорий, выделяют первый вариант решения. Обратим внимание на тот факт, что *вид этого решения соответствует структуре трех пар недиагональных матриц Гелл-Манна в базисе Кармана–Вейля* (9.3.14), если должным образом построить 3-рядные матрицы из коэффициентов  $\vec{x}^\mp$ ,  $\vec{y}^\mp$ ,  $\vec{z}^\mp$ . Действительно, образуем шесть 3-рядных матриц из строк: либо из компонент вектора с индексом «-» сверху, либо из компонент вектора с индексом «+» сверху и двух строк из трех нулей. Одна строка из нулей помещается в место, соответствующее номеру индекса, которого нет в соответствующих экспонентах. Например, для векторов  $\vec{x}^\mp$  экспонента определена в (9.1.2), т. е. в нее входят координаты с индексами 5 и 6, — значит, нужно добавить нулевую третью строку, соответствующую недостающему индексу  $7 \rightarrow 3$ . Другую нулевую строку следует писать согласно следующему правилу. Если взята строка из компонент вектора с индексом «-», то вторая нулевая строка пишется ниже ее; если взята строка из компонент вектора с индексом «+», то вторая нулевая строка пишется выше ее. В итоге будем иметь

$$\begin{pmatrix} \vec{x}^- \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{12}; \quad \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{x}^+ \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{21}; \quad (9.4.14)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{y}^- \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{13}; \quad \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{y}^+ \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{31}; \quad (9.4.15)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{z}^- \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{23}; \quad \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{z}^+ \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm \tau_{32}. \quad (9.4.16)$$

**3. Явный вид векторов тетрады дополнительных размерностей.** Выпишем явно компоненты тетрады (9.1.2) для первого варианта решения:

$$\begin{aligned} G_\alpha(4) = & kC_o (X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + \\ & + Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^7)] + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^7)] + \\ & + Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^6 - x^7)] + Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^6 - x^7)]); \end{aligned} \quad (9.4.17)$$

$$G_\alpha(5) = C_o \left( \frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^7)] \right); \quad (9.4.18)$$

$$G_\alpha(6) = C_o \left( -\frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Z_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^6 - x^7)] \right); \quad (9.4.19)$$

$$G_\alpha(7) = C_o \left( -\frac{2\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^7)] + Z_\alpha^- \exp[i\gamma(x^6 - x^7)] \right). \quad (9.4.20)$$

Таким образом, имеется 8 пар вариантов решений для коэффициентов разложения компонент векторов тетрады дополнительных размерностей (смешанных компонент многомерного метрического тензора), при которых совпадают бозонные секторы хромодинамики и геометрической теории. Вид полученного решения соответствует набору из восьми матриц Гелл-Манна.

### 9.4.2. Условия на коэффициенты из фермионного сектора

Подставляя (9.1.2) и (9.2.35) в (9.2.34) и производя усреднение по периодам дополнительных координат, получаем 4-мерный вид фермионной части плотности лагранжиана. Отождествляя его с фермионным сектором стандартной хромодинамики, получаем систему из 9 независимых алгебраических соотношений между коэффициентами  $c_s$  и коэффициентами бозонного сектора  $a_s, b_s, x_s^\pm, \dots$ . Полагая коэффициенты  $c_s$  одинаковыми, приходим к решениям для «нейтральных» коэффициентов (9.4.7)–(9.4.9) и к условию на коэффициенты перед заряженными полями:

$$x_5^+ + x_6^- = y_5^+ + y_7^- = z_6^+ + z_7^- = \frac{\sqrt{2}}{C}. \quad (9.4.21)$$

Кроме того, получается еще одно условие на коэффициенты  $c_s$

$$c_1^* c_1 + c_2^* c_2 + c_3^* c_3 + c_4^* c_4 = 1. \quad (9.4.22)$$

Для первого варианта решения для коэффициентов  $x_s^\pm, \dots$  из таблицы (9.4.13) соотношения (9.4.21) выполняются тождественно. Условие (9.4.22) удовлетворяется, если положить

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{2}. \quad (9.4.23)$$

Следует отметить, что из приведенных в таблице (9.4.13) вариантов решений еще три варианта (третий, пятый и седьмой) удовлетворяют выписанным условиям, если не полагать коэффициенты  $c_s$  одинаковыми.

Таким образом, можно утверждать, что в рамках рассмотренной 8-мерной геометрической объединенной модели гравитационных и сильных взаимодействий (типа теории Калуцы—Клейна) можно добиться полного соответствия как с бозонным, так и с фермионным секторами стандартной хромодинамики.

### 9.4.3. Заряды взаимодействий с нейтральными полями

Как уже отмечалось, оператор пространственно-временного дифференцирования (9.2.22) в геометрической теории соответствует удлиненной производной (9.3.7) в хромодинамике. Полагая, что данный оператор действует на произвольную функцию  $\Psi$  с зависимостью от дополнительных координат, определенной в (9.1.3), и используя решения (9.4.7)–(9.4.9) для коэффициентов при нейтральных векторных полях, получаем для удлиненной производной (9.2.22) выражение

$$\partial_\mu^* \Psi = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sqrt{2}i\tilde{\gamma}C \frac{\varepsilon_5 - \varepsilon_6}{2} \tilde{A}_\mu + \sqrt{2}i\tilde{\gamma}C \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7}{2\sqrt{3}} \tilde{B}_\mu + \dots \right) \Psi. \quad (9.4.24)$$

Здесь выбраны верхние знаки в (9.4.7)–(9.4.9);  $\tilde{\gamma} = \gamma G^5(5)$ .

Сравнивая «удлиненную» производную (9.3.11) в стандартной хромодинамике с (9.4.25) в 8-мерной геометрической модели, приходим к следующим отождествлениям:

$$Q_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_5 - \varepsilon_6); \quad Q_b = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7). \quad (9.4.25)$$

Формально введем еще один заряд

$$Q_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7). \quad (9.4.26)$$

Наконец, укажем физический смысл тетрадных операторов дифференцирования (9.2.19)–(9.2.21). *Собственные значения трех комбинаций из них с точностью до коэффициента представляют собой ве-*

денные выше значения зарядов:

$$\frac{1}{2}(\partial_5^* - \partial_6^*)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_a\Psi; \quad \frac{1}{2\sqrt{3}}(\partial_5^* + \partial_6^* - 2\partial_7^*)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_b\Psi; \quad (9.4.27)$$

$$\frac{1}{3}(\partial_5^* + \partial_6^* + \partial_7^*)\Psi = i\tilde{\gamma}Q_c\Psi. \quad (9.4.28)$$

Оставшийся оператор дифференцирования (9.2.18) будем интерпретировать как массовый.

## 9.5. Массовый сектор 8-мерной геометрической теории

Перейдем к рассмотрению значений масс векторных бозонов в 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий [81].

### 9.5.1. Проблема планковских масс заряженных бозонных полей

1. Часть скалярной кривизны, описывающая массовые вклады векторных полей, имеет вид

$$R_{(m)} = 2\tilde{\nabla}_Q\Phi^{(aa)Q} - \Phi_Q^{(aa)}\Phi^{(bb)Q} - \frac{1}{2}\Phi_Q^{(ab)}(\Phi^{(ab)Q} + \Phi^{(ba)Q}). \quad (9.5.1)$$

Подставляя сюда вид физико-геометрического тензора  $\Phi_Q^{(ab)}$ , согласно (9.2.10), а также полагая, что из-за симметрии цветовых зарядов три дополнительные диагональные компоненты 8-мерного метрического тензора равны друг другу:

$$G_{55} = G_{66} = G_{77} \rightarrow G^5(5) = G^6(6) = G^7(7) = \sigma, \quad (9.5.2)$$

(9.5.1) можно представить в виде

$$R_{(m)} = -\sigma^2 g^{\mu\nu} \left( 2G_\mu(b)G_\nu(a)_{,b,a} + G_\mu(a)_{,a}G_\nu(b)_{,b} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}G_\mu(b)_{,a}G_\nu(a)_{,b} + \frac{1}{2}G_\mu(b)_{,a}G_\nu(b)_{,a} \right), \quad (9.5.3)$$

из которого явно видно, что все дифференцирования производятся по дополнительным координатам, что, ввиду экспоненциальной зависимости от них в (9.1.2), приводит к возникновению массовых слагаемых от векторных полей.

2. Выразим в (9.5.3) компоненты тетрады через физические векторные поля и произведем усреднение (интегрирование) по дополнительным координатам. В итоге останутся лишь квадратичные слагаемые,

в которых экспоненциальные множители сократятся друг с другом, т. е. имеем

$$\begin{aligned} \langle R_{(m)} \rangle = & \gamma^2 \sigma^2 C_o^2 \times \\ & \times \left\{ X_\mu^{(+)} X^{(-)\mu} [(x_6^+ - x_5^+)(x_6^- - x_5^-) - 2(x_5^+ x_5^- + x_6^+ x_6^- + x_7^+ x_7^-) + 2x_4^+ x_4^-] + \right. \\ & + Y_\mu^{(+)} Y^{(-)\mu} [(y_7^+ - x_5^+)(y_7^- - x_5^-) - 2(y_5^+ y_5^- + y_6^+ y_6^- + y_7^+ y_7^-) + 2y_4^+ y_4^-] + \\ & \left. + Z_\mu^{(+)} Z^{(-)\mu} [(z_7^+ - z_6^+)(z_7^- - z_6^-) - 2(z_5^+ z_5^- + z_6^+ z_6^- + z_7^+ z_7^-) + 2z_4^+ z_4^-] \right\}. \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

3. После учета значений коэффициентов (9.4.7)–(9.4.9) приходим к выражению

$$\langle R_{(m)} \rangle = -3\gamma^2 \sigma^2 C_o^2 (X_\mu^{(+)} X^{(-)\mu} + Y_\mu^{(+)} Y^{(-)\mu} + Z_\mu^{(+)} Z^{(-)\mu}). \quad (9.5.5)$$

Сравнивая (9.5.5) с динамической частью геометрической плотности лагранжиана, приходим к одинаковым значениям масс трех пар заряженных глюонов

$$\left( \frac{M_c c}{\hbar} \right)^2 = 3\gamma^2 \rightarrow M_c = \sqrt{3} \frac{\gamma \hbar}{c}, \quad (9.5.6)$$

имеющих порядок планковской массы. Аналогичный результат получался в 5-мерной теории Калуцы для негеометрических электрически заряженных полей, — *появление планковских масс частиц типично для многомерных геометрических теорий.*

### 9.5.2. Конформное преобразование

1. Предлагается геометрический способ перенормировки планковских масс векторных (и иных) полей на основе процедуры конформного преобразования 8-мерного метрического тензора

$${}^8 \tilde{G}_{MN} = \xi^2(x^A) G_{MN}, \quad (9.5.7)$$

где  $\xi(x^A)$  — скалярный конформный фактор, в общем случае зависящий от всех 8 координат, а  $G_{MN}$  — исходные для развиваемой 8-мерной теории (для геометрофизики) компоненты метрического тензора. Будем полагать, что все изложенное в этой главе выше относилось к метрике  $G_{MN}$ , получившейся в результате конформного преобразования (9.5.7). Согласно общей теории конформных преобразований, рассмотренной в гл. 4, к итоговой скалярной кривизне, из которой выделялись векторные поля, окажутся добавленными слагаемые, содержащие производные от конформного (скалярного) фактора, так что для гиперплотности

геометрического лагранжиана имеем

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(geom)} \equiv -\frac{\sqrt{\mp^8 \tilde{G}}_8}{2\kappa c} \tilde{R} = -\frac{\sqrt{\mp G}}{2\kappa c} \left( \chi^2 R - \frac{14}{3} \chi G^{MN} \nabla_M \nabla_N \chi \right) \equiv \mathcal{L}_{(g)} + \mathcal{L}_{(\chi)}, \quad (9.5.8)$$

где произведено переобозначение конформного фактора

$$\chi = \xi^3. \quad (9.5.9)$$

Основная идея этого подхода состоит в том, что дополнительное слагаемое  $\mathcal{L}_{(\chi)}$  в (9.5.8) содержит квадратичные члены, описывающие взаимодействие скалярного поля  $\chi$  с векторными физическими полями, которые в общем случае также дают массовые вклады в итоговую 4-мерную плотность лагранжиана. Должным подбором коэффициентов в определении  $\chi(x^A)$  можно добиться перенормировки планковских масс векторных полей.

2. Чтобы реализовать эту программу, запишем скалярное слагаемое  $\mathcal{L}_{(\chi)}$  в тетрадном виде в используемой здесь четырежды хронометрической калибровке. При этом учтем, что в самом общем случае для свертки ковариантной производной от произвольного 8-мерного вектора  $B_N$  имеет место формула

$$G^{MN} \nabla_M B_N = g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{B}_\nu + B(a) D^{(a)} + 2B(a) \Omega^{(bab)} + \partial_a^* B(a) - \tilde{B}_\mu \Phi^{(aa)\mu}, \quad (9.5.10)$$

где  $B(a) = B_N G^N(a)$ . В данном конкретном случае следует положить  $B_N = \nabla_N \chi$  и учесть условия, обращающие в нуль ряд физико-геометрических тензоров (9.2.15).

3. Излагаемая здесь процедура представляет собой геометрический аналог общеизвестного механизма Хиггса введения масс в калибровочной модели электрослабых взаимодействий (см. разд. 10.8.2). Конформный фактор  $\chi$  играет роль хиггсовского скалярного поля, экспериментальные поиски которого ведутся в ряде лабораторий мира.

В многомерной геометрической теории имеется возможность снять с повестки дня проблему обнаружения хиггсовского скалярного поля, зависящего от классических 4-мерных координат. Дело в том, что в 8-мерной теории имеются два (в каком-то смысле симметричных) набора координат: 4 классические координаты  $x^\mu$  и 4 скрытые координаты  $x^a$ . Постулировалось, что ряд величин, например компоненты 4-мерной метрики  $g_{\mu\nu}$  или нейтральные векторные поля, зависит лишь от четырех классических координат. При некоторой симметрии двух

наборов координат можно предположить, что могут быть величины, которые зависят лишь от дополнительных (скрытых) координат. Исходя из этого, постулируем, что конформный фактор  $\chi$  зависит лишь от скрытых размерностей:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} = 0, \quad (9.5.11)$$

т. е. принимаем условие цилиндричности конформного фактора по классическим координатам, альтернативное использованному в 5-мерной теории Калуцы условию цилиндричности компонент метрического тензора по дополнительной, пятой координате. Это означает присутствие скалярного поля эквивалентно во всех точках классического пространства-времени. При данном постулате имеем

$$\mathcal{L}_{(\chi)} = -\frac{\sqrt{\mp G}}{2\kappa c} \frac{14\sigma^2}{3} \chi g^{\mu\nu} G_\mu(a) G_\nu(b) \partial_a \partial_b \chi. \quad (9.5.12)$$

4. Оставляя в силе ранее использованный постулат о циклическом характере зависимости величин от скрытых размерностей, определим конформный фактор в следующем виде

$$\chi = 1 + \phi_4^+ \exp(i\beta x^4) + \phi_4^- \exp(-i\beta x^4) + \phi_+ \exp[i\gamma(x^5 + x^6 + x^7)] + \phi_- \exp[-i\gamma(x^5 + x^6 + x^7)], \quad (9.5.13)$$

где  $\phi_4^\pm$  и  $\phi_\pm$  — постоянные коэффициенты разложения конформного фактора в ряд по гармоникам скрытых размерностей, позволяющие перенормировать планковские значения масс векторных полей.

5. Данный выбор гармоник обосновывается следующими обстоятельствами:

- 1) В (9.5.13) сохраняется типичная для 8-мерной теории симметрия трех координат калуцевского типа.
- 2) Для общности рассмотрения в (9.5.13) введена возможная циклическая зависимость конформного фактора от клейновской координаты  $x^4$ .
- 3) При данном показателе экспоненты конформного фактора не компенсируют экспоненты глюонных полей, содержащиеся в 8-мерной скалярной кривизне, т. е. два типа вкладов в массовые слагаемые могут рассматриваться независимо друг от друга.
- 4) При данном сочетании гармоник в 8-мерной теории явно проявляется физический смысл третьего вида зарядов  $Q_c$ , определенного в (9.4.26), — он характеризует взаимодействие с конформным фактором.

5) Как будет показано в следующей главе, именно такая зависимость конформного фактора от дополнительных координат потом, при переходе к 7-мерной теории, позволит описать массовые слагаемые массивных нейтральных  $Z$ -бозонов, переносящих электрослабые взаимодействия.

6. Подставляя (9.5.13) в (9.5.12) и производя усреднение по дополнительным координатам, находим следующие коэффициенты при массовых слагаемых векторных полей:

$$\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu \rightarrow \frac{28}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (a_5 + a_6 + a_7)^2 + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- a_4^2 \}; \quad (9.5.14)$$

$$\tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu \rightarrow \frac{28}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (b_5 + b_6 + b_7)^2 + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- b_4^2 \}; \quad (9.5.15)$$

$$\tilde{A}_\mu \tilde{B}^\mu \rightarrow \frac{56}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (a_5 + a_6 + a_7)(b_5 + b_6 + b_7) + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- a_4 b_4 \}; \quad (9.5.16)$$

$$X_\mu^{(+)} X^{(-)\mu} \rightarrow \frac{56}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (x_5^+ + x_6^+ + x_7^+)(x_5^- + x_6^- + x_7^-) + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- x_4^+ x_4^- \}; \quad (9.5.17)$$

$$Y_\mu^{(+)} Y^{(-)\mu} \rightarrow \frac{56}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (y_5^+ + y_6^+ + y_7^+)(y_5^- + y_6^- + y_7^-) + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- y_4^+ y_4^- \}; \quad (9.5.18)$$

$$Z_\mu^{(+)} Z^{(-)\mu} \rightarrow \frac{56}{3} \sigma^2 \{ \gamma^2 \phi_+ \phi_- (z_5^+ + z_6^+ + z_7^+)(z_5^- + z_6^- + z_7^-) + \beta^2 \phi_4^+ \phi_4^- z_4^+ z_4^- \}. \quad (9.5.19)$$

Учитывая значения ранее найденных коэффициентов  $a_s, b_s, x_a^\pm, y_a^\pm$  и  $x_a^\pm$ , приходим к выводу, что в итоговом выражении *отсутствуют вклады в массы нейтральных глюонов*.

7. Конформное преобразование (9.5.7) скажется и на значении первого слагаемого в (9.5.8). После усреднения по дополнительным координатам перед всеми слагаемыми появится множитель  $1 + 2(\phi^2 + \phi_4^2)$ . Собирая вместе массовые вклады от двух типов слагаемых, получаем *одинаковые значения масс для заряженных глюонов*

$$\left( \frac{M_{cc}}{\hbar} \right)^2 = 3\gamma^2 - \frac{56(\gamma^2 \phi^2 + \beta^2 \phi_4^2)}{3[1 + 2(\phi^2 + \phi_4^2)]}. \quad (9.5.20)$$

8. В стандартной квантовой хромодинамике глюоны имеют нулевые значения масс покоя. В рамках данной 8-мерной теории можно достичь согласия со значениями масс глюонов в калибровочной модели, причем тремя способами:



- 1) используя лишь калуцевские координаты в (9.5.13), наложением условий:

$$\phi_4^2 \equiv \phi_4^+ \phi_4^- = 0; \quad \phi^2 \equiv \phi_+ \phi_- = \frac{9}{38}; \quad (9.5.21)$$

- 2) используя лишь клейновскую координату  $x^4$  в (9.5.13), постулирував условия:

$$\phi_4^2 = \frac{9\gamma^2}{2(28\beta^2 - 9\gamma^2)}; \quad \phi^2 = 0; \quad (9.5.22)$$

- 3) совместным вариантом, когда используются и калуцевские, и клейновские координаты, т. е. при

$$\gamma^2 \phi^2 + \beta^2 \phi_4^2 = \frac{9}{38} \gamma^2. \quad (9.5.23)$$

9. Отметим, что формально можно обсуждать вариант теории, в которой массы заряженных глюонов отличны от нуля. Для этого нужно лишь нарушить условия (9.5.21)–(9.5.23).

# Геометризация электрослабых взаимодействий



В теории электрослабых взаимодействий есть четыре промежуточных векторных поля. Для объединения гравитационных, сильных и электрослабых взаимодействий необходим геометрический образ 12 векторных полей: 8 глюонных и 4 электрослабых. Если следовать принципу 5-мерной теории Калуцы: одна дополнительная размерность — одно новое векторное поле, — то для описания 12 векторных полей и 4 классических размерностей потребовалось бы 16 измерений. Однако, как уже отмечалось в предыдущей главе, заряженные векторные поля вводятся иным образом — как коэффициенты разложения геометрических векторов по гармоникам зависимостей от дополнительных координат, что существенно понижает необходимое число измерений. Так, для описания грави-сильных взаимодействий потребовалось  $4 + 4 = 8$  измерений. Исследования проблемы построения геометрической теории грави-электрослабых взаимодействий по образу и подобию теории грави-сильных взаимодействий показывают, что для этой цели необходимы 2 (упрощенный вариант) или 3 дополнительных измерения, т. е. такая теория должна быть 6 или  $4 + 3 = 7$  измерений. Простой подсчет показывает, что для механического объединения теорий гравитационных, сильных и электрослабых взаимодействий необходимо  $4 + 4 + 3 = 11$  измерений (или для упрощенного варианта  $4 + 4 + 2 = 10$  измерений). Именно эти цифры (11 или 10) чаще всего называются в исследованиях суперсимметричных теорий в рамках многомерных многообразий.

Не столь прямолинейный путь объединения теорий фундаментальных взаимодействий был предложен в наших работах [40, 41] и получил название «*принципа матрешки*». Согласно этому подходу, **сильные и электрослабые взаимодействия возникают как две ступени конкретизации из единой 8-мерной геометрической теории** (см. предыдущую главу). От 8-мерной теории грави-сильных взаимодействий можно перейти к 7-мерной теории грави-электрослабых взаимодействий «склеивкой» двух калуцевских координат. Проявляемое при этом удивительное соответствие векторных полей и зарядов (в случаях сильных и электро-

---

слабых взаимодействий) создает впечатление вложения одной теории в другую, что и дало повод для названия «принцип матрешки».

В данной главе реализуется сформулированная здесь программа перехода от 8-мерной геометрии к теории электрослабых взаимодействий. При этом фактически даны три варианта теории электрослабых взаимодействий: 1) вариант, получающийся редуцированием (понижением размерности от 8 до 7) из теории гравитационно-сильных взаимодействий, 2) самостоятельный вариант 7-мерной геометрической теории, интерпретируемый в терминах физической теории гравитационно-электрослабых взаимодействий, и 3) стандартная калибровочная модель электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама—Глэшоу. Отождествление этих трех вариантов позволяет конкретизировать коэффициенты при гармониках разложения геометрических величин по физическим полям.

## 10.1. Основания 7-мерной теории гравитационно-электрослабых взаимодействий

Приступая к реализации сформулированной выше программы, обрисует в самых общих чертах истоки специфических понятий и закономерностей теории электрослабых взаимодействий, берущие начало в недрах 8-мерной теории.

1. С позиций геометрии возникновение в теории электрослабых взаимодействий **трех поколений кварков** обусловлено тремя способами редуцирования 8-мерной геометрии на 7-мерные гиперповерхности, характеризующиеся отождествлением, т. е. слиянием в одну, двух дополнительных размерностей. Данная процедура относится лишь к трем пространственно-подобным (калуцевским) размерностям. *Три варианта редуцирования трех калуцевских размерностей к двум интерпретируются как переходы к трем поколениям элементарных частиц.* Назовем варианты

$x^6 = x^7$  — переходом к первому поколению,

$x^7 = x^5$  — переходом ко второму поколению,

$x^5 = x^6$  — переходом к третьему поколению элементарных частиц.

2. Известно, что кварки каждого поколения делятся на **верхние** и **нижние**, так что говорят о *шести ароматах кварков*:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (10.1.1)$$

Все они обладают спином  $1/2$ , т. е. являются фермионами, которые в дуалистической парадигме вводятся в геометрию извне. Изображенные здесь три столбца составляют три поколения, соответственно, первое, второе, третье. Верхние элементы в столбцах называются верхними кварками, а нижние — нижними кварками.

В геометрической теории объяснение этого факта тесно связано с редуцированием к 7-мерию: отождествление пары из тройки калуцевских дополнительных размерностей в (9.1.1) приводит к двум возможным экспоненциальным зависимостям волновых функций от дополнительных координат, в частности, для первого поколения

$$q_{(1)} \rightarrow q_{(u)} \sim \exp(i\gamma x^5); \quad q_{(2)} \rightarrow q_{(d)} \sim \exp(i\gamma x^6), \quad (10.1.2)$$

что физически интерпретируется как наличие верхних и нижних кварков.

3. Наряду с кварками в теории электрослабых взаимодействиях описываются **лептоны** — частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях. Известно, что лептоны, как и кварки, образуют систему из шести ароматов:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}. \quad (10.1.3)$$

Первое поколение называется электронным, второе — мюонным и третье — тау-лептонным. Все лептоны также обладают спином  $1/2$ .

Анализ показывает, что *лептоны возникают из тех же кварков 8-мерной теории как второй вариант их проявления в рамках 7-мерной теории.*

4. Каждая из названных частиц (шести ароматов) обладает **левой и правой компонентами**, что также отсутствовало в теории сильных взаимодействий. В геометрической теории появление правых компонент фермионов обусловлено возможностью *вторичного редуцирования*, т. е. еще одного отождествления двух калуцевских дополнительных координат.

5. В электрослабых взаимодействиях каждого поколения частиц имеется значительно меньше заряженных векторных полей: вместо 6 заряженных глюонов проявляется лишь **одна пара заряженных векторных  $W_\mu^\pm$ -бозонов**. Это легко объяснить, взглянув на разложение компонент тетрады в (9.1.2) по возможным разностям пар координат калуцевского типа. После отождествления двух координат из трех остается лишь одна возможность, в частности, для первого поколения имеем

$$W_\mu^\pm \sim \exp[\mp i\gamma(x^5 - x^6)], \quad (10.1.4)$$

что соответствует одной паре заряженных векторных бозонов.

6. Числа нейтральных векторных бозонов (два) в теориях сильных и электрослабых взаимодействий совпадают, однако переход от одних к другим нетривиален.

7. Поскольку в каждом поколении имеется лишь пара координат калуцевского типа, то в общем случае (для первого поколения) волновые функции заряженных частиц (как геометрической, так и физической)

природы) характеризуются следующей циклической зависимостью от дополнительных координат

$$\Psi = \psi(x^\mu) \exp[i\tilde{\beta}x'^4 + i\alpha(\varepsilon_5x'^5 + \varepsilon_6x'^6)], \quad (10.1.5)$$

где  $\alpha$  и  $\tilde{\beta}$  — константы, трактуемые как новые периоды компактификации дополнительных координат  $x'^s$ ;  $\varepsilon_s$  — гармоники, через которые находятся **два типа зарядов частиц**.

8. В калибровочной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама—Глэшоу также имеются два типа зарядов: *гиперзаряд*  $Y$  и *проекция изотопического спина*  $T_3$ ; из них находятся значения электрических зарядов частиц  $Q$  (в единицах электрического заряда электрона  $e$ ) посредством формулы Гелл-Манна

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3. \quad (10.1.6)$$

В теории сильных взаимодействий аналогами этих зарядов являются заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , которые в геометрофизике вводятся через три гармоники  $\varepsilon_s$  циклических зависимостей волновых функций от дополнительных координат  $x^s$ , согласно формулам (9.4.25).

При переходе к 7-мерной теории гиперзаряд и проекция изотопического спина похожим образом определяются двумя гармониками, согласно формулам:

$$T_3 = \frac{\varepsilon_6}{2}; \quad Y = \varepsilon_5 \quad \rightarrow \quad Q = \frac{1}{2}Y + T_3 = \frac{\varepsilon_5 + \varepsilon_6}{2}, \quad (10.1.7)$$

так что формула Гелл-Манна принимает симметричный вид, соответствующий определению обобщенного заряда  $Q_c = (1/3)(\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7)$  в 8-мерной теории грависильных взаимодействий (см. (9.4.26)), или более простой формуле  $Q = \varepsilon_5$  в 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма Калуцы.

При переходе от 8-мерия к 7-мерной теории удастся описать необычайный факт дробности электрического заряда кварков:  $Q = -1/3$  и  $Q = 2/3$ .

9. Наряду с указанными факторами принципиального характера в рамках 7-мерной теории используются методы, изложенные в разд. 9.1, в частности, из геометрических понятий получаются выражения, соответствующие общеизвестному лагранжиану калибровочной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга—Салама—Глэшоу, в частности, эффективно возникают «удлиненные» производные, неабелевы слагаемые в плотности лагранжиана и другие выражения стандартной теории.

10. В 7-мерной геометрической теории гравитации электрослабых взаимодействий имеет место точно такая же ситуация с описанием масс промежуточных векторных бозонов и фермионов, что и в изложенной выше

8-мерной теории грави-сильных взаимодействий. Конформные преобразования выполняют не только роль механизма Хиггса в калибровочной модели электрослабых взаимодействий, но и осуществляют геометрическую перенормировку планковских масс заряженных частиц.

В последующих разделах этой главы продемонстрировано, как конкретно осуществляются сделанные здесь утверждения.

## 10.2. Переход от 8-мерия к 7-мерной теории грави-электрослабых взаимодействий

Ограничимся рассмотрением лишь одного первого поколения, причем отдельно обсудим бозонный и фермионный секторы.

### 10.2.1. Бозонный сектор

1. При выходе на гиперповерхность  $x^6 = x^7$  все компоненты кварков и векторов тетрады становятся зависимыми не от трех пространственно-подобных, а только от двух координат  $x^5$  и  $x^6$  калуцевского типа. Выпишем для данного случая компоненты тетрады (9.4.17)–(9.4.20):

$$G_\alpha(4) = C_0 (X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Z_\alpha^+ + Z_\alpha^-); \quad (10.2.1)$$

$$G_\alpha(5) = C_0 \left( \frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + X_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] + Y_\alpha^+ \exp[-i\gamma(x^5 - x^6)] \right); \quad (10.2.2)$$

$$G_\alpha(6) = C_0 \left( -\frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Z_\alpha^+ \right); \quad (10.2.3)$$

$$G_\alpha(7) = C_0 \left( -\frac{2\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Z_\alpha^- \right), \quad (10.2.4)$$

где  $C_0$  — некоторая константа. Отсюда видно, что дублет заряженных векторных глюонов  $Z_\alpha^\pm$  становится нейтральным. Более того, теперь теряются основания для разделения этих компонент на два индекса  $\pm$ . Отождествим выражение

$$Z_\alpha^+ + Z_\alpha^- \equiv A_\alpha^{(1)} \quad (10.2.5)$$

с некой комбинацией нейтральных промежуточных векторных полей калибровочной модели электрослабых взаимодействий.

Два других дублета заряженных глюонов теперь выступают с одинаковыми экспонентами, что позволяет их объединить в комбинацию,

отождествляемую с одним дублетом заряженных векторных полей  $W_\alpha^\pm$ -бозонов калибровочной модели электрослабых взаимодействий:

$$X_\alpha^\pm + Y_\alpha^\pm \equiv W_\alpha^\pm. \quad (10.2.6)$$

2. Рассмотрим оператор калибровочно-инвариантной 4-мерной производной (9.2.22), который на данной гиперповерхности приобретает вид

$$\partial_\alpha^* = g_\alpha^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \pm G_\alpha(4)\partial_4^* + G_\alpha(5)\partial_5^* + (G_\alpha(6) + G_\alpha(7))\partial_6^*. \quad (10.2.7)$$

Это выражение позволяет перейти к новому вектору уже триады

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha(6) &= G_\alpha(6) + G_\alpha(7) = \\ &= C_0 \left( -\frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} + X_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + Y_\alpha^- \exp[i\gamma(x^5 - x^6)] + A_\alpha^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (10.2.8)$$

3. Произведем линейное преобразование дополнительных координат

$$\begin{aligned} x'^4 &= \frac{x^4}{c_4}; & x'^5 &= \frac{1}{2c_x c_y}(x^5 + x^6); & x'^6 &= \frac{1}{2c_x}(x^5 - x^6); & \rightarrow & \\ & & \rightarrow x^5 &= c_x(c_y x'^5 + x'^6); & x^6 &= c_x(c_y x'^5 - x'^6), \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

где  $c_x$ ,  $c_y$  и  $c_4$  — три константы, значения которых выяснятся ниже. Эти преобразования выводят за пределы обобщенной «системы отсчета» (в четырежды «хронометрической» калибровке тетрады), использованной при формулировке 8-мерной теории гравитационных взаимодействий.

4. Запишем выражения для геометрических величин в новой координатной системе. Поскольку в 8-мерии полагалось, что  $G_{55} = G_{66} = G_{77}$ , то, согласно (9.2.6) и (9.2.7), в новой координатной системе имеем

$$\begin{aligned} G'_{44} &= c_4^2 G_{44}; & G'_{55} &= 2c_x^2 c_y^2 G_{55}; & G'_{66} &= 2c_x^2 G_{55}; & G'_{56} &= 0; \\ G'^5(5) &= \frac{1}{\sqrt{-G'_{55}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}c_x c_y}; \\ G'^6(6) &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}c_x}; & G'^4(4) &= \frac{1}{c_4} G^4(4); & G'_\alpha(4) &= G_\alpha(4); \\ G'_\alpha(5) &= \frac{G'_{\alpha 5}}{\sqrt{-G'_{55}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (G_\alpha(5) + G_\alpha(6) + G_\alpha(7)); \\ G'_\alpha(6) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (G_\alpha(5) - G_\alpha(6) - G_\alpha(7)). \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

5. С помощью этих формул 4-мерную производную (10.2.7) можно представить в новой обобщенной «системе отсчета» через величины

в прежней «системе отсчета» в следующем виде

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{*M} &= g_\alpha^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \pm \frac{G^4(4)}{c_4} G_\alpha(4) \frac{\partial}{\partial x'^4} + \\ &+ \frac{\sigma}{2c_x c_y} (G_\alpha(5) + G_\alpha(6) + G_\alpha(7)) \frac{\partial}{\partial x'^5} + \frac{\sigma}{2c_x} (G_\alpha(5) - G_\alpha(6) - G_\alpha(7)) \frac{\partial}{\partial x'^6}, \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

что позволяет перейти к новой триаде векторов

$$G'_\alpha(4) = C_0 \left( W_\alpha^+ \exp[-i\gamma 2c_x x'^6] + W_\alpha^- \exp[i\gamma 2c_x x'^6] + A_\alpha^{(1)} \right); \quad (10.2.12)$$

$$\begin{aligned} G'_\alpha(5) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (G_\alpha(5) + G_\alpha(6) + G_\alpha(7)) = \frac{1}{\sqrt{2}} G_\alpha(4) = \\ &= \frac{C_0}{\sqrt{2}} \left( W_\alpha^+ \exp[-i\gamma 2c_x x'^6] + W_\alpha^- \exp[i\gamma 2c_x x'^6] + A_\alpha^{(1)} \right); \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

$$\begin{aligned} G'_\alpha(6) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (G_\alpha(5) - G_\alpha(6) - G_\alpha(7)) = \\ &= -\frac{C_0}{\sqrt{2}} \left( A_\alpha^{(1)} + A_\alpha^{(2)} + W_\alpha^- \exp[i\gamma 2c_x x'^6] - W_\alpha^+ \exp[-i\gamma 2c_x x'^6] \right), \end{aligned} \quad (10.2.14)$$

где введена вторая комбинация нейтральных векторных полей, выражающаяся через нейтральные поля теории сильных взаимодействий:

$$A_\alpha^{(2)} = 2 \left( \frac{\tilde{A}_\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{B}_\alpha}{\sqrt{6}} \right). \quad (10.2.15)$$

6. Обратим внимание на то, что контравариантные компоненты триады  $G'^s(s)$  теперь различны для всех трех дополнительных размерностей

$$\sigma_4 \equiv G'^4(4) = \frac{G^4(4)}{c_4}; \quad \sigma_5 = \frac{G'^5(5)}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}c_x c_y}; \quad \sigma_6 = G'^6(6) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}c_x}. \quad (10.2.16)$$

7. Таким образом, в получившемся варианте геометрической теории присутствуют четыре векторных поля — два нейтральных и два заряженных, — как и должно быть в модели электрослабых взаимодействий. Кроме того, в теории возник ряд коэффициентов, которые позволяют определить значения констант и зарядов частиц, участвующих в электрослабых взаимодействиях.



### 10.2.2. Кварки в 7-мерной теории

При переходе от сильно взаимодействующих кварков в 8-мерной теории к электрослабовзаимодействующим кваркам в 7-мерной теории опять ключевую роль играет процедура склейки двух дополнительных пространственно-подобных размерностей. Опять ограничимся рассмотрением одного первого поколения. Как уже отмечалось, в 8-мерной теории фермионные частицы описываются 16-компонентной спинорной функцией, которая представляется в виде столбца из четырех 4-компонентных спиноров стандартной теории. Если в теории сильных взаимодействий каждая из этих функций представлялась в виде симметричной комбинации из трех цветовых кварков с различной зависимостью от дополнительных координат (9.2.35), то теперь следует допустить, что четыре функции представляются в виде суммы четырех величин с различной зависимостью от дополнительных координат. Эти четыре величины можно отождествить с двумя левыми компонентами кварка (верхнего  $u_L$ -кварка и нижнего  $d_L$ -кварка) и двумя правыми компонентами (верхнего  $u_R$ -кварка и нижнего  $d_R$ -кварка). Рассмотрим отдельно эти два случая.

#### I. Левые компоненты кварков

Перепишем формулу (9.2.35) для кварковых волновых функций в 8-мерной теории с произвольными значениями коэффициентов перед гармониками:

$$\Psi(x^\mu, x^5, x^6, x^7) = a_1 q_1 \exp(i\gamma x^5) + a_2 q_2 \exp(i\gamma x^6) + a_3 q_3 \exp(i\gamma x^7). \quad (10.2.17)$$

После редуцирования на 7-мерие ( $x^6 = x^7$ ) в волновой функции остаются только две дополнительные координаты. После замены переменных (10.2.9) приходим к следующим выражениям:

$$q_1 \exp(i\gamma x^5) = q_1 \exp[i\gamma c_x (c_y x'^5 + x'^6)] \Rightarrow u_L \exp[i\alpha (c_y x^5 + x^6)]; \quad (10.2.18)$$

$$q_2 \exp(i\gamma x^6) = q_2 \exp[i\gamma c_x (c_y x'^5 - x'^6)] \Rightarrow d_L \exp[i\alpha (c_y x^5 - x^6)], \quad (10.2.19)$$

где, во-первых, произведено отождествление двух возможностей с левыми компонентами верхнего и нижнего кварков, во-вторых, произведен переход к новому периоду компактификации трех дополнительных координат путем замены

$$\gamma c_x = \alpha, \quad (10.2.20)$$

и, в-третьих, в выражениях справа убраны штрихи у новых координат. Далее штрихи писаться не будут. Для третьего цвета кварка  $q_3$  формула выглядит так же.

Из выражений (10.2.18) и (10.2.19), согласно определениям (10.1.7), следует, что получившиеся волновые функции должны интерпретироваться как описывающие частицы с двумя проекциями изоспина

$$u_L \rightarrow T_3 = +\frac{1}{2}; \quad d_L \rightarrow T_3 = -\frac{1}{2}, \quad (10.2.21)$$

т. е. дублет левых кварков в согласии с произведенным отождествлением.

Для того чтобы у этих компонент кварков было соответствие со стандартной теорией и по значениям гиперзаряда  $Y$ , следует положить

$$c_y = \frac{1}{3} \rightarrow Y(u_L) = Y(d_L) = \frac{1}{3}. \quad (10.2.22)$$

Таким образом, установлен физический смысл двух констант в преобразованиях координат (10.2.9): константа  $c_x$  характеризует переход от константы сильных взаимодействий, определяемой  $\gamma$ , к константе электрослабых взаимодействий, выражающейся через  $\alpha$ , а вторая константа  $c_y$  характеризует гиперзаряд кварков.

Применяя формулу Гелл-Манна (10.1.7), приходим к известным значениям электрических зарядов кварков:

$$Q(u_L) = +\frac{2}{3}, \quad Q(d_L) = -\frac{1}{3}. \quad (10.2.23)$$

Легко убедиться, что в фермионном лагранжиане в выражении  $\bar{\Psi} \Gamma^M g_M^\mu \partial_\mu \Psi$  в гиперплотности лагранжиана вида (9.2.29) содержатся кварковые токи из левых компонент, взаимодействующие с  $W_\mu^\pm$ -бозонами, так как для таких комбинаций сокращаются экспоненциальные слагаемые от фермионных частиц и векторного бозонного поля. Таким образом, в теории остаются лишь наблюдаемые на опыте взаимодействия, описываемые выражением

$$(\bar{u}_L, \bar{d}_L) i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i g_2 \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a - i g_1 \frac{Y_L}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}. \quad (10.2.24)$$

## II. Правые компоненты кварков

Перейдем к обсуждению правых компонент кварков  $u_R$  и  $d_R$ . Как известно, это синглетные состояния, которым соответствует изоспин  $T_3 = 0$ . В данной теории это означает, что волновые функции кварков не зависят от координаты  $x^6$ . Развивая предложенную выше идеологию, предположим, что кварк, находившийся до этого на гиперповерхности  $x^6 = x^7$ , выходит теперь еще и на гиперповерхность  $x^{15} = x^6$  (с учетом

сделанной замены переменных). Тогда остается всего одна дополнительная координата  $x'^5$ , и формулы (10.2.18) – (10.2.19) принимают вид:

$$u_L \exp \left[ i\alpha \left( \frac{1}{3}x'^5 + x'^6 \right) \right] \rightarrow u_R \exp \left[ i\alpha \left( \frac{1}{3}x'^5 + x'^5 \right) \right] = u_R \exp \left( i\alpha \frac{4}{3}x'^5 \right); \quad (10.2.25)$$

$$d_L \exp \left[ i\alpha \left( \frac{1}{3}x'^5 - x'^6 \right) \right] \rightarrow d_R \exp \left[ i\alpha \left( \frac{1}{3}x'^5 - x'^5 \right) \right] = u_R \exp \left( -i\alpha \frac{2}{3}x'^5 \right). \quad (10.2.26)$$

Из этих формул получаем известные значения квантовых чисел для правых компонент кварков:

$$Y(u_R) = \varepsilon_5 = \frac{4}{3}, \quad T_3(u_R) = 0, \quad Y(d_R) = \varepsilon_5 = -\frac{2}{3}, \quad T_3(d_R) = 0. \quad (10.2.27)$$

Из них получаются известные значения электрических зарядов

$$Q(u_R) = +\frac{2}{3}, \quad Q(d_R) = -\frac{1}{3}. \quad (10.2.28)$$

Очевидно, что  $u_R$  и  $d_R$  не взаимодействуют с  $W_\mu^\pm$ , так как в них нет зависимости от  $x^6$ , но они дадут вклад в нейтральные токи, пропорциональные  $\bar{u}_R \gamma^\mu u_R$  и  $\bar{d}_R \gamma^\mu d_R$ . Эти слагаемые входят в лагранжиан Вайнберга–Салама–Глэшоу.

### 10.3. Бозонный сектор самостоятельного варианта 7-мерной теории

Установив, что электрослабые взаимодействия элементарных частиц описываются в рамках 7-мерной геометрической теории, систематически разовьем ее, опираясь на найденные выше закономерности. В качестве гиперплотности лагранжиана бозонного сектора данной геометрической теории следует взять 7-мерную гиперплотность скалярной кривизны и далее действовать по рецептам предыдущей главы. Опять будем использовать две возможные сигнатуры по дополнительным координатам  $(+ - - - | \mp - -)$ .

#### 10.3.1. Триадный метод в 7-мерной теории

##### I. Алгебра 7-мерной теории

1. В самом общем случае для описания спинорной материи необходимо использовать септадный метод, однако при рассмотрении бозонного

сектора можно ограничиться триадным методом, когда 7-мерная метрика  $G_{MN}$  представляется в  $4 + 1 + 1 + 1$ -расщепленном виде

$$G_{MN} = G_M(A)G_N(A) = g_{MN} \mp G_M(4)G_N(4) - G_M(5)G_N(5) - G_M(6)G_N(6), \quad (10.3.1)$$

где индекс  $A$  пробегает 7 значений, и суммирование по этому индексу осуществляется с учетом используемой сигнатуры.

2. Выберем калибровку типа трижды «хронометрической» в 4-мерной ОТО. Пусть вектор  $G^A(4)$  направлен вдоль  $x^4$  при осуществлении первого  $6 + 1$ -расщепления, вектор  $G^A(5)$  выделен вторым  $5 + 1 + 1$ -расщеплением, а вектор  $G^A(6)$  выделен третьим расщеплением, т. е. пусть

$$G^A(4) = \frac{G_4^A}{\sqrt{\mp G_{44}}}; \quad G^A(5) = \frac{\tilde{G}_5^A}{\sqrt{-\tilde{G}_{55}}}; \quad G^A(6) = \frac{\hat{G}_6^A}{\sqrt{-\hat{G}_{66}}}, \quad (10.3.2)$$

где положено

$$\tilde{G}_{MN} = G_{MN} \pm G_M(4)G_N(4); \quad \hat{G}_{MN} = G_{MN} \pm G_M(4)G_N(4) + G_M(5)G_N(5).$$

После соответствующих выкладок компоненты 4-мерной метрики находятся в виде

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \pm G_\mu(4)G_\nu(4) + G_\mu(5)G_\nu(5) + G_\mu(6)G_\nu(6); \quad g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}, \quad (10.3.3)$$

где

$$G_\mu(4) = \frac{G_{\mu 4}}{\sqrt{\mp G_{44}}}; \quad G_\mu(5) = \frac{G_{45}G_{4\mu} - G_{44}G_{5\mu}}{\sqrt{\mp G_{44}(G_{44}G_{55} - G_{45}^2)}}; \quad (10.3.4)$$

$$G_\mu(6) =$$

$$= \frac{(G_{56}G_{45} - G_{55}G_{46})G_{4\mu} + (G_{45}G_{46} - G_{44}G_{56})G_{5\mu} + (G_{44}G_{55} - G_{45}^2)G_{6\mu}}{\sqrt{(G_{44}G_{55} - G_{45}^2)(G_{44}G_{55}G_{66} - G_{66}G_{45}^2 - G_{55}G_{46}^2 - G_{44}G_{56}^2 + 2G_{56}G_{46}G_{45})}}. \quad (10.3.5)$$

3. В данной 7-мерной теории имеется произвол в преобразованиях дополнительных координат. Исходя из использованной калибровки типа трижды «хронометрической» и фиксированного вида зависимостей от шестой координаты, допустимы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} x^4 &= c_4^4 x^4 + c_5^4 x^5 + c_6^4 x^6 + f_4(x^\mu); \\ x^5 &= c_5^5 x^5 + c_6^5 x^6 + f_5(x^\mu); \\ x^6 &= x^6 + f_6(x^\mu), \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

где  $c_r^s$  — некоторые вещественные параметры,  $f_4(x^\mu)$ ,  $f_5(x^\mu)$  и  $f_6(x^\mu)$  — произвольные функции от четырех классических координат.

Воспользуемся этим произволом и обратим в нуль недиагональные компоненты 7-мерного метрического тензора с дополнительными индексами, что означает

$$G^5(4) = G^6(4) = 0; \quad G^4(5) = G^6(5) = 0; \quad G^4(6) = G^5(6) = 0. \quad (10.3.7)$$

При этих условиях формулы (10.3.3)–(10.3.5) существенно упрощаются.

4. Будем полагать, что диагональные компоненты метрики с дополнительными индексами постоянны, что означает постоянство трех значений компонент триады с дополнительными индексами, для которых введем специальные обозначения:

$$G^4(4) \equiv \sigma_4; \quad G^5(5) \equiv \sigma_5; \quad G^6(6) \equiv \sigma_6. \quad (10.3.8)$$

В общем случае эти величины не равны друг другу.

5. Легко видеть, что 4-мерные ковариантные компоненты триады в общем случае имеют отличные от нуля составляющие, которые выражаются через векторные поля калибровочной модели электрослабых взаимодействий. Исходя из найденных выше выражений (10.2.12)–(10.2.14), компоненты триады в самом общем случае должны иметь вид:

$$G_\alpha(s) = b_s B_\alpha + a_s A(3)_\alpha + w_s^+ W_\alpha^+ \exp(2i\alpha x^6) + w_s^- W_\alpha^- \exp(-2i\alpha x^6), \quad (10.3.9)$$

где введены 12 коэффициентов  $b_s$ ,  $a_s$ ,  $w_s^\pm$ , при которых индекс  $s$  пробегает три значения:  $s = 4, 5, 6$ . Предстоит задача найти значения этих коэффициентов.

## II. Физико-геометрические тензоры

В 7-мерной геометрической теории имеют место формулы (9.2.8)–(9.2.14) для триадных физико-геометрических величин, только теперь их компонент меньше — только 27: три вида антисимметричных тензоров  $F_{MN}^{(s)}$ , три вида симметричных тензоров второго ранга  $D^{(s)}$ , девять видов векторов  $\Phi_M^{(sr)}$ , три вида векторов  $\Lambda_M^{(sr)}$ , и девять скаляров  $\Omega^{(srp)}$ . При выбранной калибровке и наложенных выше условиях постоянства дополнительных компонент метрического тензора 15 видов величин обращаются в нуль, согласно (9.2.15). Остаются лишь 12 физико-геометрических тензоров вида (9.2.16) и (9.2.17). Ввиду особой важности антисимметричных тензоров для описания векторных бозонов, выпишем их явно

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^{(s)} &= \frac{1}{2} g_\alpha^M g_\beta^N (G_M(s), N - G_N(s), M) = \\ &= \frac{1}{2} [(G_\alpha(s), \beta - G_\beta(s), \alpha) + \sigma_6 (G_\beta(6) G_\alpha(s), 6 - G_\alpha(6) G_\beta(s), 6)], \quad (10.3.10) \end{aligned}$$

где справа учтено дифференцирование лишь по координате  $x^6$  ввиду зависимости векторов триады только от этой дополнительной координаты, согласно (10.3.9). Обратим особое внимание на нелинейные слагаемые справа в (10.3.10), соответствующие неабелевому характеру калибровочных полей  $A(s)_\mu$  в модели Вайнберга—Салама—Глэшоу.

### III. Триадные операторы дифференцирования

Согласно общей для монадного, диадного и т. д. методике триадные операторы дифференцирования записываются в виде, соответствующем (9.2.18)–(9.2.22):

$$\partial_4^{(*)} = G^N(4) \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma_4 \frac{\partial}{\partial x^4}; \quad (10.3.11)$$

$$\partial_5^{(*)} = G^N(5) \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma_5 \frac{\partial}{\partial x^5}; \quad (10.3.12)$$

$$\partial_6^{(*)} = G^N(6) \frac{\partial}{\partial x^N} = \sigma_6 \frac{\partial}{\partial x^6}; \quad (10.3.13)$$

$$\partial_\alpha^{(*)} = g_\alpha^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mp G_\alpha(4)\partial_4^{(*)} + G_\alpha(5)\partial_5^{(*)} + G_\alpha(6)\partial_6^{(*)}, \quad (10.3.14)$$

где во избежание возможных недоразумений введены небольшие изменения в обозначениях операторов, по сравнению с формулами (9.2.18)–(9.2.22).

Оператор (10.3.14) соответствует «удлиненной» производной в калибровочной модели Вайнберга—Салама—Глэшоу. Очевидно, что дополнительные к частной производной слагаемые возникают лишь для функций, зависящих от дополнительных координат. В модели Вайнберга—Салама—Глэшоу это поля, обладающие гиперзарядом  $Y$  или изотопическим спином, следовательно, в 7-мерной геометрической теории зависимость волновых функций частиц от дополнительных координат соответствует наличию у них изотопического спина или гиперзаряда. Операторы (10.3.12) и (10.3.13) дают значения гиперзаряда и проекции изотопического спина.

Оператор дифференцирования (10.3.11), как и в предыдущей главе, следует интерпретировать как массовый, т. е.

$$\partial_4^{(*)}\Psi \sim m\Psi. \quad (10.3.15)$$

Зависимость от  $x^4$  ниже будет вводиться в конформный фактор.

#### 10.3.2. Геометрическая часть плотности лагранжиана

В качестве гиперплотности лагранжиана бозонного сектора выбирается гиперплотность 7-мерной скалярной кривизны. Скалярная кривизна

на после процедуры  $4 + 1 + 1 + 1$ -расщепления приобретает вид

$${}^7R = {}^4R \pm F_{\alpha\beta}^{(4)} F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)} F^{(5)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(6)} F^{(6)\alpha\beta} + {}^7R_{(m)}. \quad (10.3.16)$$

Здесь символом  ${}^7R_{(m)}$  обозначены слагаемые, содержащие физико-геометрический тензор  $\Phi_M^{(ab)}$ , определяющий массовые вклады (см. (9.2.25)).

Расписывая компоненты геометрических тензоров напряженностей через векторы триады (10.3.9) и производя усреднение по периодам компактификации дополнительных размерностей, находим вклады векторных полей в геометрическую часть плотности лагранжиана 7-мерной теории:

$$\begin{aligned} & 4 \left( \pm F_{\alpha\beta}^{(4)} F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)} F^{(5)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(6)} F^{(6)\alpha\beta} \right) \Rightarrow F(B)_{\alpha\beta} F(B)^{\alpha\beta} (\pm b_4^2 + b_5^2) + \\ & + [F(1)_{\alpha\beta} F(1)^{\alpha\beta} + F(2)_{\alpha\beta} F(2)^{\alpha\beta}] (\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) + \\ & + F(3)_{\alpha\beta} F(3)^{\alpha\beta} (\pm a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + F(B)_{\alpha\beta} F(3)^{\alpha\beta} 2(\pm b_4 a_4 + b_5 a_5) + \\ & + F(B)_{\alpha\beta} A(1)^\alpha A(2)^\beta 8\alpha\sigma_6 [\pm b_4 (w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+) + b_5 (w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+)] + \\ & + [F(1)_{\alpha\beta} A(2)^\alpha A(3)^\beta + F(2)_{\alpha\beta} A(3)^\alpha A(1)^\beta] \times \\ & \quad \times 8\alpha\sigma_6 a_6 (\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) - \\ & - F(3)_{\alpha\beta} A(1)^\alpha A(2)^\beta \times \\ & \times 8\alpha\sigma_6 [\pm a_4 (w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+) + a_5 (w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+) + 2a_6 w_6^+ w_6^-] + \\ & + [A(1)_\alpha A(1)^\alpha A(3)_\beta A(3)^\beta + A(2)_\alpha A(2)^\alpha A(3)_\beta A(3)^\beta] - \\ & - (A(1)_\alpha A(3)^\alpha)^2 - (A(2)_\alpha A(3)^\alpha)^2] 8\alpha^2 \sigma_6^2 a_6^2 (\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) + \\ & + [A(1)_\mu A(1)^\mu A(2)_\beta A(2)^\beta - (A(1)_\alpha A(2)^\alpha)^2] \times \\ & \times 8\alpha^2 \sigma_6^2 [\pm (w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+)^2 + (w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+)^2 + 4(w_6^+ w_6^-)^2]. \quad (10.3.17) \end{aligned}$$

Здесь использованы введенные выше обозначения для физических полей из калибровочной модели электрослабых взаимодействий. Кроме того, использовано дополнительное условие

$$b_6 = 0, \quad (10.3.18)$$

приводящее к исчезновению произведений из перекрестных слагаемых вида  $B_\alpha A(s)^\alpha$ , которых нет в стандартной калибровочной модели.

## 10.4. Сведения из калибровочной модели электрослабых взаимодействий

Изложим самые необходимые сведения из стандартной калибровочной модели Вайнберга—Салама—Глэшоу (см. [120, 151, 185], а также разд. 12.2). Она строится на основе плотности лагранжиана, имеющего структуру, аналогичную теории сильных взаимодействий (9.3.2):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Bos} + (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_F) + \mathcal{L}_m, \quad (10.4.1)$$

где  $\mathcal{L}_0$  — плотность лагранжиана свободного фермионного поля;

$\mathcal{L}_F$  — описывает взаимодействие фермионных полей с векторными калибровочными полями (фермионный сектор);

$\mathcal{L}_{Bos}$  — описывает плотность лагранжиана векторных калибровочных полей (бозонный сектор);

$\mathcal{L}_m$  — часть плотности лагранжиана, описывающая вклады в массы частиц (массовый сектор). Сюда входит плотность лагранжиана хиггсовских скалярных полей и члены, описывающие их взаимодействие с другими полями.

Все эти составные части тесно связаны друг с другом. Из идеологии излагаемой здесь геометрической теории очевидно, что бозонный сектор теории описывается слагаемыми из плотности многомерной скалярной кривизны, а фермионные поля вводятся в теорию извне.

### 10.4.1. Бозонный сектор калибровочной модели

1. В общепринятой модели Вайнберга—Салама—Глэшоу электрослабые взаимодействия между фермионами переносятся четырьмя промежуточными векторными полями, вводимыми калибровочным образом путем локализации группы  $U(1) \times SU(2)$ . Одно поле  $B_\mu$  возникает из локализации 1-параметрической группы  $U(1)$ , а три векторных поля  $A(s)_\mu$  — из локализации 3-параметрической группы  $SU(2)$ . Два из названных полей ( $A(1)_\mu$  и  $A(2)_\mu$ ) являются электрически заряженными, а остальные два ( $B_\mu$  и  $A(3)_\mu$ ) — электрически нейтральны.

2. Бозонная часть плотности лагранжиана записывается следующим образом

$$\mathcal{L}_{Bos} = -\frac{1}{16\pi c} F(B)_{\mu\nu} F(B)^{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi c} Sp \vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu}, \quad (10.4.2)$$

где  $F(B)_{\mu\nu}$  — тензор напряженности калибровочного поля  $B_\mu$  имеет вид

$$F(B)_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (10.4.3)$$

а тензоры напряженностей трех полей, соответствующих калибровочной группе  $SU(2)$ , записываются в форме

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \vec{A}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{ig_2}{\hbar c} (\vec{A}_\mu \vec{A}_\nu - \vec{A}_\nu \vec{A}_\mu), \quad (10.4.4)$$



где  $g_2$  — константа, характеризующая взаимодействия с калибровочными полями группы  $SU(2)$ , тогда как константа  $g_1$  характеризует взаимодействие с калибровочным полем  $B_\alpha$  группы  $U(1)$ . Здесь векторные потенциалы полей представляются в матричном виде  $\vec{A}_\mu = (1/2)A(s)_\mu\sigma(s)$ , где  $\sigma(s)$  — 2-рядные матрицы Паули, записанные в (7.1.11). Дополнительные слагаемые («неабелевы хвосты») связаны с неабелевостью группы  $SU(2)$ .

Можно показать, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi c}Sp\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} = & -\frac{1}{16\pi c}\{[F(1)_{\mu\nu}F(1)^{\mu\nu} + F(2)_{\mu\nu}F(2)^{\mu\nu} + F(3)_{\mu\nu}F(3)^{\mu\nu}] + \\ & + \frac{4g_2}{\hbar c}[F(1)_{\mu\nu}A(2)^\mu A(3)^\nu + F(2)_{\mu\nu}A(3)^\mu A(1)^\nu + F(3)_{\mu\nu}A(1)^\mu A(2)^\nu] + \\ & + \frac{2g_2^2}{(\hbar c)^2}[A(1)_\mu A(1)^\mu A(2)_\nu A(2)^\nu + A(1)_\mu A(1)^\mu A(3)_\nu A(3)^\nu + A(2)_\mu A(2)^\mu A(3)_\nu A(3)^\nu - \\ & - (A(1)_\mu A(2)^\mu)^2 - (A(1)_\mu A(3)^\mu)^2 - (A(2)_\mu A(3)^\mu)^2]\}. \end{aligned} \quad (10.4.5)$$

3. Из первичных калибровочных полей  $B_\mu$  и  $A(3)_\mu$  строятся в виде линейных комбинаций векторные потенциалы электромагнитного поля  $A_\mu$  и промежуточного Z-бозона  $Z_\mu$ :

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + A(3)_\mu \sin \theta_W; \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + A(3)_\mu \cos \theta_W, \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

где  $\theta_W$  — угол Вайнберга, выражаемый через константы  $g_1$  и  $g_2$  следующим образом:

$$\sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \quad \cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \quad \tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}. \quad (10.4.7)$$

Экспериментальным образом найдено, что  $\theta_W \simeq 28,4^\circ$ .

4. Вместо другой пары первичных векторных полей  $A(1)_\mu$  и  $A(2)_\mu$  вводятся потенциалы заряженных W-бозонов:

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(1)_\mu + iA(2)_\mu]; \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}[A(1)_\mu - iA(2)_\mu]. \quad (10.4.8)$$

### 10.4.2. Фермионный сектор калибровочной модели

1. Фермионная часть плотности лагранжиана обычно расписывается, во-первых, для частиц лишь одного поколения частиц и, во-вторых, как правило, подразумевается дублет именно лептонных частиц. Плотность лагранжиана для лептонов представляется в виде:

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_F = i\hbar c[(\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu^{(*)}L) + (\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{(*)}e_R) + (\bar{\nu}_R\gamma^\mu\partial_\mu^{(*)}\nu_R)], \quad (10.4.9)$$

где  $L$  и  $\bar{L}$  — 2-компонентные столбец и строка, характеризующие левые компоненты нейтрино и электрона,  $e_R$  — правая компонента электрона,  $\nu_R$  —

правая компонента нейтрино (если она имеется), а оператор  $\partial_\mu^{(*)}$  имеет вид

$$\partial_\mu^{(*)} = I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_1 Y}{\hbar c} I_2 B_\mu - \frac{ig_2}{\hbar c} T(k) A(k)_\mu. \quad (10.4.10)$$

Здесь  $g_1$  — константа, характеризующая взаимодействие с калибровочным полем группы  $U(1)$ ,  $Y$  — гиперзаряд,  $T(s)$  — матричная величина, выражаемая через матрицы Паули,  $I_2$  — единичные  $2 \times 2$ -матрицы.

Для других двух поколений лептонов записываются еще два комплекта аналогичных выражений.

2. В модели Вайнберга—Салама—Глэшоу вводится ряд постулатов, уточняющих характер взаимодействия нейтрино, левых и правых компонент электрона с калибровочными векторными полями:

- а) Взаимодействие с полем  $B_\mu$  характеризуется значением гиперзаряда  $Y$ . Постулируется, что для левых компонент нейтрино и электрона гиперзаряд  $Y = -1$ , а для правой компоненты электрона  $Y = -2$ .
- б) Взаимодействие с полями  $A(s)_\mu$  характеризуется проекцией изотопического спина  $T_3$ . Постулируется, что левые компоненты нейтрино и массивного лептона (электрона) образуют изотопический дублет в изотопическом пространстве: для нейтрино  $T_3 = +1/2$ , для левой компоненты электрона  $T_3 = -1/2$ . Правая компонента электрона полагается изотопическим синглетом, для нее  $T_3 = 0$ .

В геометрической теории данному оператору дифференцирования соответствует многомерный оператор типа (10.3.14).

3. Отдельно запишем через введенные величины часть «удлиненной» производной (10.4.10), характеризующую взаимодействие фермионов с нейтральными векторными полями,

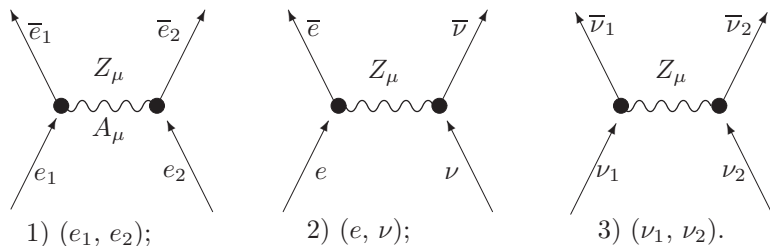
$$\partial_\mu^{(*)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iQe}{\hbar c} A_\mu + \frac{i\bar{g}}{\hbar c} g_{(AB)} Z_\mu, \quad (10.4.11)$$

где введены заряды, характеризующие взаимодействия частиц с электромагнитным ( $Q$  в единицах электрического заряда  $e$ ) и  $Z$ -бозонным ( $g_{(AB)}$  в единицах  $\bar{g}$ ) полями:

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3; \quad e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \quad (10.4.12)$$

$$g_{(AB)} = T_3 - Q \sin^2 \theta_W; \quad \bar{g} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}. \quad (10.4.13)$$

Здесь у заряда слабых  $Z$ -взаимодействий  $g_{(AB)}$  первый индекс означает вид частицы (электрон ( $e$ ), нейтрино ( $\nu$ ) или вид кварка), а второй — компоненту рассматриваемой частицы: левую ( $L$ ) или правую ( $R$ ).



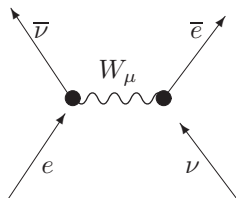
**Рис. 10.1.** Взаимодействия фермионов через промежуточные нейтральные векторные бозоны.

Выпишем в виде таблицы введенные здесь заряды частиц.

Частицы	Ароматы	$Y$	$T_3$	$Q$	$g_{(AB)}$
Левые кварки	$u_L, c_L, t_L$	$+1/3$	$+1/2$	$+2/3$	$+1/2 - (2/3) \sin^2 \theta_W$
	$d_L, s_L, b_L$	$+1/3$	$-1/2$	$-1/3$	$-1/2 + (1/3) \sin^2 \theta_W$
Правые кварки	$u_R, c_R, t_R$	$+4/3$	$0$	$+2/3$	$-(2/3) \sin^2 \theta_W$
	$d_R, s_R, b_R$	$-2/3$	$0$	$-1/3$	$+(1/3) \sin^2 \theta_W$
Левые лептоны	$\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L}$	$-1$	$1/2$	$0$	$1/2$
	$e_L, \mu_L, \tau_L$	$-1$	$-1/2$	$-1$	$-1/2 + \sin^2 \theta_W$
Правые лептоны	$\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$e_R, \mu_R, \tau_R$	$-2$	$0$	$-1$	$\sin^2 \theta_W$
Векторные бозоны	$A_\alpha, Z_\alpha$	$0$	$0$	$0$	$0$
	$W_\alpha^\pm$	$0$	$\pm 1$	$\pm 1$	$0$

(10.4.14)

4. Взаимодействия фермионов через промежуточные нейтральные векторные бозоны  $A_\mu$  и  $Z_\mu$  проиллюстрированы диаграммами типа Фейнмана на рисунке 10.1, а взаимодействие фермионов через промежуточные векторные бозоны проиллюстрировано на диаграмме рисунка 10.2.



**Рис. 10.2.** Взаимодействие нейтрино и массивного лептона через промежуточные  $W$ -бозоны.

5. Подставляя выписанные формулы в (10.4.9), находим для лагранжиана взаимодействия лептонов с векторными бозонами:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_F = & -e [(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R)] A_\mu + \\
 & + \frac{3g_1^2 - g_2^2}{4\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} [(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R)] Z_\mu - \\
 & - \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{4} [(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) - 2(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)] Z_\mu + \\
 & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^- + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) W_\mu^+. \tag{10.4.15}
 \end{aligned}$$

## 10.5. Принцип соответствия бозонных секторов в трех вариантах теории

Приступим к нахождению коэффициентов, содержащихся в записи компонент триады (10.3.9) через физические векторные поля. Это будем делать в два этапа: сначала сопоставим 7-мерную теорию, развитую в разд. 10.3, с калибровочной моделью Вайнберга—Салама—Глэшоу (из разд. 10.4), а затем устраним остающийся после первого этапа произвол отождествлением с 7-мерием (из разд. 10.2), полученным из 8-мерной геометрической теории грави-сильных взаимодействий.

### 10.5.1. Соответствие с калибровочной моделью

**1. Условия соответствия с калибровочной моделью.** Отождествим слагаемые из 7-мерной скалярной кривизны (10.3.17) геометрической теории с бозонным сектором стандартной модели Вайнберга—Салама—Глэшоу (10.4.5). Эти выражения совпадают, если выполняются следующие условия на введенные коэффициенты:

$$\pm b_4^2 + b_5^2 = C_1^2; \quad b_6 = 0; \tag{10.5.1}$$

$$\pm a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = C_1^2; \tag{10.5.2}$$

$$\pm b_4 a_4 + b_5 a_5 = 0; \tag{10.5.3}$$

$$\pm b_4 x + b_5 y = 0; \tag{10.5.4}$$

$$\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^- = C_1^2; \tag{10.5.5}$$

$$a_6 (\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = -C_1^2 C_2; \tag{10.5.6}$$

$$a_6^2 (\pm w_4^+ w_4^- + w_5^+ w_5^- + w_6^+ w_6^-) = C_1^2 C_2^2; \tag{10.5.7}$$

$$\pm a_4 x + a_5 y + a_6 z = C_1^2 C_2; \tag{10.5.8}$$

$$\pm x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2 C_2^2, \tag{10.5.9}$$

где использованы обозначения:

$$C_1^2 = \frac{4G}{c^4}; \quad C_2 = \frac{g_2}{2\alpha\sigma_6(\hbar c)}; \quad (10.5.10)$$

$$x = w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+; \quad y = w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+; \quad z = 2w_6^+ w_6^-. \quad (10.5.11)$$

**2. Решения для коэффициентов при нейтральных полях.** Из условий (10.5.6) и (10.5.7) сразу же находится коэффициент

$$a_6 = -C_2 = \frac{-g_2}{2\alpha\sigma_6(\hbar c)}. \quad (10.5.12)$$

Выражения (10.5.1)–(10.5.3) представляют собой три условия на оставшиеся пока неопределенными 4 константы  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $b_4$  и  $b_5$ . Выразим их через одну константу  $b_4$ :

$$a_4^2 = \frac{(C_1^2 - C_2^2)}{C_1^2} (C_1^2 - b_4^2); \quad a_5^2 = \pm \frac{(C_1^2 - C_2^2)}{C_1^2} b_4^2; \quad a_6 = -C_2; \quad (10.5.13)$$

$$b_4 - \text{ произвольно}; \quad b_5^2 = C_1^2 \mp b_4^2; \quad b_6 = 0, \quad (10.5.14)$$

где верхний знак соответствует сигнатуре (+ --- | ---), а нижний — сигнатуре (+ --- | + ---).

**3. Решения для коэффициентов при векторных полях.** Из трех уравнений (10.5.4), (10.5.8) и (10.5.9) легко находятся три комбинации  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Так, выражая  $x$  и  $y$  через  $z$ , для последнего получаем квадратное уравнение

$$z^2 + 2C_2^2 z + C_2^4 = 0 \rightarrow z = -C_2^2 = 2w_6^+ w_6^-, \quad (10.5.15)$$

откуда находим

$$x = \pm \frac{C_2}{C_1} \sqrt{(C_1^2 - C_2^2)(C_1^2 - b_4^2)} = w_4^+ w_6^- + w_4^- w_6^+; \quad (10.5.16)$$

$$y = \pm \frac{C_2 b_4}{C_1} \sqrt{\pm(C_1^2 - C_2^2)} = w_5^+ w_6^- + w_5^- w_6^+. \quad (10.5.17)$$

### 10.5.2. Соответствие с 8-мерной теорией

1. Из проведенного сопоставления с калибровочной моделью видно, что достаточно полная информация получена для вида лишь одной компоненты триады  $G_\mu(6)$ . Это обусловлено тем, что заряженные векторные

бозоны зависят лишь от одной дополнительной координаты  $x^6$ . Коэффициенты перед физическими полями двух других векторов триады известны с большим произволом. Его устранить помогает информация о 7-мерной теории, полученная переходом от 8-мерия. В частности, из сравнения (10.2.14) и (10.3.9) находим

$$w_6^- = -w_6^+ \equiv w_6 = \pm \frac{C_2}{\sqrt{2}}. \quad (10.5.18)$$

Учитывая (10.2.14), из (10.5.18) получаем

$$w_6 = -\frac{C_o}{\sqrt{2}} = \pm \frac{C_2}{\sqrt{2}} \rightarrow C_2 = \mp C_o. \quad (10.5.19)$$

2. Две пары соотношений (10.2.12), (10.3.9) и (10.3.9), (10.2.13) соответствуют друг другу лишь при условии совпадения констант

$$C_1^2 = C_2^2 \equiv C^2 \rightarrow \sigma_6 = \frac{c^2}{4\alpha\sqrt{G}(\hbar c)}g_2, \quad (10.5.20)$$

что позволяет из (10.5.16) и (10.5.17) найти

$$w_4^+ = w_4^- \equiv w_4; \quad w_5^+ = w_5^- \equiv w_5. \quad (10.5.21)$$

Аналогично, из (10.5.13) находим значения коэффициентов при нейтральных векторных полях

$$a_4 = 0; \quad a_5 = 0; \quad a_6 = -C. \quad (10.5.22)$$

3. Из сравнения компонент триады в самостоятельном варианте 7-мерной теории и теории, полученной из 8-мерия, находим физическую интерпретацию двух нейтральных полей в формулах (10.2.12)–(10.2.15):

$$A_\alpha^{(1)} = uB_\alpha; \quad A_\alpha^{(1)} + A_\alpha^{(2)} = -CA(3)_\alpha, \quad (10.5.23)$$

где  $u$  — пока неизвестный коэффициент.

4. Из (10.5.23) и (10.2.12)–(10.2.13) для коэффициентов имеем

$$b_4 = Cu; \quad b_5 = \frac{Cu}{\sqrt{2}}. \quad (10.5.24)$$

Подставляя эти выражения в условия (10.5.14), находим

$$b_5^2 \pm b_4^2 = C^2 \rightarrow u = \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow b_4 = C\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad b_5 = \frac{C}{\sqrt{3}}. \quad (10.5.25)$$

Отсюда следует, что нужно выбирать знак плюс.

Легко убедиться, что при значениях

$$w_4 = C; \quad w_5 = \frac{C}{\sqrt{2}} \quad (10.5.26)$$

условие (10.5.5) выполняется тождественно.

5. Собирая все полученные данные о коэффициентах, векторы триады можно представить в следующем виде:

$$G_\alpha(4) = C \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} B_\alpha + (W_\alpha^+ \exp(2i\alpha x^6) + W_\alpha^- \exp(-2i\alpha x^6)) \right]; \quad (10.5.27)$$

$$G_\alpha(5) = C \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} B_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\alpha^+ \exp(2i\alpha x^6) + W_\alpha^- \exp(-2i\alpha x^6)) \right]; \quad (10.5.28)$$

$$G_\alpha(6) = C \left[ \pm A(3)_\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\alpha^+ \exp(2i\alpha x^6) - W_\alpha^- \exp(-2i\alpha x^6)) \right]. \quad (10.5.29)$$

## 10.6. Заряды взаимодействий с нейтральными бозонами

Чтобы определить векторные физические поля и ввести заряды частиц, необходимо проанализировать определение оператора триадного 4-мерного дифференцирования (10.3.14). После непосредственной подстановки в него векторов триады, записанных через физические поля, и дифференцируемых функций получают выражения, содержащие дополнительные координаты, т. е. пока не совпадающие с калибровочно инвариантной удлиненной производной в модели Вайнберга—Салама—Глэшоу. Аналог последней получается после процедуры усреднения по скрытым размерностям, что должно осуществляться не для отдельно взятых производных, а для квадратичных выражений, их содержащих. Именно такие квадратичные комбинации входят в физическую часть гиперплотности многомерного лагранжиана типа (9.1.4). При их усреднении экспоненциальные слагаемые дифференцируемых функций гасятся экспонентами сопряженных им функций (для нейтральной части удлиненной производной) или совместно с экспоненциальными слагаемыми векторных заряженных бозонов.

### 10.6.1. Нейтральные векторные поля и заряды кварков

1. Сосредоточим внимание на нейтральных частях «удлиненных» производных от *кварков*, которые нетрудно записать на основе сделан-

ных замечаний. Данная в разд. 10.2.2 интерпретация верхних и нижних кварков (левых и правых) справедлива лишь при постулате, что *контравариантные компоненты триады  $G'^s(s)$  в электрослабых взаимодействиях остаются одинаковыми*, как и в случае сильных взаимодействий, т. е. что  $G'^s(s) = G^s(s) = \tilde{\sigma}$ , вопреки формулам (10.2.16). Геометрически это означает, что 7-мерные векторы триады перестают быть нормированными на единицу.

Запишем нейтральную часть «удлиненной» производной для левых верхней и нижней компонент кварков  $u_L$  и  $d_L$ , определенных в (10.2.18) и (10.2.19):

$$\partial_\mu^{(*)} u_L \rightarrow \partial_\mu^{(*)} u_L = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\alpha\tilde{\sigma} (b_5 c_y B_\mu + a_6 A(3)_\mu) \right] u_L; \quad (10.6.1)$$

$$\partial_\mu^{(*)} d_L \rightarrow \partial_\mu^{(*)} d_L = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\alpha\tilde{\sigma} (b_5 c_y B_\mu - a_6 A(3)_\mu) \right] d_L, \quad (10.6.2)$$

где коэффициенты  $b_5$  и  $a_6$  определены в (10.5.24) и (10.5.22), а  $c_y = \varepsilon_5 = 1/3$ .

2. Чтобы ввести принятые в калибровочной модели заряды, следует перейти от векторов  $B_\mu$  и  $A(3)_\mu$  к электромагнитному и  $Z$ -бозонному векторным потенциалам. Формально определим векторный потенциал  $Z_\mu$ , в согласии с калибровочной моделью, из условия, что для частицы с  $\varepsilon_6 = -\varepsilon_5 = 1$ , т. е. нейтральной, согласно (10.1.7), в «удлиненной» производной вида (10.6.1) отсутствует электромагнитный потенциал. Это значит, что вектор  $Z_\mu$  имеет вид

$$Z_\mu = \frac{1}{C_3} (-b_5 B_\mu + a_6 A(3)_\mu), \quad (10.6.3)$$

где  $C_3$  — некоторая постоянная.

Электромагнитный векторный потенциал  $A_\mu$  будет представляться через те же два поля, однако с некоторыми другими коэффициентами  $c_b$  и  $c_a$ :

$$A_\mu = \frac{1}{C_3} (c_b B_\mu + c_a A(3)_\mu). \quad (10.6.4)$$

3. Три неизвестных коэффициента ( $c_b$ ,  $c_a$ ,  $C_3$ ) находятся из отождествления части соотношения (10.3.17), содержащей только нейтральные векторные поля, с выражением

$$\mathcal{L}'_{Bos} = -\frac{1}{16\pi c} [F(A)_{\alpha\beta} F(A)^{\alpha\beta} + F(Z)_{\alpha\beta} F(Z)^{\alpha\beta}]. \quad (10.6.5)$$

Здесь использованы обозначения:

$$F(A)_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad F(Z)_{\alpha\beta} = \frac{\partial Z_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial Z_\alpha}{\partial x^\beta}.$$



Потребовав, чтобы в (10.6.5) слева и справа совпадали коэффициенты при комбинациях  $F(B)_{\alpha\beta}F(B)^{\alpha\beta}$ ,  $F(3)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$  и  $F(B)_{\alpha\beta}F(3)^{\alpha\beta}$ , приходим к трем уравнениям для неизвестных коэффициентов.

4. Решая получившуюся систему уравнений, находим

$$A_\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{b_5^2 + a_6^2}} (a_6 B_\mu + b_5 A(3)_\mu) \equiv \pm [B_\mu \cos \theta_W + A(3)_\mu \sin \theta_W]; \quad (10.6.6)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{b_5^2 + a_6^2}} (-b_5 B_\mu + a_6 A(3)_\mu) \equiv -B_\mu \sin \theta_W + A(3)_\mu \cos \theta_W; \quad (10.6.7)$$

$$C_3^2 = b_5^2 + a_6^2, \quad (10.6.8)$$

где угол  $\theta_W$  соответствует углу Вайнберга в (10.4.6) – (10.4.7). В данном случае имеем

$$\sin \theta_W = \frac{b_5}{\sqrt{b_5^2 + a_6^2}} = \frac{1}{2}; \quad \cos \theta_W = \frac{a_6}{\sqrt{b_5^2 + a_6^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (10.6.9)$$

что находится в хорошем соответствии с экспериментально найденным значением угла Вайнберга  $\theta_W \sim 28,4^\circ$ . Выражения (10.6.6) и (10.6.7) в точности совпадают с формулами (10.4.6) калибровочной модели электрослабых взаимодействий.

Обратные соотношения имеют вид

$$B_\mu = A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W; \quad A(3)_\mu = A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W. \quad (10.6.10)$$

5. После подстановки выражений (10.6.10) в «удлиненную» производную вида (10.6.1) для произвольной частицы с электрическим зарядом  $Q = (\varepsilon_5 + \varepsilon_6)/2$  и проекцией изотопического спина  $T_3 = \varepsilon_6/2$  получаем

$$\partial_\mu^+ = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2i\alpha\tilde{\sigma} \left( A_\mu Q \frac{a_6 b_5}{\sqrt{a_6^2 + b_5^2}} + Z_\mu \sqrt{a_6^2 + b_5^2} (T_3 - Q \sin^2 \theta_W) \right), \quad (10.6.11)$$

что совпадает с общеизвестным выражением из модели Вайнберга–Салама–Глэшоу (10.4.11). Отсюда, учитывая ранее найденные значения коэффициентов  $b_5$  и  $a_6$ , а также константу  $C$  в (10.5.20), имеем выражения для электрического заряда электрона

$$e = \frac{2\alpha\tilde{\sigma}a_6b_5}{\sqrt{a_6^2 + b_5^2}} (\hbar c) = \frac{4\sqrt{G}}{c^2} \alpha\tilde{\sigma} (\hbar c) \sin \theta = g_2 \sin \theta_W. \quad (10.6.12)$$

### 10.6.2. Заряды лептонов

В многомерных геометрических теориях типа теории Калуцы, как правило, встает проблема обоснования физически значимых гармоник циклических зависимостей от дополнительных координат. В самом общем случае возникает иллюзия разложения величин (как геометрических, так и физических) в ряды Фурье по циклическим зависимостям от скрытых размерностей. Коэффициенты этих разложений объявляются физически интерпретируемыми полями. С этих позиций формально можно смотреть на то, что делалось в предыдущей и в этой главе. Но тогда сразу же возникает ряд вопросов. Почему в геометрофизике используется лишь несколько минимальных значений циклических гармоник, тогда как данный подход позволяет говорить об их бесконечном числе, а следовательно, и о бесконечном числе возможных физических полей? Почему неучтенные поля не проявляются в физическом мире? Существуют ли критерии, позволяющие ограничить число полей?

Заметим, что в 8-мерной теории эти вопросы не стояли так остро: однотипные циклические зависимости волновых функций кварков от трех скрытых размерностей выглядят естественно. Три пары циклических зависимостей промежуточных векторных полей от скрытых размерностей также воспринимаются естественно, если иметь в виду назначение таких векторных полей — перемешивать цветовые состояния кварков. При данных исходных положениях можно не говорить о разложениях величин в ряды Фурье.

Поскольку 7-мерная теория получается посредством редукции из 8-мерной теории, то такой вопрос пока не возникал и в этой главе. Но он неизбежно встает, как только наряду с кварками в теории электрослабых взаимодействий начинают рассматривать и лептоны, которые характеризуются значениями гармоник и зарядов, отличающихся от кварковых. Более того, введенная выше универсальная формула (10.1.7) для значений электрических зарядов (в единицах заряда электрона  $e$ ) подразумевает возможность существования каких угодно гармоник. Возникает вопрос о возможных видах и состояниях лептонов даже в рамках одного поколения.

#### 1. Левые компоненты лептонов

Чтобы ответить на поставленные вопросы, запишем нейтральную часть удлиненной производной для левых компонент кварков, определенных в (10.2.18) и (10.2.19), *в согласии со строгими формулами, используя нормированные векторы триады*, когда контравариантные компоненты триады заданы выражениями (10.2.16). Тогда для кварка

$u_L \rightarrow \tilde{u}_L$  имеем

$$\partial_\mu^{(*)} \tilde{u}_L \rightarrow \partial_\mu^{(*)} \tilde{u}_L = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\gamma\sigma (b_5 B_\mu + a_6 A(3)_\mu) \right] \tilde{u}_L, \quad (10.6.13)$$

где коэффициенты  $b_5$  и  $a_6$  имеют прежние значения. При получении этого выражения сократились слагаемые  $c_x c_y = c_x/3$  и  $c_x$ , возникающие из дифференцирования показателя экспоненты (10.2.18), соответственно с коэффициентами при  $G'^5(5) = \sigma_5 = \sigma/c_x c_y$  и  $G'^6(6) = \sigma_6 = \sigma/c_x$ . Таким образом, в итоге пропала, во-первых, информация о значении гиперзаряда  $Y = 1/3$  кварка и, во-вторых, исчезло переопределение константы сильных взаимодействий  $\gamma$  на константу электрослабых взаимодействий  $\alpha$ .

Аналогичная формула получается для удлиненной производной от левого нижнего кварка с экспоненциальной зависимостью (10.2.19)

$$\partial_\mu^{(*)} \tilde{d}_L \rightarrow \partial_\mu^{(*)} \tilde{d}_L = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\gamma\sigma (b_5 B_\mu - a_6 A(3)_\mu) \right] \tilde{d}_L. \quad (10.6.14)$$

Отличие состоит лишь в знаке перед  $a_6 A(3)_\mu$ .

Анализ показывает, что частицы, для которых удлиненные производные имеют такой вид, следует **трактовать как лептоны** одного (первого) поколения. Поскольку коэффициенты при дополнительных координатах сократились и при дифференцировании получаются одинаковые по модулю значения, то будем считать, что частицы данного сорта (лептоны) характеризуются одинаковыми единичными гармониками  $\varepsilon_5 = 1$  и одинаковыми по модулю единица, но разными по знаку гармониками  $|\varepsilon_6| = 1$ . Учитывая формулу (10.1.7) для значений электрического заряда через гармоники, приходим к следующей интерпретации частиц (лептонов), получающихся из названных в разд. 10.2.2 компонент кварков: левый верхний кварк  $u_L$  соответствует левому (нижнему) позитрону  $\tilde{e}_L$  (антиэлектрону), тогда как левый нижний кварк  $d_L$  соответствует левой (верхней) компоненте антинейтрино  $\tilde{\nu}$ , т. е. имеем:

$$u_L \rightarrow \tilde{e}_L; \quad d_L \rightarrow \tilde{\nu}_L. \quad (10.6.15)$$

Очевидно, что для левых компонент лептонов (электрона  $e_L$  и электронного нейтрино  $\nu_L$ ) необходимо выбрать противоположные значения гармоник, т. е. они должны получаться из соответствующих левых компонент трех цветовых состояний антикварков. Для левой компоненты

электрона следует полагать

$$e_L \rightarrow \varepsilon_5 = -1; \quad \varepsilon_6 = -1, \rightarrow Q_e = -1. \quad (10.6.16)$$

Аналогично, для левой компоненты нейтрино имеем

$$\nu_L \rightarrow \varepsilon_5 = -1; \quad \varepsilon_6 = +1, \rightarrow Q_e = 0. \quad (10.6.17)$$

Легко видеть, что для так определенных левых компонент лептонов формально остаются справедливыми общие формулы, записанные для компонент кварков, если позаботиться о том, чтобы выполнялось соотношение для коэффициентов из формул (10.6.1) и (10.6.13):

$$\gamma\sigma = \alpha\tilde{\sigma}. \quad (10.6.18)$$

Таким образом, для левых компонент лептонов не нужны какие-либо новые значения гармоник в дополнение к тем, которые получаются из уже введенных в рамках 8-мерной теории.

## II. Правые компоненты лептонов

При записи удлиненных производных от правых компонент частиц следует учесть, что правые компоненты кварков определяются на иней 6-мерной гиперповерхности, нежели правые компоненты лептонов. Так, записанные в (10.2.25) и (10.2.26) формулы для *правых компонент кварков* соответствовали выходу на гиперповерхность, определяемую в штрихованных  $x'^s$  (после преобразований (10.2.9)) и первоначальных  $x^s$  координатах уравнениями:

$$x'^5 = x'^6 \rightarrow x^5 = -2x^6. \quad (10.6.19)$$

В этом случае получаются формулы такого же типа, что и для левых кварков, рассмотренные в предыдущем разделе.

*Правые компоненты лептонов* определяются выходом на иную гиперповерхность, которая в штрихованных и первоначальных координатах задается уравнениями:

$$x'^6 = 0 \rightarrow x^5 = x^6. \quad (10.6.20)$$

На данной гиперповерхности формулы для удлиненных производных, аналогичные (10.6.13) и (10.6.14), принимают вид:

$$\partial_\mu^{(*)}\tilde{u}_R \rightarrow \partial_\mu^{(*)}\tilde{u}_R = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2i\gamma\sigma b_5 B_\mu \right] \tilde{u}_R; \quad (10.6.21)$$

$$\partial_\mu^{(*)}\tilde{d}_R \rightarrow \partial_\mu^{(*)}\tilde{d}_R = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} + 0 \right] \tilde{d}_R, \quad (10.6.22)$$

т. е. частица, обозначенная как  $\tilde{d}_R$ , не зависит от дополнительных координат.

Интерпретируем получившиеся частицы таким же образом, как это делалось для левых компонент лептонов. Будем понимать, что  $\tilde{u}_R$  описывает правую компоненту позитрона, а  $\tilde{d}_R$  соответствует правой компоненте антинейтрино:

$$\tilde{u}_R \rightarrow \tilde{e}_R; \quad \tilde{d}_R \rightarrow \tilde{\nu}_R. \quad (10.6.23)$$

Тогда для правой компоненты электрона следует писать

$$e_R \rightarrow \varepsilon_5 = -2; \quad \varepsilon_6 = 0; \quad \rightarrow Q = -1 \quad (10.6.24)$$

в полном согласии с калибровочной моделью Вайнберга—Салама—Глэшоу.

Для гипотетической правой компоненты нейтрино все гармоники и заряды равны нулю, как и в общепринятой модели.

Таким образом, для правых компонент лептонов также нет необходимости волевым образом вводить гармоники зависимостей от дополнительных координат, — они получаются двумя ступенями редуцирования из 8-мерной теории.

На практике можно забыть различное происхождение компонент кварков и лептонов (использование разных значений компонент  $G^{I's}(s)$  и специфику вводимых гиперповерхностей) и писать общие стандартные формулы для «удлиненных» производных всех введенных выше частиц. При этом следует помнить, что эти формулы определены лишь для упомянутых выше случаев, а не для всех мыслимых гармоник.

## 10.7. Фермионный сектор 7-мерной теории

Для описания фермионных частиц (кварков и лептонов) в 7-мерной геометрической теории используется традиционное обобщение 2-компонентных спиноров на основе алгебры Клиффорда над полем вещественных чисел [84]. В данном случае 7 измерений с сигнатурой  $(+---|+-)$  фермионы описываются 8-компонентными комплексными спинорами. Для их описания в искривленном многообразии, прежде всего, необходимо осветить ряд ключевых моментов.

### 10.7.1. Септадный метод и обобщенные матрицы Дирака

1. В 7-мерной модели для описания фермионов следует использовать естественное обобщение тетрадного метода на случай семи измерений — *септадный метод*, в котором 7-мерный метрический тензор представ-

ляется в виде

$$G_{MN} = g_{MN} + \sum_r G_M(r)G_N(r) = G_M(P)G_N(P), \quad (10.7.1)$$

где  $P = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $r = 4, 5, 6$ ;  $G_M(P)$  — компоненты септады. Очевидно, использованный выше триадный метод можно трактовать как промежуточный между общековариантным метрическим и септадным методами. Для векторов септады имеют место условия ортонормировки

$$G_M(P)G^M(S) = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{при } P = S = 0, 4; \\ \mp 1 & \text{при } P = S = 4; \\ -1 & \text{при } P = S = 1, 2, 3, 5, 6; \\ 0 & \text{при } P \neq S. \end{array} \right\} \quad (10.7.2)$$

Септадный метод, как и монадный, диадный и т. д., можно представить в виде четырех составных частей. В алгебру септадного метода входит, в частности, проектирование всех тензорных величин посредством компонент септады, например, для произвольного вектора имеем  $B(P) = B_M G^M(P)$ , где  $B(P)$  скаляр. Индекс в скобках означает номер вектора септады, с которым свернут 7-мерный вектор  $B_M$ .

2. В 7-мерной модели роль матриц Дирака играют 8-рядные квадратные матрицы  $\Gamma_M$ , связанные с метрическим тензором соотношением

$$\Gamma_M \Gamma_N + \Gamma_N \Gamma_M = 2I_8 G_{MN}, \quad (10.7.3)$$

где  $I_8$  — 8-рядная единичная матрица. Поскольку эти матрицы являются функциями координат, то непосредственным обобщением постоянных матриц Дирака являются проекции матриц  $\Gamma_M$  на локальную систему из семи ортогональных векторов септады

$$\Gamma(P) = \Gamma_M G^M(P), \quad (10.7.4)$$

где зависимость от координат берут на себя компоненты септады, а матрицы  $\Gamma(P)$  являются постоянными образующими алгебры Клиффорда  $C(2, 5)$  или  $C(1, 6)$ .

3. Выберем следующее представление  $\Gamma$ -матриц для образующих алгебры  $C(2, 5)$ :

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma_N g^N(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(\alpha) \\ \gamma(\alpha) & 0 \end{pmatrix}; \quad (10.7.5)$$

$$\Gamma(4) = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}; \quad \Gamma(5) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma(6) = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.7.6)$$

где  $I_4$  — 4-рядная единичная матрица,  $\gamma(\alpha)$  — постоянные 4-рядные матрицы Дирака, напомним

$$\gamma_5 = i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.7.7)$$

Это представление характерно одинаковой блочной структурой всех матриц, удобной для дальнейшего расщепления 8-рядных величин на 4-рядные. Для случая алгебры  $C(1, 5)$  перед матрицей  $\Gamma(4)$  следует поставить мнимую единицу.

4. В согласии с выбранным представлением  $\Gamma$ -матриц, 8-компонентные  $\Psi$ -функции естественным образом расщепляются на две 4-компонентные функции:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(1) \\ \Psi(2) \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \Gamma(0) = (\bar{\Psi}(2), \bar{\Psi}(1)), \quad (10.7.8)$$

где

$$\bar{\Psi}(r) = \Psi^\dagger(r) \gamma(0); \quad r = 1, 2.$$

5. Разложим компоненты 4-рядных функций на левые и правые составляющие согласно стандартным формулам:

$$\Psi_L(r) = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi(r) \rightarrow \bar{\Psi}_L(r) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(r)(1 - i\gamma_5); \quad (10.7.9)$$

$$\Psi_R(r) = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi(r) \rightarrow \bar{\Psi}_R(r) = \frac{1}{2}\bar{\Psi}(r)(1 + i\gamma_5), \quad (10.7.10)$$

тогда имеем для (10.7.8)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L(1) + \Psi_R(1) \\ \Psi_L(2) + \Psi_R(2) \end{pmatrix};$$

$$\bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_L(2) + \bar{\Psi}_R(2); \bar{\Psi}_L(1) + \bar{\Psi}_R(1)). \quad (10.7.11)$$

6. В согласии с формулами (10.1.7), введем зависимость лептонных спинорных функций от  $x^5$  и  $x^6$  и произведем физическое отождествление входящих в (10.7.9) и (10.7.10) величин

$$\Psi_L(r) = \left( a_{Lr} \nu_L e^{i\alpha x^6} + b_{Lr} e_L e^{-i\alpha x^6} \right) e^{-i\alpha x^5}; \quad (10.7.12)$$

$$\Psi_R(s) = a_{Rr} \nu_R + b_{Rr} e_R e^{-2i\alpha x^5}, \quad (10.7.13)$$

где  $r = 1, 2$ . Здесь  $a_{Lr}$ ,  $a_{Rr}$ ,  $b_{Lr}$ ,  $b_{Rr}$  — постоянные коэффициенты, определяемые из условий нормировки и соображений соответствия получаемых формул со стандартными в модели Вайнберга—Салама—Глэшоу.

7. Для правых компонент можно положить

$$a_{R1} = a_{R2} = 0, \quad (10.7.14)$$

т. е. исключить правую компоненту нейтрино (оно не обладает массой покоя), а правую компоненту электрона будем рассматривать как изоскаляр, положив, в частности,

$$b_{R1} = 1; \quad b_{R2} = 0. \quad (10.7.15)$$

Тогда отличные от нуля коэффициенты левых компонент лептонов в двух строках (10.7.9) имеют характер 2-компонентного спинора из  $\nu_L$  и  $e_L$  в изотопическом пространстве.

### 10.7.2. Лагранжиан взаимодействия фермионов с векторными бозонами

1. Для записи удлиненной производной от фермионов обратимся к выражению для ковариантной производной от спинора (9.2.29) с заменой 8-мерных величин на 7-мерные. Так же, как и в случае 8-мерия, слагаемые с коэффициентом вращения Риччи соответствуют гравитационному взаимодействию, взаимодействию с векторными полями через аномальные моменты и частично массовым слагаемым.

Чтобы получить непосредственное (прямое) взаимодействие с векторными бозонами, перейдем к 4-мерной записи соответствующего слагаемого из (9.2.29), т. е. произведем процедуру 4 + 1 + 1 + 1-расщепления:

$$\begin{aligned} \Gamma^M \frac{\partial}{\partial x^M} = \tilde{\Gamma}^\alpha \left[ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \mp G_\alpha(4)\sigma_4 \frac{\partial}{\partial x^4} + G_\alpha(5)\sigma_5 \frac{\partial}{\partial x^5} + G_\alpha(6)\sigma_6 \frac{\partial}{\partial x^6} \right] - \\ - \sigma_6 \Gamma(6) \frac{\partial}{\partial x^6} - \Gamma(5)\sigma_5 \frac{\partial}{\partial x^5} - \Gamma(4)\sigma_4 \frac{\partial}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (10.7.16)$$

где  $\tilde{\Gamma}^\alpha = \Gamma^M g_M^\alpha$ . Здесь первое слагаемое справа соответствует свободным полям, второе, третье и четвертое слагаемые описывают взаимодействие с векторными полями, а остальные дают вклад в массовые члены. Ограничимся слагаемыми, описывающими лишь прямое взаимодействие с векторными бозонами, и пренебрежем зависимостью от  $x^4$ , т. е. отбросим второе слагаемое справа, тогда сигнатура клейновской координаты практически не играет роли.



2. Выпишем гиперплотность лагранжиана для таких слагаемых

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi} = & \frac{i\sqrt{\mp G^{(7)}}(\hbar c)}{2C_f} \left\{ \left( \bar{\Psi}\tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x^{\alpha}}\tilde{\Gamma}^{\alpha}\Psi \right) + \right. \\ & \left. + \sigma_5 G_{\alpha}(5) \left( \bar{\Psi}\tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial\Psi}{\partial x^5} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^5}\tilde{\Gamma}^{\alpha}\Psi \right) + \sigma_6 G_{\alpha}(6) \left( \bar{\Psi}\tilde{\Gamma}^{\alpha} \frac{\partial\Psi}{\partial x^6} - \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^6}\tilde{\Gamma}^{\alpha}\Psi \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10.7.17)$$

где  $C_f$  — некоторый размерный коэффициент, введенный для учета последующей процедуры усреднения по периодам дополнительных координат. Характерным общим свойством всех слагаемых в (10.7.17) является то, что в них  $\Gamma$ -матрицы входят квадратично (с учетом матрицы  $\Gamma(0)$  в определении  $\bar{\Psi}$ ). Это означает, что в выбранном представлении матриц не будет перекрестных членов из компонент  $\Psi(1)$  и  $\Psi(2)$ .

Кроме того, все парные комбинации из  $\Psi$ -функций будут состоять либо только из левых, либо только из правых компонент спиноров:

$$\bar{\Psi}(s)\gamma_{\mu}\Psi(s) = \bar{\Psi}_L(s)\gamma_{\mu}\Psi_L(s) + \bar{\Psi}_R(s)\gamma_{\mu}\Psi_R(s). \quad (10.7.18)$$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать постоянные матрицы Дирака в стандартном представлении обычным образом, т. е.  $\gamma(\mu) \rightarrow \gamma^{\mu}$ .

3. Подставим в (10.7.17) выражения для  $\Psi$  из (10.7.12) — (10.7.13) с произвольными значениями коэффициентов  $a$  и  $b$ , учтя лишь условия (10.7.14)–(10.7.15). В общем случае находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi} = & \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi(free)} + \tilde{\mathcal{L}}_{\Psi(int)} = \\ = & \frac{i}{2C_f} \sqrt{\mp G^{(7)}}(\hbar c) \left\{ (a_{L1}^* a_{L1} + a_{L2}^* a_{L2}) \left( \bar{\nu}_L \gamma^{\alpha} \frac{\partial \nu_L}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \bar{\nu}_L}{\partial x^{\alpha}} \gamma^{\alpha} \nu_L \right) + \right. \\ & + (b_{L1}^* b_{L1} + b_{L2}^* b_{L2}) \left( \bar{e}_L \gamma^{\alpha} \frac{\partial e_L}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \bar{e}_L}{\partial x^{\alpha}} \gamma^{\alpha} e_L \right) + \\ & + (b_{R1}^* b_{R1} + b_{R2}^* b_{R2}) \left( \bar{e}_R \gamma^{\alpha} \frac{\partial e_R}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \bar{e}_R}{\partial x^{\alpha}} \gamma^{\alpha} e_R \right) - \\ & - 2i\alpha (b_{R1}^* b_{R1} + b_{R2}^* b_{R2}) \sigma_5 (G_{\alpha}(5) + G_{\alpha}^*(5)) (\bar{e}_R \gamma^{\alpha} e_R) - \\ & - i\alpha (a_{L1}^* a_{L1} + a_{L2}^* a_{L2}) [\sigma_5 (G_{\alpha}(5) + G_{\alpha}^*(5)) - \sigma_6 (G_{\alpha}(6) + G_{\alpha}^*(6))] (\bar{\nu}_L \gamma^{\alpha} \nu_L) - \\ & - i\alpha (b_{L1}^* b_{L1} + b_{L2}^* b_{L2}) [\sigma_5 (G_{\alpha}(5) + G_{\alpha}^*(5)) + \sigma_6 (G_{\alpha}(6) + G_{\alpha}^*(6))] (\bar{e}_L \gamma^{\alpha} e_L) - \\ & - i\alpha (a_{L1}^* b_{L1} + a_{L2}^* b_{L2}) [\sigma_5 (G_{\alpha}(5) + G_{\alpha}^*(5)) + \sigma_6 (G_{\alpha}(6) - G_{\alpha}^*(6))] (\bar{\nu}_L \gamma^{\alpha} e_L) - \\ & \left. - i\alpha (a_{L1} b_{L1}^* + a_{L2} b_{L2}^*) [\sigma_5 (G_{\alpha}(5) + G_{\alpha}^*(5)) - \sigma_6 (G_{\alpha}(6) - G_{\alpha}^*(6))] (\bar{e}_L \gamma^{\alpha} \nu_L) \right\}. \end{aligned} \quad (10.7.19)$$

Здесь везде подразумевается, что соответствующие экспоненциальные слагаемые включены в выражения для  $\nu$  и  $e$ . В этой формуле первые три строки соответствуют стандартным членам плотности лагранжиана  $\mathcal{L}_{\Psi(free)}$  свободных фермионных полей  $\nu$  и  $e$ . В них экспоненциальные слагаемые погашают друг друга. Для полного совпадения со стандартной теорией следует положить

$$a_{L1}^* a_{L1} + a_{L2}^* a_{L2} = 1; \quad b_{L1}^* b_{L1} + b_{L2}^* b_{L2} = b_{R1}^* b_{R1} + b_{R2}^* b_{R2} = 1. \quad (10.7.20)$$

Остальные пять строк описывают взаимодействия лептонов через промежуточные векторные бозоны.

4. Подставим в последние четыре строки (10.7.19) выражения для компонент  $G_\alpha(5)$  и  $G_\alpha(6)$ , а также учтем экспоненциальные слагаемые фермионов. Произведем усреднение (интегрирование по периодам зависимостей) по дополнительным координатам. Это означает, что в (10.7.19) останутся лишь те слагаемые, в которых экспоненты бозонных слагаемых гасят экспоненты фермионных слагаемых. Очевидно, что в четвертой, пятой и шестой строках остаются лишь нейтральные векторные поля, т. е. этими строками описываются взаимодействия через нейтральные векторные бозоны. В последних двух строках выживают только заряженные векторные поля, т. е. этими строками описываются взаимодействия лептонов через заряженные векторные  $W^\pm$ -бозоны. В итоге плотность лагранжиана взаимодействия фермионов принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi(int)} = & \frac{1}{2} \sqrt{\mp G^{(7)}} (\hbar c) \alpha \{ +4b_5 \sigma_5 B_\alpha (\bar{e}_R \gamma^\alpha e_R) + \\ & + 2b_5 \sigma_5 B_\alpha [(\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L) + (\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L)] - \\ & - 2a_6 \sigma_6 A(3)_\alpha [(\bar{\nu}_L \gamma^\alpha \nu_L) - (\bar{e}_L \gamma^\alpha e_L)] + \\ & + (a_{L1}^* b_{L1} + a_{L2}^* b_{L2}) [\sigma_5 (w_5^+ + w_5^{*-}) + \sigma_6 (w_6^+ - w_6^{*-})] W_\alpha^+ (\bar{\nu}_L \gamma^\alpha e_L) + \\ & + (a_{L1} b_{L1}^* + a_{L2} b_{L2}^*) [\sigma_5 (w_5^- + w_5^{*+}) - \sigma_6 (w_6^- - w_6^{*+})] W_\alpha^- (\bar{e}_L \gamma^\alpha \nu_L). \end{aligned} \quad (10.7.21)$$

Подчеркнем, здесь пока не конкретизированы значения коэффициентов  $w_5^\pm$  и  $w_6^\pm$ .

5. Отдельно проанализируем слагаемые из (10.7.21), описывающие взаимодействие лишь через *нейтральные* векторные бозоны. Используя определения  $A_\alpha$  и  $Z_\alpha$  через компоненты триады  $G_\alpha(5)$  и  $G_\alpha(6)$  согласно (10.5.28) и (10.5.29), эту часть плотности лагранжиана взаимодействия

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi(A,Z)} = & -\frac{4\sqrt{G}}{c^2}(\hbar c)\frac{\alpha\sigma_5\sigma_6}{\sqrt{\sigma_6^2+\sigma_5^2}}A_\alpha(\bar{e}_L\gamma^\alpha e_L + \bar{e}_R\gamma^\alpha e_R) + \\ & + \frac{4\sqrt{G}}{c^2}(\hbar c)\alpha\sqrt{\sigma_6^2+\sigma_5^2}Z_\alpha\left[\left(\frac{1}{2}+0\right)(\bar{\nu}_L\gamma^\alpha\nu_L) + (0+0)(\bar{\nu}_R\gamma^\alpha\nu_R) + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sigma_5 \sin\theta_V}{\sqrt{\sigma_6^2+\sigma_5^2}}\right)(\bar{e}_L\gamma^\alpha e_L) + \left(0 + \frac{\sigma_5 \sin\theta_V}{\sqrt{\sigma_6^2+\sigma_5^2}}\right)(\bar{e}_R\gamma^\alpha e_R)\right]. \quad (10.7.22) \end{aligned}$$

Здесь опущен множитель  $\sqrt{\mp G^{(7)}}$ . Это выражение совпадает с соответствующими слагаемыми в калибровочной модели и лишний раз подтверждает произведенные ранее отождествления геометрических величин с физическими.

6. Расписывая оставшиеся слагаемые из (10.7.21), несложно убедиться, что при наложении дополнительных условий на пока не определенные коэффициенты в фермионном секторе они совпадают с выражениями в калибровочной модели, описывающими взаимодействия через заряженные векторные бозоны. Таким образом, при должном выборе констант, имеет место соответствие 7-мерной геометрической теории с калибровочной моделью электрослабых взаимодействий как в бозонном, так и в фермионном секторах.

## 10.8. Массовый сектор 7-мерной теории

Рассмотрим вопрос о значении масс промежуточных векторных бозонов в 7-мерной геометрической теории, сравнив со способом их введения в калибровочной модели электрослабых взаимодействий.

### 10.8.1. Массы векторных бозонов

В рамках 7-мерной геометрической теории массовые слагаемые бозонных полей возникают из трех источников: 1) для заряженных  $W^\pm$ -бозонов появляются планковские массы непосредственно из 7-мерной скалярной кривизны, 2) из слагаемых конформного фактора и 3) дополнительные массовые слагаемые, обусловленные переходом к 7-мерной теории из 8-мерия.

### I. Массовые слагаемые из 7-мерной кривизны

В 7-мерной теории массовая часть тензора кривизны представляется в виде

$$\begin{aligned} {}^7R_{(m)} = & \\ = -g^{\mu\nu} \sum_{a,b=4,5,6} & \left[ \sigma_a \sigma_b \left( 2G_\mu(b)G_\nu(a)_{,b,a} + G_\mu(a)_{,a}G_\nu(b)_{,b} + \frac{1}{2}G_\mu(b)_{,a}G_\nu(a)_{,b} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sigma_a^2 G_\mu(b)_{,a}G_\nu(b)_{,a} \right], \quad (10.8.1) \end{aligned}$$

соответствующем (9.5.3), с учетом разных значений диагональных дополнительных компонент метрики.

После подстановки компонент триады и усреднений по периодам дополнительных размерностей, приходим к следующим массовым вкладам для заряженных  $W^\pm$ -бозонов:

$$\langle {}^7R_{(m)} \rangle = 6\alpha^2 C^2 \sigma_6^2 W_\mu^{(+)} W^{(-)\mu}. \quad (10.8.2)$$

Это типичные планковские вклады в массы, возникавшие во всех геометрических моделях физических взаимодействий при рассмотрении заряженных частиц. Их следует тем либо иным способом перенормировать до наблюдаемых значений масс.

### II. Массовые слагаемые из конформного фактора

1. Предлагается геометрическая перенормировка планковских масс, как и в случае 8-мерной теории, посредством конформного фактора. Согласно сформулированным выше принципам построения объединенной геометрической теории физических взаимодействий, экспоненциальная зависимость конформного фактора в 7-мерной теории должна определяться переходом от 8-мерия, т. е. следовать из 8-мерной комбинации  $x^5 + x^6 + x^7$  в экспоненте (9.5.13), в которой необходимо, во-первых, отождествить координаты  $x^6$  и  $x^7$  и, во вторых, произвести преобразования координат (10.2.7). В итоге имеем

$$x^5 + x^6 + x^7 = x^5 + 2x^6 = c_x(x'^5 - x'^6). \quad (10.8.3)$$

Тогда конформный фактор (9.5.13) переходит в выражение

$$\begin{aligned} \chi = & b + \phi_4^+ \exp(i\tilde{\beta}x'^4) + \phi_4^- \exp(-i\tilde{\beta}x'^4) + \\ & + \phi_+ \exp[i\alpha(x'^5 - x'^6)] + \phi_- \exp[-i\alpha(x'^5 - x'^6)]. \quad (10.8.4) \end{aligned}$$

В дальнейшем штрихи у координат и компонент писать не будем.

2. Подставляя это выражение и найденные компоненты триады в общую формулу для конформного вклада вида (9.5.8), после усреднения по периодам дополнительных размерностей приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{(conf)} \rangle = & \frac{48}{5} C^2 \left\{ \beta^2 \phi_4^2 \sigma_4^2 \left( b_4^2 B_\mu B^\mu + 2W_\mu^{(+)} W^{(-)\mu} \right) + \right. \\ & + \gamma^2 \phi^2 \left( (b_5 \sigma_5 B_\mu - a_6 \sigma_6 A_\mu(3))(b_5 \sigma_5 B^\mu - a_6 \sigma_6 A^\mu(3)) + \right. \\ & \left. \left. + 2W_\mu^{(+)} W^{(-)\mu} (w_6^+ \sigma_6 - w_5^+ \sigma_5)(w_6^- \sigma_6 - w_5^- \sigma_5) \right) \right\}, \quad (10.8.5) \end{aligned}$$

где, как и в гл. 8, использованы обозначения:  $\phi_4^2 = \phi_4^+ \phi_4^-$ ,  $\phi^2 = \phi_+ \phi_-$ . В это выражение следует подставить ранее найденные значения коэффициентов в триаде (10.5.27)–(10.5.29).

3. Анализ полученного выражения показывает:

- 1) Если ограничиться лишь выписанными в (10.8.2) и (10.8.5) слагаемыми, то перенормировка планковских масс заряженных  $W^{(\pm)}$ -бозонов может быть осуществлена лишь вкладами в конформный фактор от клейновской размерности  $x^4$  из-за обращения в нуль коэффициентов в 3-й строке. Отсюда следует, что  $\phi_4^2 \sim 1$ .
- 2) Для нейтральных векторных  $Z$ -бозонов из конформного вклада получается значение массы, обусловленное вкладом в конформный фактор от дополнительных координат калуцевского вида, т. е. с коэффициентом  $\phi^2$  при планковском значении массы. Имеется произвол в его выборе, достаточный для получения наблюдаемого значения массы  $Z$ -бозона. Для этого необходимо положить  $\phi^2 \ll 1$ .
- 3) Среди слагаемых конформного происхождения в первой строке (10.8.5) имеется лишний член  $\sim \phi_4^2 B_\mu B^\mu$ , соответствующий отдельно планковской массе  $B$ -бозона, который необходимо чем-то скомпенсировать.

### III. Восстановление массовых вкладов, утерянных при переходе от 8-мерия

Общий принцип получения 7-мерной теории из 8-мерия, где планковские массы глюонов перенормируемы, гарантирует, что в 7-мерной теории массы промежуточных бозонов также должны быть перенормируемыми. Возникающие трудности со значениями масс в (как бы самостоятельной) 7-мерной теории обусловлены тем, что, с одной стороны, в ней учтены некоторые закономерности 8-мерия, но одновременно, с другой стороны, утеряна часть слагаемых при переходе к 7-мерной теории. Здесь имеются в виду те слагаемые, которые в 8-мерной

теории описывали  $Z$ -глюоны и имели экспоненциальную зависимость  $\sim \exp[\pm i\gamma(x^6 - x^7)]$ . Они, согласно (10.2.5) и (10.5.23), обусловили появление вклада в массивный нейтральный  $Z$ -бозон. В 8-мерной теории для данного вида глюонов имелись планковские массовые вклады, обусловленные дифференцированием по дополнительным координатам  $x^6$  и  $x^7$ , которые исчезли в 7-мерии из-за отождествления координат. Эти слагаемые должны быть восстановлены, что приводит к компенсации лишних планковских вкладов в массу якобы отдельного  $B$ -бозона.

### 10.8.2. Хиггсовские скалярные бозоны в калибровочной модели

1. Для получения масс покоя промежуточных векторных бозонов и фермионов в модели Вайнберга—Салама—Глэшоу используется так называемый механизм Хиггса, оставляющий теорию локально калибровочно инвариантной (см., например, [120]). Постулируется существование скалярного поля, называемого хиггсовским полем, которое является дублетом в изотопическом  $SU(2)$ -пространстве и переносит ненулевой гиперзаряд

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (10.8.6)$$

Массы частиц возникают в результате взаимодействия с хиггсовскими скалярными бозонами.

2. Четвертая (массовая) составная часть плотности лагранжиана модели Вайнберга—Салама—Глэшоу (10.4.1) имеет вид

$$\mathcal{L}_m = |\partial_\mu^{(*)}\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \left( |\varphi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^2 - f_e(\bar{L}e_R\varphi + \bar{e}_R L\tilde{\varphi}) - f_{\nu_e}(\bar{L}\nu_R\varphi_c + \bar{\nu}_R L\tilde{\varphi}_c), \quad (10.8.7)$$

где  $\lambda, \eta, f_e, f_{\nu_e}$  — некоторые константы,  $\varphi_c$  — 2-компонентный столбец, зарядово-сопряженный изоспинору  $\varphi$ . Первое слагаемое справа является изотопическим скаляром

$$|\partial_\mu^{(*)}\varphi|^2 = (\partial_\mu^{(*)}\varphi)_i^* (\partial_\mu^{(*)}\varphi)^i. \quad (10.8.8)$$

Оно описывает как плотность лагранжиана самого скалярного поля, так и его взаимодействия с промежуточными векторными бозонами через определенную в (10.4.10) «удлиненную» производную

$$\partial_\mu^{(*)}\varphi = \left( I_2\partial_\mu - I_2\frac{ig_1}{2\hbar c}B_\mu - \frac{ig_2}{2\hbar c}\sigma(s)A(s)\mu \right) \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (10.8.9)$$

3. Второе (нелинейное) слагаемое в (10.8.7) справа позволяет описать механизм спонтанного нарушения симметрии и ввести постоянную константу (вакуумное среднее) скалярного поля для последующего определения через нее масс элементарных частиц. Третье слагаемое справа в (10.8.7) позволяет ввести через хиггсовское скалярное поле массу покоя электрона. Здесь содержится

неопределяемая теорией константа  $f_e$ . Именно она в конечном счете характеризует массу покоя электрона. Последнее слагаемое справа в (10.8.7) позволяет ввести массу покоя нейтрино, если когда-либо понадобится это сделать. Его масса характеризуется произвольной постоянной  $f_{\nu_e}$ , которую в настоящее время принято полагать равной нулю.

4. После спонтанного нарушения симметрии в так называемой унитарной калибровке хиггсовское скалярное поле представляется в виде

$$\varphi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi + \eta \end{pmatrix}, \quad (10.8.10)$$

где  $\eta$  — постоянная,  $\phi$  — вещественное скалярное поле.

Плотность лагранжиана хиггсовского скалярного поля (первые два слагаемые в (10.8.7)) в этой калибровке имеет вид

$$\begin{aligned} |\partial_\mu^{(*)}\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \left( |\varphi|^2 - \frac{1}{2}\eta^2 \right)^2 &= g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial\varphi_0^*}{\partial x^\mu} + \frac{i\bar{g}}{2\hbar c} Z_\mu \varphi_0^* \right) \left( \frac{\partial\varphi_0}{\partial x^\nu} - \frac{i\bar{g}}{2\hbar c} Z_\nu \varphi_0 \right) + \\ &+ \frac{g_2^2}{4(\hbar c)^2} \varphi_0^* \varphi_0 [A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu] - \frac{\lambda^2}{2} (\varphi_0^* \varphi_0)^2 + \frac{\lambda^2 \eta^2}{2} (\varphi_0^* \varphi_0) - \frac{\lambda^2 \eta^4}{8}, \end{aligned} \quad (10.8.11)$$

где использовано обозначение  $\bar{g} \equiv \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ .

5. Из правой части первой строки этого выражения с учетом (10.8.9) появляются массовые члены для векторных полей:

$$\frac{\eta^2}{8(\hbar c)^2} [\bar{g}^2 Z_\mu Z^\mu + g_2^2 (A(1)_\mu A(1)^\mu + A(2)_\mu A(2)^\mu)]. \quad (10.8.12)$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

- 1) массовые вклады для электромагнитного поля не возникают;
- 2) нейтральное векторное поле  $Z_\mu$  приобретает массу покоя

$$m_Z c^2 = \frac{\bar{g}\eta\hbar c}{2}; \quad (10.8.13)$$

- 3) заряженные векторные поля  $A(1)_\mu$  и  $A(2)_\mu$  (или  $W_\mu^+$  и  $W_\mu^-$ ) приобретают одинаковые массы покоя

$$m_W c^2 = \frac{g_2 \eta \hbar c}{2}. \quad (10.8.14)$$

6. Масса покоя хиггсовского скалярного бозона  $\phi$  также может быть найдена из (10.8.11) с учетом (10.8.10)

$$m_H c^2 = \lambda \eta (\hbar c). \quad (10.8.15)$$

Эта масса зависит от дополнительной константы  $\lambda$ , которая теорией не фиксируется.

7. Аналогичным образом описывается возникновение масс фермионов из последних двух слагаемых в (10.8.7), которые описывают взаимодействие фермионов со скалярными полями. В итоге находим

$$m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar c)f_e \eta; \quad m_{\nu_e} c^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar c)f_{\nu_e} \eta. \quad (10.8.16)$$

Если, как ожидается, масса нейтрино равна нулю, нужно положить  $f_{\nu_e} = 0$ . (Экспериментальный предел:  $m_{\nu_e} \leq 30$  эВ.)

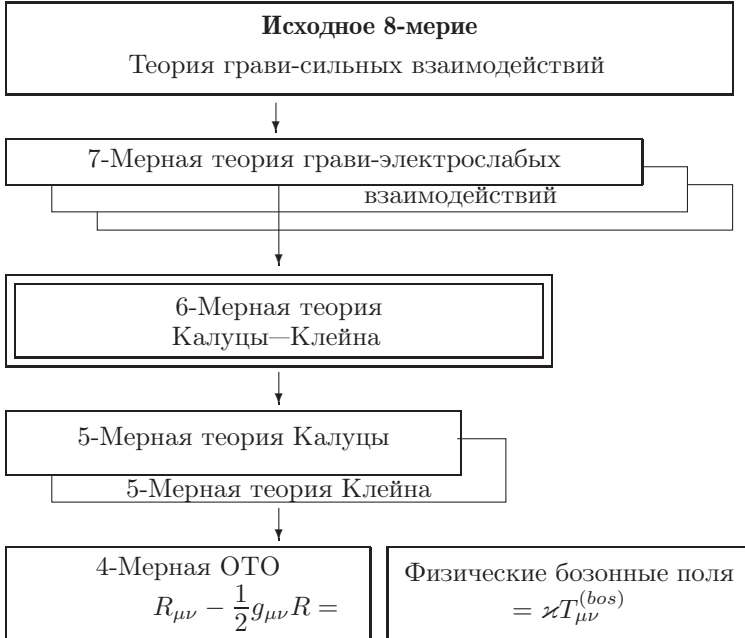
Таким образом, можно констатировать, что имеется много общего в описании масс векторных бозонов в 7-мерной геометрической теории и калибровочной модели электрослабых взаимодействий. Действительно, в обеих теориях массы вводятся посредством взаимодействия рассматриваемых полей с нейтральными скалярными бозонами. Разница состоит в природе происхождения этих полей: в калибровочной модели они вводятся из соображений принципиальной возможности включения дублета хиггсовских скалярных полей, не нарушающих  $SU(2) \times U(1)$ -инвариантность теории, тогда как в геометрофизике скалярные поля связываются с принципиальной возможностью конформных преобразований метрики используемой геометрии.

В калибровочной модели механизм Хиггса ответственен за появление масс покоя рассматриваемых полей, тогда как в 7-мерной геометрической теории конформный фактор осуществляет перенормировку планковских масс векторных полей, которые возникают автоматически при рассмотрении заряженных векторных полей.



# 6-Мерная теория Калуцы—Клейна

В этой главе представлен следующий этап построения единой геометрической теории физических взаимодействий на основе 8-мерной геометрии — осуществляется переход от 7-мерия к 6-мерной геометрической теории гравитационно-электромагнитных взаимодействий массивных частиц. От получившейся теории, далее понижая размерности, можно перейти к рассмотренным в гл. 8 пятимерным теориям Калуцы и Клейна, а затем спуститься к общепринятой 4-мерной эйнштейновской ОТО. Последовательность этих шагов представлена на блок-схеме рисунка 11.1.



**Рис. 11.1.** Принципиальная блок-схема единой геометрической теории физических взаимодействий (бозонный сектор)

Необходимость построения 6-мерной геометрической теории, занимающей в блок-схеме центральное положение, становится очевидной и при последовательном переходе от теорий низших размерностей вверх — к теориям больших размерностей. Как уже указывалось, теория Калуцы нацелена на геометризацию электромагнитных взаимодействий, тогда как теория Клейна, точнее теория Клейна—Фока—Румера, предназначена для геометрического описания масс и закономерностей квантовой механики. Совместное решение этих задач возможно в рамках 6-мерной геометрической теории, которую следует называть теорией Калуцы—Клейна.

Другим аргументом перехода к 6-мерию (снизу) является возможность представить 5-мерную теорию Калуцы, в которой рассматриваются массивные заряженные частицы, как 6-оптику, построенную таким же образом, как 5-оптика из 4-мерной ОТО (см. гл. 8).

Еще один довод в пользу перехода к 6-мерию заключается в свойствах симметрий в 6-мерной плоской геометрии с сигнатурой  $(+ - - - | + -)$ , которые напоминают симметрии 4-мерной геометрии, способствовавшие в свое время переходу от 3-мерного пространства (и отдельного времени) к 4-мерному пространству-времени.

В этой главе показано, что скрытые размерности имеют самое прямое отношение к закономерностям квантовой механики.

## 11.1. Переход от 7-мерия к 6-мерной теории грави-электромагнитных взаимодействий

Перейдем от 7-мерия к 6-мерной теории аналогичным образом, как в гл. 10 был осуществлен переход от 8-мерия к 7-мерной теории грави-электрослабых взаимодействий.

### 11.1.1. Бозонный сектор

1. Переход к 6-мерию можно произвести либо в штрихованных координатах 7-мерной теории (после преобразований координат (10.2.9)), либо в координатах 8-мерной теории. В первом случае это соответствует выходу на гиперповерхность  $x^6 = 0$ , а во втором случае — выходу на гиперповерхность  $x^5 = x^6$ . Выпишем компоненты триады (10.5.27)–(10.5.29) на данной гиперповерхности в двух видах — 7-мерном

и 8-мерном:

$$\begin{aligned} G'_\mu(4) &= C \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) + (W_\mu^+ + W_\mu^-) \right] = \\ &= C [(Z_\mu^+ + Z_\mu^-) + (X_\mu^+ + X_\mu^-) + (Y_\mu^+ + Y_\mu^-)]; \end{aligned} \quad (11.1.1)$$

$$\begin{aligned} G'_\mu(5) &= \frac{C}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) + (W_\mu^+ + W_\mu^-) \right] = \\ &= \frac{C}{\sqrt{2}} [(Z_\mu^+ + Z_\mu^-) + (X_\mu^+ + X_\mu^-) + (Y_\mu^+ + Y_\mu^-)]; \end{aligned} \quad (11.1.2)$$

$$\begin{aligned} G'_\mu(6) &= \frac{C}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2}(A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W) + (W_\mu^+ - W_\mu^-) \right] = \\ &= \frac{C}{\sqrt{2}} \left[ -\sqrt{2}(Z_\mu^+ + Z_\mu^-) + (X_\mu^+ - X_\mu^-) + (Y_\mu^+ - Y_\mu^-) - 2 \left( \tilde{A}_\mu + \frac{\tilde{B}_\mu}{\sqrt{3}} \right) \right], \end{aligned} \quad (11.1.3)$$

где использованы формулы (10.2.5), (10.2.15), (10.5.23) и, в частности,

$$(Z_\mu^+ + Z_\mu^-) = A_\mu^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}B_\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W). \quad (11.1.4)$$

Напомним, что нейтральные поля сильных взаимодействий обозначены тильдой сверху.

2. На первый взгляд, может показаться, что при переходе к 6-мерию возникает новое нейтральное векторное поле

$$(W_\mu^+ + W_\mu^-) = (X_\mu^+ + X_\mu^-) + (Y_\mu^+ + Y_\mu^-) \equiv A_\mu^{(3)}, \quad (11.1.5)$$

соответствующее тому, как в (10.2.5) из заряженных  $Z_\mu^\pm$ -глюонов получалось нейтральное векторное поле  $A_\mu^{(1)} \sim B_\mu$ . Однако следует учесть, что аналогичные процедуры можно провести в трех вариантах редукции 8-мерия к 7-мерной теории, соответствующих трем поколениям элементарных частиц. В каждом из них имеют место эквивалентные теории электрослабых взаимодействий соответствующих поколений частиц. Более того, элементарные частицы разных поколений электрослабым образом взаимодействуют друг с другом. Это заставляет положить

$$(X_\mu^+ + X_\mu^-) = (Y_\mu^+ + Y_\mu^-) = (Z_\mu^+ + Z_\mu^-) = \sqrt{\frac{2}{3}}(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W), \quad (11.1.6)$$

откуда следует, что в триаду (11.1.1)–(11.1.3) нужно подставить выражения:

$$(W_\mu^+ + W_\mu^-) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W). \quad (11.1.7)$$

3. Оператор калибровочно-инвариантной 4-мерной производной (10.3.14) на данной гиперповерхности  $x'^6 = 0$  существенно упрощается, поскольку пропадает зависимость от координаты  $x'^6$ :

$$\partial_\mu^{(*)} \rightarrow \partial_\mu^{**} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + G'_\mu(4)\partial_4^{(*)} + G'_\mu(5)\partial_5^{(*)}, \quad (11.1.8)$$

т. е. третий вектор триады теряет смысл, а значимыми становятся лишь два вектора, совпадающие с соответствующими векторами 7-мерной теории и образующие диаду в 6-мерии:

$$G'_\mu(4) = \sqrt{6}C(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) = \sqrt{6}CB_\mu \quad (11.1.9)$$

$$G'_\mu(5) = 2\sqrt{3}C(A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W) = 2\sqrt{3}CB_\mu. \quad (11.1.10)$$

Легко убедиться, что при непосредственном выходе на гиперповерхность  $x^5 = x^6 = x^7$  в 8-мерной теории аналогичный калибровочно-инвариантный оператор (9.2.22) принимает вид

$$\partial_\mu^* \rightarrow \partial_\mu^{**} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + G_\mu(4)\partial_4^* + (G_\mu(5) + G_\mu(6) + G_\mu(7))\partial_5^*, \quad (11.1.11)$$

откуда, учитывая (9.4.18)–(9.4.20), опять приходим к диаде (11.1.9)–(11.1.10).

### 11.1.2. Фермионный сектор

1. В гл. 10 уже рассматривался вопрос о гармониках кварков в 7-и в 6-мерных вариантах геометрической теории. Было показано, что левые компоненты кварков, по своему определению, присущи именно 7-мерной теории. При переходе к 6-мерии различия по гармоникам левых и правых компонент кварков исчезают. Эти гармоники имеют вид (10.2.25)–(10.2.26), что соответствует зарядам электрослабых взаимодействий (10.2.27) и (10.2.28). При этом нужно иметь в виду, что кварки определяются на специфической гиперповерхности  $x'^5 = x'^6$ , соответствующей первичным координатам 8-мерной теории:

$$x'^5 = x'^6 \rightarrow x^5(1 - c_y) = -x^6(1 + c_y) \rightarrow 2x^5 = -x^6. \quad (11.1.12)$$

2. Лептоны определены на гиперповерхности  $x^5 = x^6$ . Преобразования координат (10.2.9) никак не сказываются на реальных значениях

гармоник, поскольку при последовательном пересчете всех величин оказывается, что

$$x^5 = x^6 \rightarrow x'^5 = x'^6. \quad (11.1.13)$$

Для левых компонент лептонов нужно просто заменить координату  $x^6$  на  $x^5$ . В итоге получаются следующие эффективные гармоники, совпадающие для левых и правых компонент:

$$\text{для электрона имеем } e_L \sim e_R \sim \exp(-2\gamma x^5) \rightarrow Q = -1; \quad (11.1.14)$$

$$\text{для нейтрино имеем } \nu_L \sim \nu_R \sim \exp(0) \rightarrow Q = 0. \quad (11.1.15)$$

Это упрощение естественно объясняется тем, что в 6-мерной теории отсутствуют заряженные векторные бозоны, которые описывают взаимодействия именно между левыми компонентами частиц. Потеря возможности описания заряженных векторных бозонов в 6-мерной теории влечет за собой отсутствие различий в гармониках левых и правых компонент частиц.

## 11.2. 6-Мерная геометрическая теория

Следуя традиции предыдущих глав, изложим самостоятельный вариант 6-мерной теории, от которого диадным методом  $4 + 1 + 1$ -расщепления произведем редукцию к 4-мерной теории, а затем на основе принципа соответствия, с одной стороны, с общеизвестной теорией электромагнитных взаимодействий и, с другой стороны, с 6-мерной теорией, полученной из 7-мерия (из 8-мерия), установим окончательный вид физически интерпретируемой 6-мерной геометрической теории.

### 11.2.1. Самостоятельный вариант 6-мерной теории

Приведем ключевые положения самостоятельного варианта 6-мерной теории в уже сложившейся последовательности.

1. **Алгебра диадного метода.** 6-Мерный метрический тензор  $G_{MN}$  представим в двух видах:

$$G_{MN} = g_{MN} \pm G_M(4)G_N(4) - G_M(5)G_N(5) = g_{MN} \pm \xi_M \xi_N - \lambda_M \lambda_N, \quad (11.2.1)$$

где для двух векторов диады введены свои буквенные обозначения  $G_M(4) \equiv \xi_M$  и  $G_M(5) \equiv \lambda_M$  по аналогии с монадным и диадным методами в 4-мерии или с монадным методом при изложении 5-мерных теорий Калуцы или Клейна. Эти векторы удовлетворяют условиям ортонормированности:

$$\begin{aligned} \xi_M \xi^M &= \pm 1; & \lambda_M \lambda^M &= -1; & g_{MN} g^{MN} &= 4; \\ \lambda_M \xi^M &= 0; & \xi_M g^{MN} &= 0 & \lambda_M g^{MN} &= 0. \end{aligned} \quad (11.2.2)$$

Здесь и далее в этой главе индексы  $M, N$  пробегает 6 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Будем использовать калибровку типа дважды хронометрической в ОТО, первым выделив вектор  $\xi^M$ , т. е. направим вектор  $\xi^M$  вдоль направления координатных линий  $x^4$ , и аналогичным образом зададим вектор  $\lambda^M$  после первого  $5 + 1$ -расщепления. Это означает следующую связь компонент диады с компонентами 6-мерной метрики:

$$\xi^M = \frac{G_4^M}{\sqrt{\pm G_{44}}} \rightarrow \xi_M = G_M(4) = \frac{G_{M4}}{\sqrt{\pm G_{44}}}; \quad (11.2.3)$$

$$\lambda^M = \frac{\tilde{G}_5^M}{\sqrt{-\tilde{G}_{55}}} \rightarrow \lambda_M = G_M(5) = \left\{ \frac{G_{45}G_{\mu 4} - G_{44}G_{\mu 5}}{\sqrt{G_{44}(G_{45}^2 - G_{44}G_{55})}}; 0; -\frac{\sqrt{G_{45}^2 - G_{44}G_{55}}}{\sqrt{\pm G_{44}}} \right\}, \quad (11.2.4)$$

где тильдой помечены компоненты 5-мерной метрики, получающиеся в результате первого  $5 + 1$ -расщепления.

4-Мерный метрический тензор автоматически имеет отличными от нуля только компоненты с 4-мерными индексами:

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \left[ \frac{G_{\mu 4}G_{\nu 4}}{G_{44}} - \frac{(G_{\mu 4}G_{45} - G_{\mu 5}G_{44})(G_{\nu 4}G_{45} - G_{\nu 5}G_{44})}{G_{44}(G_{45}^2 - G_{44}G_{55})} \right]. \quad (11.2.5)$$

Выпишем также выражения для смешанных компонент составляющих метрического тензора:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= \lambda^\alpha = 0; & \xi^5 &= 0; \\ g^{N\alpha} &= G^{N\alpha}; & g_4^N &= g_5^N = 0; & g_{4N} &= g_{5N} = 0; \\ g_\nu^\mu &= G_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu; & g_\alpha^4 &= \xi^4 \xi_\alpha + \lambda^4 \lambda_\alpha; & g_\alpha^5 &= \lambda^5 \lambda_\alpha. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

Квадрат  $4 + 2$ -мерного интервала представляется через спроектированные величины следующим образом

$$G_{MN} dx^M dx^N = ds^2 \pm d\xi^2 - d\lambda^2, \quad (11.2.7)$$

где

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N; \quad d\xi = dx^N \xi_N; \quad d\lambda = dx^N \lambda_N. \quad (11.2.8)$$

В данной калибровке естественным образом выделяется класс координатных преобразований

$$x'^4 = x'^4(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5); \quad (11.2.9)$$

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4); \quad (11.2.10)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (11.2.11)$$

**2. Диадных физико-геометрических тензоров** в 6-мерной теории имеется в самом общем случае 11: пять векторов, четыре тензора второго ранга и два скаляра:

$$\Phi_\alpha^{(4)} = \xi^N g_\alpha^M (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \quad \Phi_\alpha^{(5)} = \lambda^N g_\alpha^M (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \quad (11.2.12)$$

$$F_\alpha^{(4)} = \frac{1}{2} \lambda^N g_\alpha^M (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \quad F_\alpha^{(5)} = \frac{1}{2} \xi^N g_\alpha^M (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \quad (11.2.13)$$

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{2}g_{\mu}^M g_{\nu}^N (\xi_{N,M} - \xi_{M,N}); \quad F_{\mu\nu}^{(5)} = \frac{1}{2}g_{\mu}^M g_{\nu}^N (\lambda_{N,M} - \lambda_{M,N}); \quad (11.2.14)$$

$$D_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{1}{2}g_{\mu}^M g_{\nu}^N (\xi_{N;M} + \xi_{M;N}); \quad D_{\mu\nu}^{(5)} = \frac{1}{2}g_{\mu}^M g_{\nu}^N (\lambda_{N;M} + \lambda_{M;N}); \quad (11.2.15)$$

$$\Phi^{(4)} = \xi^M \lambda^N (\xi_{M,N} - \xi_{N,M}); \quad \Phi^{(5)} = \lambda^M \xi^N (\lambda_{M,N} - \lambda_{N,M}); \quad (11.2.16)$$

$$D_{\alpha}^{(4)} = \frac{1}{2}g_{\alpha}^M \lambda^N (\lambda_{M;N} + \lambda_{N;M}). \quad (11.2.17)$$

Используя вид составляющих метрического тензора в данной калибровке, находим, что  $D_{\alpha}^{(4)} = F_{\alpha}^{(5)} = 0$ .

**3. Три диадных оператора дифференцирования** имеют вид:

$$\partial_4^{**} = \xi^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \xi^4 \frac{\partial}{\partial x^4}; \quad (11.2.18)$$

$$\partial_5^{**} = \lambda^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \lambda^4 \frac{\partial}{\partial x^4} + \lambda^5 \frac{\partial}{\partial x^5}; \quad (11.2.19)$$

$$\partial_{\mu}^{**} = g_{\mu}^N \frac{\partial}{\partial x^N} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \pm \xi^4 \xi_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^4} + \lambda^5 \lambda_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^5}. \quad (11.2.20)$$

Все эти операторы не зависят ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемых (спроектированных) тензоров. Последний из этих операторов играет роль удлиненной производной в электродинамике.

**4. Запись всех общековариантных выражений в диадном виде**, как и ранее, означает представление их только через спроектированные величины, через диадные физико-геометрические тензоры и операторы диадного дифференцирования. В самом общем случае скалярная кривизна в диадном виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^6R = & {}^4R + F_{\alpha\beta}^{(4)} F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)} F^{(5)\alpha\beta} - 2\nabla_{\alpha}^{**} (\Phi^{(4)\alpha} + \Phi^{(5)\alpha}) - \\ & - 2[\Phi_{\alpha}^{(4)} \Phi^{(4)\alpha} + \Phi_{\alpha}^{(5)} \Phi^{(5)\alpha} - F_{\alpha}^{(4)} F^{(4)\alpha}]. \end{aligned} \quad (11.2.21)$$

Другие выражения будем выписывать по мере надобности.

## 11.2.2. Физическая интерпретация 6-мерной теории

1. 6-Мерная геометрическая теория развитого выше общего вида имеет значительные возможности для описания различных сторон физических взаимодействий. В частности, используя общий случай 6-мерия с сигнатурой  $(+ - - - | - -)$  и переобозначив координату  $x^4 \rightarrow x^6$ , можно геометризовать практически в полном объеме электрослабые взаимодействия [34], т. е. решить большинство из тех задач, которые были рассмотрены в предыдущей главе в рамках 7-мерной геометрической теории. Трудности возникают лишь в массовом секторе.

Однако выше был сформулирован глобальный постулат описания известных видов физических взаимодействий, исходя из единой 8-мерной геометрической теории путем нескольких шагов понижения размерностей до четырех измерений, присущих ОТО. В предыдущих главах соответствующие теории формировались посредством сопоставления геометрической теории, с одной стороны, с существующими калибровочными моделями и, с другой стороны, руководствуясь общими принципами перехода от 8-мерия. В данном случае 6-мерной теории в качестве калибровочной модели следует использовать калибровочный (или общепринятый полевой) подход к описанию электромагнитных взаимодействий. Тот материал, который изложен в 5-й главе относительно электромагнетизма, можно было бы поместить здесь петитом, как это сделано в предыдущих главах с материалом по хромодинамике или модели Вайнберга—Салама—Глэшоу. Другая часть для сравнения — данные, полученные из перехода от 8-мерия, — уже изложены в разд. 11.1.

2. Как уже отмечалось, в общем случае в 6-мерной теории следовало бы ожидать представление векторов диады через два нейтральных и одно (или два) заряженных физических поля, однако постулат получения теорий низшей размерности из единого 8-мерия диктует представление обоих векторов диады лишь через одно нейтральное физическое поле

$$G_{\mu}(4) \equiv \xi_{\mu} = b_4 B_{\mu}; \quad G_{\mu}(5) \equiv \lambda_{\mu} = b_5 B_{\mu}. \quad (11.2.22)$$

Более того, данное поле  $B_{\mu}$  в 6-мерной теории следует трактовать как наблюдаемое электромагнитное поле, т. е. будем полагать

$$B_{\mu} \rightarrow A_{\mu}. \quad (11.2.23)$$

Таким образом, в данной теории отождествляется с электромагнитным полем именно то поле  $B_{\mu}$ , которое в калибровочной модели электрослабых взаимодействий возникает из локализации группы  $U(1)$ .

3. Будем использовать прежние предположения, что, во-первых, дополнительные компоненты метрики имеют диагональный характер и, во-вторых, что они постоянны, т. е.

$$G_{44} = \text{const}; \quad G_{55} = \text{const}; \quad G_{45} = 0. \quad (11.2.24)$$

Эти условия и отсутствие зависимости метрики от дополнительных координат приводят к обращению в нуль 7 физико-геометрических тензоров (всех векторов и скаляров). В итоге остаются лишь два антисимметричных тензора второго ранга, которые играют ключевую роль



в описании электромагнитных взаимодействий. Поскольку компоненты диады не зависят от дополнительных координат, то вид этих тензоров в 6-мерной теории существенно упрощается:

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = b_4 \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right); \quad F_{\mu\nu}^{(5)} = b_5 \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right). \quad (11.2.25)$$

В этом выражении отсутствуют дополнительные слагаемые, которые в теориях высших размерностей соответствовали неабелевым «хвостам».

4. При условиях (11.2.24) выражение для геометрической части гиперплотности лагранжиана существенно упрощается

$${}^6R = {}^4R + F_{\alpha\beta}^{(4)} F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)} F^{(5)\alpha\beta}. \quad (11.2.26)$$

Более того, поскольку в этом выражении отсутствует зависимость от дополнительных координат, то гиперплотность лагранжиана автоматически превращается в плотность лагранжиана (с точностью до постоянного коэффициента).

Подставляя в (11.2.26) выражения (11.2.25), находим вклад в лагранжиан электромагнитного поля

$$F_{\alpha\beta}^{(4)} F^{(4)\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}^{(5)} F^{(5)\alpha\beta} = (\pm b_4^2 + b_5^2) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{G}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (11.2.27)$$

откуда находим выражение электромагнитного векторного потенциала через геометрические величины:

$$A_\mu = \frac{c^2 \sqrt{\pm b_4^2 + b_5^2}}{2\sqrt{G}} \lambda_\mu, \quad (11.2.28)$$

заменяющее формулу (8.3.5) в 5-мерной теории Калуцы.

5. В данной теории имеют место те же дополнительные ограничения на геометрические величины, что и в 5-мерной теории Калуцы, т. е. условия независимости компонент метрики от дополнительных координат и постоянство дополнительных диагональных компонент метрики. Из (11.2.26)–(11.2.27) варьированием по компонентам метрического тензора и электромагнитного векторного потенциала легко получить стандартные 4-мерные уравнения Эйнштейна и 2-ю пару уравнений Максвелла с правой частью, зависящей от вкладов в гиперплотность лагранжиана от материи негеометрического происхождения.

Отметим, что в данной теории не встает вопрос о дополнительных уравнениях для компонент  $G_{44}$  и  $G_{55}$ , поскольку, по методике построения теории, уравнения пишутся лишь после редуцирования многомерной

геометрии к 4-мерному пространству-времени, причем варьирование может осуществляться лишь по содержащимся переменным в 4-мерной плотности лагранжиана.

6. В 6-мерной теории такого рода можно записать стандартные уравнения геодезических вида (8.2.19)–(8.2.20), которые после процедуры  $4 + 1 + 1$ -расщепления принимают вид

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0; \quad \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0; \quad (11.2.29)$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta - \frac{2\sqrt{G}}{c^2} \frac{d\lambda}{ds} F_{\cdot\alpha}^\mu u^\alpha + \frac{2\sqrt{G}}{c^2} \frac{d\xi}{ds} F_{\cdot\alpha}^\mu u^\alpha, \quad (11.2.30)$$

где компоненты 6-скорости имеют вид

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{dx^4}{ds} + \frac{2\sqrt{G}}{c^2} A_\mu u^\mu; \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{dx^5}{ds} + \frac{2\sqrt{G}}{c^2} A_\mu u^\mu.$$

Уравнения (11.2.29), как и в случае упрощенного варианта 5-мерной теории Калуцы, означают постоянство двух дополнительных компонент 6-мерной скорости, а последнее уравнение соответствует стандартным уравнениям движения в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля, отличаясь от них добавком, обусловленным клейновской компонентой  $d\xi/ds$ . Последняя эффективно сказывается в виде добавка в электрический заряд частицы.

### 11.3. Физические поля негеометрической природы

Полная гиперплотность лагранжиана 6-мерной теории имеет вид

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sqrt{\pm G^{(6)}} \left( -\frac{1}{2\kappa c} {}^6R + \tilde{\mathcal{L}}'_\Phi \right), \quad (11.3.1)$$

где первое слагаемое справа представляет собой (с точностью до константы) не гиперплотность, а стандартную плотность геометрического лагранжиана, а  $\sqrt{\pm G^{(6)}} \tilde{\mathcal{L}}'_\Phi$  — гиперплотность лагранжиана негеометрической материи.

#### 11.3.1. Негеометрическое скалярное поле

1. Согласно изложенному выше, в 6-мерной теории существенно зависимость волновых функций негеометрической материи от дополнительных координат. Определим эту зависимость в согласии с формулами

(8.3.1) и (8.4.7) ранее рассмотренных 5-мерных геометрических теорий и в соответствии с информацией, полученной из перехода от исходного 8-мерия, т. е. в виде

$$\Phi = \varphi(x^\nu) e^{i(\beta \varepsilon_4 x^4 + \alpha \varepsilon_5 x^5)}, \quad (11.3.2)$$

где константы  $\beta$  и  $\alpha$  определяют периоды компактификации по дополнительным координатам,  $\varphi(x^\nu)$  — часть волновой функции, зависящая только от четырех классических координат.

2. Выпишем изотропное волновое уравнение для заряженной скалярной частицы в 6-мерном пространстве-времени

$$G^{MN} \nabla_M \nabla_N \Phi = 0. \quad (11.3.3)$$

Проанализируем *гипотетический вариант теории*, когда 6-мерное пространство плоское и отсутствует электромагнитное поле, тогда из (11.3.3) имеем

$$\left[ \square + \left( \frac{ec\varepsilon_5}{2\sqrt{G\hbar}} \right)^2 \pm \beta^2 \varepsilon_4^2 \right] \varphi(x^\mu) = 0. \quad (11.3.4)$$

Легко видеть, что для свободной частицы слагаемое от дифференцирования по 5-й координате дает чрезвычайно большой массовый вклад — порядка планковской массы.

3. Невольно напрашивается мысль, что для перенормировки массы частицы до реалистичных значений необходимо выбрать координату  $x^4$  времени-подобной, чтобы перед последним слагаемым стоял знак минус:

$$\left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 = \left( \frac{ec\varepsilon_5}{2\sqrt{G\hbar}} \right)^2 - \beta^2 \varepsilon_4^2. \quad (11.3.5)$$

Это свидетельствует о том, что в таком образом построенной 6-оптике при описании микрочастиц нужно использовать сигнатуру  $(+---|+-)$ , положив период компактификации клейновской координаты  $x^4$  имеющим порядок периода компактификации калуцевской координаты  $x^5$ , однако это приводит к ряду далеко идущих следствий при описании взаимодействий частиц с электромагнитным и иными бозонными полями.

4. Поскольку взаимодействие материи с электромагнитным полем описывается калибровочно инвариантным оператором 4-мерного дифференцирования (11.2.20), то, подставляя в него (11.3.2), для данного гипотетического варианта теории находим

$$\partial_\mu^{**} \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i[\varepsilon_4 \beta \varepsilon_4 + \varepsilon_5 \alpha \lambda^5] A_\mu \right) \varphi. \quad (11.3.6)$$

Это выражение следует отождествить с удлиненной производной стандартной электродинамики (5.1.8), откуда получаем выражение для эф-

эффективного значения электрического заряда

$$Qe = \frac{2\sqrt{G}\hbar}{c} (\varepsilon_4\beta\xi^4 + \varepsilon_5\alpha\lambda^5), \quad (11.3.7)$$

существенно зависящее от массы частицы, т. е. перенормировка масс частиц одновременно должна сочленяться с нежелательной перенормировкой электрических зарядов. Таким образом, этот вариант приводит к ряду дополнительных трудностей. Но имеется и иной вариант, где перенормировка планковских масс заряженных частиц осуществляется посредством конформного фактора.

### 11.3.2. Конформный фактор и массовый сектор 6-мерной теории

1. В определенной выше 6-мерной теории нет проблем с описанием масс векторных бозонов. Поскольку теперь отсутствует зависимость компонент многомерной метрики от дополнительных координат, то нет планковских масс векторных бозонов, которые следовало бы перенормировать, — единственное векторное поле  $B_\mu \rightarrow A_\mu$  является нейтральным и безмассовым. Однако, как уже отмечалось, в данной теории остается проблема перенормировки планковских вкладов в массу *заряженных негеометрических полей*, из-за зависимости их волновых функций от дополнительной координаты  $x^5$ . Будем преодолевать эту трудность опять с помощью конформного преобразования вида (9.5.7).

Для данной размерности следует определить функцию

$$\chi = \xi^2, \quad (11.3.8)$$

тогда в результате конформного преобразования получаем плотность геометрического лагранжиана в виде

$$-\frac{\sqrt{\pm\tilde{G}^{(6)}}}{2\kappa c} {}^6\tilde{R} = -\frac{\sqrt{\pm G^{(6)}}}{2\kappa c} ({}^6R\chi^2 - 5G^{MN}\chi\nabla_M\nabla_N\chi). \quad (11.3.9)$$

После процедуры 4 + 1 + 1-расщепления в самом общем виде, когда конформный фактор может зависеть от всех 6 координат, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\kappa c} \sqrt{-\tilde{G}^{(6)}} {}^6\tilde{R} = & \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa c} \left\{ -\chi^2 \left( {}^4R + F_{\alpha\beta}^{(5)} F_{\alpha\beta}^{(5)} \right) + \right. \\ & \left. + 5\chi \left[ g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^{**} \nabla_\beta^{**} \chi + \chi (\pm \partial_4^{**2} \chi + \partial_5^{**2} \chi) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.3.10)$$

2. Положим, как и ранее, что конформный фактор не зависит от 4 классических координат, т. е. будем следовать принятому выше усло-

вию зависимости конформного фактора лишь от дополнительных координат (9.5.13). Произведем в конформном факторе редукцию того же типа, что и в разд. 11.1.1, т. е. выйдем на гиперповерхность  $x^5 = x^6 = x^7$ :

$$\chi = 1 + \phi_4^+ \exp(i\beta_o x^4) + \phi_4^- \exp(-i\beta_o x^4) + \phi_+ \exp(3\gamma x^5) + \phi_- \exp(-3\gamma x^5). \quad (11.3.11)$$

Это существенно упрощает выражение (11.3.10). После усреднения по дополнительным координатам конформного фактора изменится только общий множитель перед стандартной плотностью лагранжиана и появится вклад в космологическую постоянную из-за постоянной величины в гиперплотности, умноженной на корень из определителя 4-мерного метрического тензора.

3. Рассмотрим вклад конформного фактора в значение массы покоя заряженного скалярного поля. Это можно сделать как на уровне гиперплотности лагранжиана, так и непосредственно записав 6-мерное уравнение Клейна—Фока для 6-оптики. Ограничимся случаем, когда отсутствует электромагнитное поле. Учитывая, что после конформного преобразования 6-мерные символы Кристоффеля преобразуются по закону (4.6.5), имеем уравнение скалярного поля в 6-оптике

$$\left[ (\chi g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \pm \sigma_4^2 \partial_4^{**2} - \sigma_5^2 \partial_5^{**2}) \pm \frac{1}{2} \sigma_4^2 (\partial_4^{**} \chi) \partial_4^{**} - \frac{1}{2} \sigma_5^2 (\partial_5^{**} \chi) \partial_5^{**} \right] \Phi = 0. \quad (11.3.12)$$

Из этого уравнения следует, что для частиц с одинаковым зарядом можно добиться перенормировки планковских масс, положив

$$\chi \frac{\partial \Phi}{\partial x^5} + \frac{\Phi}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x^5} = 0. \quad (11.3.13)$$

Это выражение фиксирует вид экспоненциальной зависимости конформного фактора от калуцевской координаты  $x^5$ .

4. Оставшиеся в (11.3.12) вклады от клейновской дополнительной размерности  $x^4$  следует приравнять массовому слагаемому в 4-мерном уравнении Клейна—Фока:

$$\pm \sigma_4^2 \left( \chi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^4)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial x^4} \frac{\partial \Phi}{\partial x^4} \right) = \chi \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi. \quad (11.3.14)$$

Подставляя сюда экспоненциальные зависимости, имеем

$$\pm \sigma_4^2 \beta \left( \beta + \frac{\beta_o}{2} \right) = \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2, \quad (11.3.15)$$

где  $\beta$  характеризует экспоненциальную зависимость от  $x^4$  скалярного поля  $\Phi$ , а  $\beta_o$  — зависимость конформного фактора  $\chi$ . Отсюда видно,

что, выбирая подходящие значения экспоненциальных коэффициентов  $\beta$  и  $\beta_0$ , можно получить реалистические значения масс элементарных частиц, не заботясь о какой-либо перенормировке. Кроме того, из (11.3.15) следует, что *клейновская координата может быть любой сигнатуры*.

Исходя из изложенного, можно считать 6-мерные уравнения эйконала с сигнатурой  $(+ - - - | + -)$  обусловленными вкладом конформного фактора в исходную 6-мерную теорию лишь с одной времени-подобной координатой  $x^0$ .

## 11.4. Магнитные поля астрофизических объектов

На базе 6-мерной теории, полученной путем редукции из теории большей размерности, можно высказать гипотезу о происхождении магнитных полей астрофизических объектов.

1. Чтобы это сделать, обратимся к «удлиненной» производной (11.2.20) в 6-мерной теории. Как уже отмечалось, вторая векторная величина также должна быть отождествлена с векторным потенциалом электромагнитного поля согласно формуле типа (11.2.22). Тогда дополнительное, второе справа слагаемое в диадном операторе (11.2.20) приводит к чрезвычайно малым поправкам в электромагнитное взаимодействие из-за того, что возникающий при дифференцировании по  $x^4$  заряд (масса) на много порядков меньше электромагнитного заряда. Из (11.3.7) можно найти, что масса  $m$  индуцирует дополнительный («массовый») электрический заряд

$$\tilde{q} = 2\sqrt{G}m. \quad (11.4.1)$$

Учитывая, что, например, для электрона масса  $m_e \sim 9,1 \cdot 10^{-28}$  г, получаем для него отношение двух зарядов

$$\frac{\tilde{q}}{q} \equiv \frac{\tilde{e}}{e} \sim 10^{-21}. \quad (11.4.2)$$

Очевидно, что такая поправка в электромагнитное взаимодействие отдельных элементарных частиц лежит далеко за пределами точности эксперимента. Однако для больших масс, когда электрические заряды частиц двух знаков компенсируются, «массовый вклад» в электромагнитное взаимодействие, обусловленный координатой  $x^4$ , может оказаться существенным.

2. Встает вопрос о знаке «массового» электрического заряда массивного объекта. Очевидно, что дополнительный электрический заряд нуклонов будет на три порядка больше дополнительного заряда электронов. Предположим, что протоны и нейтроны обладают одноименны-

ми «массовыми» электрическими зарядами, тогда независимо от знака «массового» заряда электрона дополнительный электрический заряд массивных объектов можно оценивать формулой (11.4.1), где  $m$  — масса этого объекта.

3. Рассмотрим массивные астрофизические объекты типа Земли, планет или звезд. Полагается, что в среднем такие объекты являются электрически нейтральными, однако, согласно сказанному выше, они должны быть электрически заряженными. Это значит, что пространство-время вокруг «неподвижных» сферически симметричных объектов (в идеальном случае) должно описываться не метрикой Шварцшильда, а метрикой типа Райсснера—Нордстрема, где дополнительная константа — электрический заряд — пропорциональна массе центрального объекта.

4. Для вращающихся (идеализированных) объектов пространство-время должно описываться не метрикой Керра, а метрикой типа Керра—Ньюмена, где дополнительная константа (электрический заряд) также выражается через значение массы. Добавки к общерелятивистским эффектам чрезвычайно малы, однако вокруг таких объектов должны возникать как электрическое, так и магнитное поля. Как известно, дипольный магнитный момент  $M_1$  источника Керра—Ньюмена определяется формулой  $M_1 = qa$ , где  $q$  — электрический заряд источника, а  $a$  — момент импульса источника. Полагая источник шаром и подставляя значение  $\tilde{q}$  из (11.4.1), отсюда находим выражение для дипольного магнитного момента такого (идеализированного) объекта

$$M_1 = \frac{4\sqrt{G}}{5c} mR^2\omega, \quad (11.4.3)$$

где  $m$  — масса,  $R$  — радиус,  $\omega$  — угловая скорость источника.

5. Очевидно, что у реальных астрофизических объектов дополнительный электрический заряд будет компенсироваться абсорбированными заряженными частицами противоположного заряда, так что результирующее электрическое поле будет отсутствовать, однако в общем случае это не означает, что магнитное поле также будет скомпенсировано. Вокруг таких объектов следует ожидать некое эффективное магнитное поле, слагающееся из двух частей: 1) из первичного магнитного поля  $M_1$  дополнительного электрического заряда, обусловленного массой, и 2) вторичного магнитного поля  $M_2$ , создаваемого абсорбированными зарядами. Эти два магнитных поля частично компенсируют друг друга, однако есть основания полагать, что не полностью. Результирующее магнитное поле зависит от распределения абсорбированных зарядов.

6. Согласно (11.4.3), первичный дипольный магнитный момент Земли

$$M_1 \simeq 1 \cdot 10^{27} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3 \quad (11.4.4)$$

по порядку близок к известному эффективному значению момента Земли, который естественно представить в виде

$$M_1 - M_2 = M_{(exper)} \simeq 8 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3. \quad (11.4.5)$$

Последний составляет 8 процентов от первичного магнитного момента.

7. Выпишем в виде таблицы параметры и значения первичных, вычисленных по формуле (11.4.3), и наблюдаемых значений дипольных магнитных моментов для Солнца и ряда планет Солнечной системы.

Объект	$m(\text{г})$	$R(\text{см})$	$\omega(\text{рад} \cdot \text{сек}^{-1})$	$M_1(\text{Гс} \cdot \text{см}^3)$	$M_{exp}$
Солнце	$2 \cdot 10^{33}$	$7 \cdot 10^{10}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{35}$	$1,7 \cdot 10^{32}$
Меркурий	$3,24 \cdot 10^{26}$	$2,4 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{21}$	$5 \cdot 10^{27}$
Земля	$6 \cdot 10^{27}$	$6 \cdot 10^8$	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{27}$	$8 \cdot 10^{25}$
Марс	$6,4 \cdot 10^{26}$	$3,4 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{25}$	$2 \cdot 10^{22}$
Юпитер	$1,9 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^9$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{32}$	$4 \cdot 10^{30}$

Значения магнитных моментов Венеры и Луны незначительны.

Из таблицы видно, что для всех объектов, кроме Меркурия, первичный дипольный магнитный момент превосходит наблюдаемое значение, как и должно быть согласно обсуждаемой здесь гипотезе. Для Солнца наблюдаемое значение составляет примерно 0,1 процента от первичного магнитного момента, а для Юпитера  $\sim 3$  процента.

8. На основе формулы (11.4.4) можно оценить магнитное поле пульсаров, которые принято считать нейтронными звездами. Они различаются своими параметрами. Выберем их согласно приводимым в литературе оценкам, т. е. возьмем пульсар радиуса  $R \simeq 10^6$  см, с массой порядка солнечной  $m \simeq 10^{33}$  г и с угловой скоростью вращения  $\omega \simeq 10^1$  рад · сек. Тогда его первичный дипольный магнитный момент имеет порядок  $M_1 \simeq 10^{32}$  Гс · см<sup>3</sup>, соответствующий приводимым в литературе оценкам напряженности магнитного поля на поверхности пульсара

$$B_{(theory)} = \frac{M_1}{R^3} \simeq 10^{14} \text{ Гс} \sim B_{(exper)} \simeq 10^{12} - 10^{13} \text{ Гс}. \quad (11.4.6)$$

Следовательно, предложенная здесь гипотеза происхождения магнитного поля может быть распространена и на случай пульсаров.

9. В связи с изложенным напомним, что уже давно высказывалась гипотеза об обусловленности магнитного поля Земли и других астрофизических объектов их вращением (см., например, [202]). Известно,



что еще П. Н. Лебедевым [95] ставились эксперименты по обнаружению магнитного поля вращающихся тел. Наиболее приемлемой считается гипотеза на основе теории динамо (см., например, [6]), однако все эти гипотезы обладали рядом недостатков. Предложенное здесь объяснение происхождения магнитного поля Земли, Солнца и других астрофизических объектов не отвергает ранее обсуждавшиеся гипотезы, а в какой-то степени обосновывает и объединяет их. Так, здесь находят свое воплощение идеи П. Н. Лебедева, П. М. Блекетта и других об обусловленности магнитного поля вращением объектов. Изложенное выше в какой-то степени перекликается с гипотезами Т. Шломки и В. Сванна об изменении закона электромагнитного взаимодействия между зарядами двух знаков. В данное объяснение органически входят и соображения о вкладах в суммарное магнитное поле от токов внутри объектов.

10. Наконец, следует отметить, что данный подход позволяет под новым углом зрения взглянуть на такие известные явления, как изменения полярности дипольного момента Солнца и Земли, дрейф магнитного полюса Земли, отклонение магнитного полюса от географического и ряд других. Поскольку первичный электрический заряд и дипольный магнитный момент остаются практически неизменными, то названные эффекты можно связать с процессами перераспределения абсорбированных электрических зарядов.

## 11.5. Шестимерие с двумя времени-подобными координатами

Шестимерные геометрические теории исследовались рядом авторов не только с целью описания физических взаимодействий или введения масс, но и в связи с иными обстоятельствами. Обратим внимание на цикл работ по 6-мерным теориям с двумя времени-подобными координатами, инициированных тем фактом, что известная 15-параметрическая группа конформных преобразований в 4-мерном пространстве-времени (для безмассовых полей) изоморфна группе линейных преобразований типа лоренцевых в 6-мерном многообразии с сигнатурой  $(+ - - - | + -)$ . Кратко охарактеризуем суть этих исследований.

1. Прежде всего, напомним, что названная 15-параметрическая группа 4-мерных конформных преобразований складывается из следующих четырех подгрупп:

а) 6-параметрической группы Лоренца:

$$x'^{\alpha} = L_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}, \quad (11.5.1)$$

где на 16 коэффициентов  $L_{\nu}^{\mu}$  наложено 10 условий;

б) 4-параметрической группы трансляций:

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + a^{\alpha}, \quad (11.5.2)$$

где  $a^{\mu}$  — четыре параметра (группы Лоренца и трансляций принято объединять в группу Пуанкаре);

в) нелинейной 4-параметрической группы специальных конформных преобразований (группы СКП):

$$x'^{\alpha} = \frac{x^{\alpha} - b^{\alpha} x^2}{1 - 2b_{\beta} x^{\beta} + c^2 x^2}, \quad (11.5.3)$$

где  $b^{\alpha}$  — четыре параметра ( $x^2 = \eta_{\nu\nu} x^{\nu} x^{\nu}$ ;  $b^2 = \eta_{\mu\nu} b^{\mu} b^{\nu}$ );

г) 1-параметрической группы дилатаций:

$$x'^{\alpha} = \rho x^{\alpha}, \quad (11.5.4)$$

где  $\rho$  характеризует изменение масштаба.

Отметим, что на конформные преобразования можно смотреть под разными углами зрения. В частности, можно их понимать лишь как преобразования координат, не затрагивающих метрику, или, наоборот, относить их лишь к эквивалентным преобразованиям метрики. В последнем случае группа дилатации соответствует преобразованиям в геометрии Вейля.

2. Покажем, что названные подгруппы 4-мерных преобразований соответствуют подгруппам 15-параметрических ортогональных преобразований координат  $X^M$  в 6-мерном (плоском) пространстве с двумя времени-подобными координатами:

$$X'^M = L^M_N X^N, \quad (11.5.5)$$

где  $M, N = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Вещественные коэффициенты  $L^M_N$  образуют  $6 \times 6$ -матрицу. Выделяя комплекс классических 4-мерных координат, группу таких преобразований можно разложить на 4 подгруппы [72, 123]. Выпишем их в соответствии с перечисленными выше 4-мерными преобразованиями, причем это сделаем в двух системах координат: исходной  $\{X^M\}$ , в которой записаны (11.5.5), и другой  $\{x^M\}$ , связанной с первой соотношениями:

$$x^{\mu} = \frac{X^{\mu}}{X^4 + X^5}; \quad (11.5.6)$$

$$x^4 = -X^4 + X^5; \quad x^5 = X^4 + X^5. \quad (11.5.7)$$

а) Подгруппа 4-мерных преобразований в исходной системе координат имеет вид:

$$X'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} X^{\nu}; \quad X'^4 = X^4; \quad X'^5 = X^5. \quad (11.5.8)$$

где подматрица  $L^{\mu}_{\nu}$  определяется 6 параметрами, соответствующими преобразованиям Лоренца.

Во второй системе координат эти преобразования представляются в виде:

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu}; \quad x'^4 = x^4; \quad x'^5 = x^5, \quad (11.5.9)$$

где первое выражение описывает 4-мерные преобразования Лоренца (11.5.1).

б) Подгруппа смешанных преобразований в исходной системе координат

$$X'^{\mu} = X^{\mu} + a^{\mu}(X^4 + X^5); \quad (11.5.10)$$

$$X'^4 = -a_{\nu}X^{\nu} + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)X^4 - \frac{a^2}{2}X^5; \quad X'^5 = a_{\nu}X^{\nu} + \frac{a^2}{2}X^4 + \left(1 + \frac{a^2}{2}\right)X^5. \quad (11.5.11)$$

характеризуется 4 вещественными параметрами  $a_{\mu}$ . Здесь использовано обозначение  $a^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$ . Легко видеть, что определитель подматрицы обладает свойством

$$\begin{vmatrix} L_{.4}^4 & L_{.5}^4 \\ L_{.4}^5 & L_{.5}^5 \end{vmatrix} = 1. \quad (11.5.12)$$

Во второй системе координат эти преобразования записываются в форме:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}; \quad x'^4 = x^4 + 2a_{\nu}x^{\nu} + a^2x^5; \quad p'^5 = p^5, \quad (11.5.13)$$

где, очевидно, первое из преобразований описывает трансляцию (11.5.2).

в) Подгруппа других смешанных преобразований преобразований в исходной системе координат имеет вид:

$$X'^{\mu} = X^{\mu} + b^{\mu}(X^4 - X^5); \quad (11.5.14)$$

$$X'^4 = -b_{\nu}X^{\nu} + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)X^4 + \frac{b^2}{2}X^5; \quad X'^5 = -b_{\nu}X^{\nu} - \frac{b^2}{2}X^4 + \left(1 + \frac{b^2}{2}\right)X^5 \quad (11.5.15)$$

также характеризуется 4 вещественными параметрами  $b^{\mu}$ . Отличие от преобразований (11.5.10)–(11.5.11) состоит лишь в знаках при векторных параметрах.

Во второй системе координат эти преобразования записываются в форме:

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu}x^4/x^5}{1 - 2b_{\nu}x^{\nu} + b^2x^4/x^5}; \quad (11.5.16)$$

$$x'^4 = x^4; \quad x'^5 = x^5 - 2b_{\nu}x^{\nu} + b^2x^4. \quad (11.5.17)$$

Первое из этих преобразований соответствует преобразованиям СКП (11.5.3), если учесть, что данные формулы пишутся для 6-оптики, где имеют место соотношения:

$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 + (X^4)^2 - (X^5)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \equiv x^{\mu}x_{\mu} = x^4/x^5. \quad (11.5.18)$$

г) Однопараметрическая подгруппа преобразований дополнительных координат в исходной системе координат характеризуется матрицей

$$(L^M_{\cdot N}) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \hline 0 & \varphi_2 & \varphi_1 \end{array} \right), \quad \text{где } \varphi_1 = \frac{1 + \rho^2}{2\rho}; \quad \varphi_2 = \frac{1 - \rho^2}{2\rho}, \quad (11.5.19)$$

так что  $\varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 1$ . В качестве независимого параметра выступает величина  $\rho$ . При этих преобразованиях имеем

$$X'^\mu = X^\mu; \quad X'^4 = \frac{1 + \rho^2}{2\rho} X^4 + \frac{1 - \rho^2}{2\rho} X^5; \quad X'^5 = \frac{1 - \rho^2}{2\rho} X^4 + \frac{1 + \rho^2}{2\rho} X^5. \quad (11.5.20)$$

Во второй системе координат эти преобразования представляются в форме:

$$x'^\mu = \rho x^\mu; \quad x'^4 = \rho x^4; \quad x'^5 = \frac{1}{\rho} x^5, \quad (11.5.21)$$

где первое из выражений совпадает с (11.5.4).

3. В работах ряда авторов обращается внимание на то, что преобразования Лоренца впервые были найдены формально как группа преобразований координат, относительно которых коварианты уравнения Максвелла. И лишь спустя некоторое время было установлено, что пространство и время образуют единое 4-мерное многообразие. Это послужило отправной точкой для исследований 6-мерных геометрических теорий с данной сигнатурой. Осуществлялся переход от однородных координат на «конусе» (11.5.18) ко всему множеству точек 6-мерного многообразия.

Далее предлагалось пойти по пути, приведенному в начале XX века к построению общей теории относительности. Как тогда, после открытия специальной теории относительности с 6-параметрическими преобразованиями Лоренца, Эйнштейном был осуществлен переход к 4-мерному искривленному пространству-времени ОТО с группой допустимых 4-мерных преобразований (1.1.1), так и в рамках 6-мерной теории с обсужденной выше 15-параметрической группой предлагалось перейти к искривленному пространственно-временному многообразию с группой допустимых преобразований

$$x'^M = x'^M(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5). \quad (11.5.22)$$

В ряде работ изучались возможные следствия такой теории и вопрос о необходимых геометрических ограничениях в ней для перехода к известным теориям гравитации и электромагнетизма. Из таких работ наибольшего внимания заслуживают две серии работ: М. Павшича [123] и Р. Л. Ингрехема [72]. Одним из главных недостатков теорий такого рода является возникновение из смешанных компонент 6-мерного метрического тензора второго векторного поля с неверным знаком энергии в уравнениях Эйнштейна.

4. Наконец, следует отметить работы А. П. Ефремова [61] и ряда других авторов, где рассматривались 6-мерные геометрические теории с сигнатурой  $(+ - - - | + +)$ , т. е. такие варианты геометрии, где проявляется своеобразная симметрия между времени- и пространственно-подобными измерениями.

## 11.6. Выводы, замечания, гипотезы

1. Исследования геометрофизики в рамках многомерия от 8 до 5 измерений показывают, что *дополнительные (скрытые) размерности описывают свойства микромира*. Если три скрытые размерности калуцевского типа характеризуют сильные и электрослабые взаимодействия в микромире, то одна скрытая размерность клейновского типа тесно связана с закономерностями квантовой механики.

2. Обобщая основные положения геометрофизики, сформулируем следующий вывод: *представления о категории пространства-времени содержат в себе три составные части*: 4-мерное классическое пространство-время, используемое в стандартной теории относительности, 4-мерное (классическое) пространство скоростей и 4-мерное пространство дополнительных (скрытых для классического мира) размерностей (микромира).

3. *Наиболее существенным свойством скрытых размерностей, отличающим их от явных классических, является компактификация*, связанная с описанием в физике микромира единичного (элементарного) звена дискретного перехода системы из одного в другое состояние. В изложенной выше геометрофизике экспоненциальная зависимость от скрытых размерностей не выводилась, а постулировалась, причем это делалось из намерения (убеждения или заблуждения) класть в основу физики координатное многомерное пространство-время.

4. *Компактификация скрытых размерностей проявляется уже в квантовой механике (теории)*. В наиболее распространенной шредингеровской формулировке квантовой теории осуществляется вложение неклассических закономерностей микромира в 4-мерные классические пространственно-временные представления посредством написания волновых динамических уравнений для функций, характеризующих частицы.

В связи с этим напомним высказывание одного из создателей квантовой механики, Луи Де Бройля: «Понятия пространства и времени взяты из нашего повседневного опыта и справедливы лишь для явлений большого масштаба. Нужно было бы заменить их другими понятиями, играющими фундаментальную роль в микропроцессах, которые бы асимптотически переходили при переходе от элементарных процессов к наблюдаемым явлениям обычного масштаба в привычные понятия пространства-времени. (...) Однако пока мы не добились успеха в распространении наших представлений в указанном направлении, мы должны стараться с большими или меньшими трудностями втиснуть

микроскопические явления в рамки понятий пространства и времени, хотя нас все время будет беспокоить чувство, что мы пытаемся втиснуть алмаз в оправу, которая ему не подходит» [16, с. 187]. Можно привести высказывания в таком же роде Ван Данцига [53] и ряда других видных физиков-теоретиков. С этих позиций проявление скрытых размерностей со столь непривычным для классики свойством компактификации представляет собой выпадение «алмаза» микромира из не подходящей для него 4-мерной пространственно-временной «оправы».

5. Обратим внимание еще на одно чрезвычайно любопытное обстоятельство. В истории развития неевклидовой геометрии важную роль сыграли геометрии трех типов: евклидовой, геометрии Лобачевского и геометрии Римана (постоянной положительной кривизны). К этим геометриям можно прийти на основе трех возможных ответов на вопрос: сколько прямых (геодезических) линий, параллельных заданной прямой (геодезической), можно провести через точку, лежащую вне ее? При постулировании возможности проведения одной прямой получаем евклидову геометрию, двух (а следовательно, и бесконечно многих) — геометрию Лобачевского, а постулируя невозможность проведения ни одной линии, приходим к сферической геометрии Римана.

Затем, после создания ОТО, аналогичная тройственная альтернатива возникла в космологии. Из решений Фридмана уравнений Эйнштейна следовало, что наш мир, точнее, его пространственное сечение в системе отсчета, сопутствующей материи, может описываться геометрией Евклида, геометрией Лобачевского или сферической геометрией Римана. Современным астрофизическим экспериментальным данным более всего удовлетворяет вариант геометрии Евклида.

Вернемся к трем составляющим категории пространства-времени в геометрофизике. Если 4-мерное координатное пространство-время (база расслоенного пространства) в космологических масштабах представляет собой наиболее близкое обобщение (с оговорками на сигнатуру) геометрии Евклида, то пространство скоростей (слой расслоенного пространства) описывается геометрией Лобачевского. Оставшееся 4-мерное пространство скрытых размерностей, согласно геометрофизике, компактифицировано, т. е. является замкнутым пространством, в некотором смысле аналогичным сферическому пространству Римана. (Отличие состоит в топологии. В геометрофизике использована топология 4-тора, однако не исключена возможность обобщения геометрофизики

в иной топологии<sup>1)</sup>, соответствующей топологии риманова сферического пространства.)

Таким образом, в геометрофизике еще с одной стороны проявляется троичность, связанная с тремя типами классических геометрий.

6. В изложенной 8-мерной геометрической теории физические векторные поля вводились через смешанные компоненты метрического тензора. В тени остались варианты геометрической теории, в которых для этой цели используются неримановы геометрии, где физические поля предлагается описывать компонентами тензора кручения или сегментарной кривизны (см. [32, 90]). Исследования показывают, что, привлекая степени свободы более общих дифференциальных геометрий Схоутена, можно сэкономить число размерностей используемой геометрии, однако в таких теориях отсутствует обнаруженная в метрическом варианте симметрия между явными и скрытыми размерностями.

7. В рамках геометрофизики открывается широкий простор для выдвижения новых идей и гипотез. Например, имеется ряд работ, в которых предлагается геометризовать не только бозонные поля переносчиков взаимодействий, но и саму материю. Можно имитировать материальные источники через скалярный конформный фактор (см. [22; 29, с. 247; 83]). Представив его в виде суммы из нескольких комплексных скалярных слагаемых, можно таким образом описать заряженные частицы. Имеются и другие возможности, однако для геометризации фермионных частиц необходимо так или иначе вводить в геометрию принципиально новые положения (постулаты).

8. Изложенные здесь результаты и высказанные соображения заставляют задуматься над возможностями геометрического миропонимания и поставить вопрос о поиске более глубоких оснований физической теории и о наиболее перспективных путях ее развития. В современной физике представлено несколько подходов к описанию реальности, что делает актуальным их сравнительный анализ. Может оказаться, что более эффективным будет не дальнейшее развитие геометрофизики, а построение более общей теории, вобравшей в себя идеи и достижения всех известных подходов к описанию реальности, среди которых важное место, несомненно, займут идеи и принципы геометрофизики.

---

<sup>1)</sup>Отметим, что в подходе Фока—Хилерааса [171, 180] к задаче атома водорода проявляется  $O(4)$ -симметрия, свидетельствующая о необходимости использования геометрии Римана в микромире.

# Метафизические основы миропонимания



В фундаментальной теоретической физике XX в. традиционно выделяют два столпа: ОТО (начала геометрофизики) и квантовую теорию, опирающиеся на разные исходные понятия и принципы. Сложный процесс согласования этих и других направлений исследований позволил выявить метафизический характер лежащих в их основе различий и констатировать тенденцию сближения современной науки с **метафизикой** [41].

*Метафизика, понимаемая как учение о первичных (предельных) принципах и началах (категориях) бытия, знания, культуры, проявляется в двух подходах к реальности: холистическом и редукционистском. Холизм основан на таком понимании мира, при котором целое рассматривается как доминирующее и предшествующее своим частям. Холизму противостоит редукционизм, расщепляющий единое на части, понимаемые как предшествующие целому. Оба этих подхода имели важное значение и дополняли друг друга в процессе познания мира.*

Чрезвычайно важным фактором метафизического характера является выделенность в редукционистском подходе троичности базисных начал (частей целого). В фундаментальной теоретической физике это **три** физические (метафизические) **категории**: **(П-В) пространство-время**, **(Ч) частицы** (на квантовом уровне — фермионы) и **(П) поля переносчиков взаимодействий** (бозонов: фотонов, Z-бозонов, глюонов и т. д.). Принято полагать, что в физике изучаются тела (частицы), которые находятся не иначе, как в пространстве-времени, и взаимодействуют друг с другом через поля: гравитационное, электромагнитное и др.

Поскольку в учебниках и в большинстве книг по физике названные категории, как правило, рассматриваются независимыми, допускается изучение свойств пространства-времени без материи, а также свободных полей без частиц-источников, то данные теории отнесем к (редукционистской) *триалистической метафизической парадигме*. Под пара-



*дигмой будем понимать систему понятий, категорий и принципов, определяющих основания и характер теории.*

В XX в. в теоретической физике доминировали теории (программы), в которых строилась физическая картина мира не на трех, а на меньшем числе из названных или обобщенных метафизических категорий. Значительные результаты были получены в построении теорий на базе **двух** метафизических категорий: обобщенной, объединяющей в себе две категории, и оставшейся. Такие теории будем называть *дуалистическими*. Примером исследовательской программы (теории) такого рода является рассмотренная выше геометрофизика, которая строится на двух категориях: обобщенной категории искривленного (многомерного) пространства-времени и частиц (физических фермионных полей).

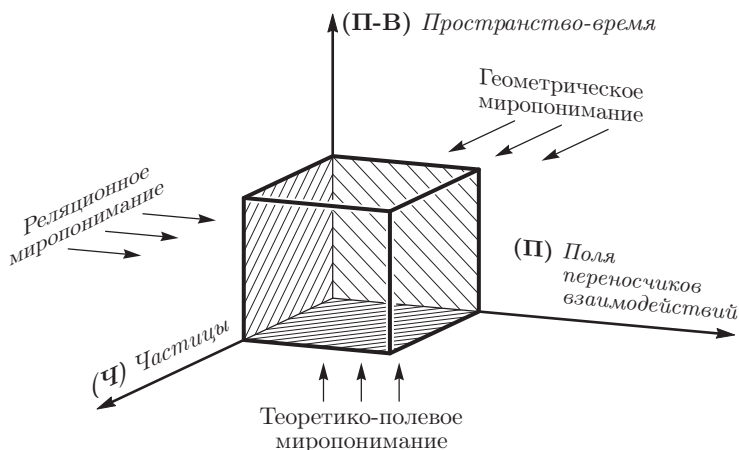
Поскольку имеется три варианта объединения двух категорий из трех, следует различать **три** таких типа метафизических дуалистических парадигм или, другими словами, *три миропонимания* одной и той же физической реальности (видения мира под разными углами зрения). При этом оказалось, что квантовая теория относится к иному, по сравнению с геометрофизикой, миропониманию.

В этой части изложены теории гравитационного и иных физических взаимодействий в рамках разных миропониманий и рассмотрены так называемые *парадигмальные проблемы ОТО и геометрофизики*, обусловленные либо смешением понятий из разных парадигм, либо абсолютизацией категорий используемой парадигмы.

# Метафизические парадигмы в фундаментальной физике



Представим единое физическое мироздание в виде куба, построенного на трех осях, соответствующих вышеперечисленным метафизическим категориям триалистической парадигмы (см. рис. 12.1). Одна из вершин



**Рис. 12.1.** Куб физического мироздания, построенный на трех метафизических категориях

куба выбрана в качестве начала координатных осей, олицетворяющих три категории: по вертикали — категория пространства-времени, по горизонтали вправо — категория полей переносчиков взаимодействий, по горизонтали вперед — категория частиц. Можно сказать, что физические теории триалистической парадигмы описывают мироздание через своеобразные его проекции на оси-ребра куба.

**Геометрическим миропониманием** назван взгляд на куб физической реальности со стороны его задней грани, характеризующей ортами категорий пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий. К этому миропониманию относится вся геометрофизика, в которой цен-

тральное место занимает эйнштейновская ОТО, но в рамках многомерия геометризуются и другие виды физических взаимодействий.

**Теоретико-полевое миропониманием** назван вариант теорий, основанный на объединении категорий частиц и полей. На рисунке теоретико-полевое миропонимание соотносится со взглядом на куб снизу. Этот подход определял главное, можно сказать, магистральное направление развития физики XX в. К теориям этой парадигмы относится квантовая механика и квантовая теория поля, в которых симметричным образом рассматриваются (бозонные) поля переносчиков взаимодействий и (фермионные) поля частиц. Апогеем этого подхода стало открытие во второй половине прошлого века суперсимметричных преобразований между фермионными и бозонными волновыми функциями. Эта же линия продолжается в столь модных в последнее десятилетие исследованиях суперструн и супермембран.

Взгляд на физическую реальность с позиций категорий пространства-времени и частиц назван **реляционным миропониманием** (см. [43]). К нему, прежде всего, относится теория прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана, основанная на концепции дальнего действия, альтернативной общепринятой концепции ближнего действия, воплощенной в теории поля. Дальнейшее развитие этого направления просматривается в так называемой теории (унарных) физических структур отношений, где вместо отдельных категорий пространства-времени и частиц вводится новая (метафизическая) категория парных отношений (см. [91–93]).

Более детальное рассмотрение дуалистических парадигм показывает [41], что в каждом из трех названных миропониманий следует различать пары возможностей, определяемых двумя способами перехода от трех категорий к двум:

- а) если две прежние категории заменяются одной обобщенной при сохранении неизменной третьей и
- б) если две из прежних категорий так или иначе берут на себя функции третьей, т. е. в каком-то смысле становятся двумя обобщенными категориями.

Таким образом, шесть дуалистических парадигм имеют промежуточный характер между монистической и триалистической парадигмами, образуя вместе с ними *иерархию из восьми метафизических парадигм*. Возвращаясь к проблеме построения теории в рамках монистической парадигмы, о которой мечтало не одно поколение физиков-теоретиков, подчеркнем, что *прошлое столетие стало промежуточным этапом на пути от триалистической парадигмы, сформулированной еще Нью-*

тоном, — через дуалистические — к монистической парадигме, опирающейся на единую обобщенную категорию, что позволяет говорить о тенденции перехода от категорийного редукционизма к холизму.

В этой главе рассмотрены теории гравитационного и иных взаимодействий, развивавшиеся в рамках триалистической, а также теоретико-полевой и геометрической дуалистических парадигмах. Описанию реляционного подхода и анализу парадигмальных проблем общей теории относительности посвящены две следующие главы.

## 12.1. Теории гравитации в триалистической парадигме

Триалистическая парадигма в физике берет начало с трудов Ньютона и Галилея. Во втором законе классической механики Ньютона  $md^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$  присутствуют три фактора, соответствующие трем категориям этой парадигмы:  $m$  — категории частиц (материи),  $d^2\vec{r}/dt^2$  — категории пространства и времени,  $\vec{F}$  — категории поля.

Рассмотрим теории гравитации, развивавшиеся в рамках триалистической парадигмы.

### 12.1.1. Неэйнштейновские теории гравитации

Как известно, закон всемирного тяготения Ньютона между двумя телами с массами  $m_{(1)}$  и  $m_{(2)}$

$$\mathcal{F}_{(gr)} = -G \frac{m_{(1)}m_{(2)}}{r^2} = -m_{(1)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (12.1.1)$$

можно вывести с помощью уравнения Пуассона для скалярного гравитационного потенциала с источником

$$\epsilon^{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \equiv \nabla^2 \varphi = -4\pi G \rho, \quad (12.1.2)$$

где  $\rho$  — плотность материи,  $\epsilon^{ij}$  — метрический тензор 3-мерного евклидова пространства,  $G$  — ньютонова гравитационная постоянная. Отметим, что закон для электростатических взаимодействий двух зарядов  $q_{(1)}$  и  $q_{(2)}$  с силой  $\mathcal{F}_{(e)} = q_{(1)}q_{(2)}/r^2$  был записан Кулоном по образу и подобию ньютонова закона всемирного тяготения.

Сразу же после создания специальной теории относительности А. Пуанкаре записал релятивистское обобщение уравнения (12.1.2) для

скалярного поля, которое имеет вид

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \equiv \square \varphi = -4\pi G\rho. \quad (12.1.3)$$

В дальнейшем анализ показал (см. [24]), что теория гравитации, описываемая одним скалярным потенциалом  $\varphi$ , противоречит наблюдаемым данным — дает неверные значения для угла отклонения лучей света, проходящих вблизи Солнца, и для смещения перигелия Меркурия.

Недостатки скалярной теории гравитации можно преодолеть в рамках триалистической парадигмы, перейдя к многокомпонентному (тензорному) описанию гравитационного поля. Исследовался ряд вариантов таких теорий, основанных на следующих трех требованиях:

- 1) лоренц-инвариантность теории на фоне 4-мерного пространства-времени Минковского;
- 2) принцип соответствия с теорией гравитации Ньютона;
- 3) согласие с классическими эффектами общей теории относительности.

Анализировались скалярные, векторные и тензорные (второго ранга) теории гравитации. Было показано, что сформулированным требованиям можно удовлетворить лишь на базе тензорных вариантов теории, однако при формальном конструировании лагранжиана такого поля возникает ряд возможностей, различающихся выбором констант в квадратичных по первым производным слагаемых.

В начале 40-х годов была предложена теория Биркгофа [8], в которой тензорные потенциалы гравитационного поля  $\varphi_{\mu\nu}$  удовлетворяли линейным уравнениям

$$\square \varphi^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu}, \quad (12.1.4)$$

где  $T^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса негравитационной материи.

Аналогом уравнений геодезических линий в теории Биркгофа являлись уравнения движения

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = \left( \frac{\partial \varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \varphi^{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds}. \quad (12.1.5)$$

В теории Биркгофа возникли трудности с отсутствием положительной определенности энергии гравитационного поля. В частности, это объясняется тем, что в этой теории аналог условий Лоренца  $\partial \varphi^{\mu\nu} / \partial x^\mu = 0$  соответствовал свойству тензора энергии-импульса  $\partial T^{\mu\nu} / \partial x^\mu = 0$ , но не

$$\frac{\partial (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})}{\partial x^\mu} = 0, \quad (12.1.6)$$

что должно быть. Здесь  $t^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса гравитационного поля.

В ряде других вариантов тензорной теории гравитации, например Боргардта, этот недостаток преодолевался посредством перехода к нелинейной теории гравитации, где гравитационные потенциалы  $\varphi^{\mu\nu}$  удовлетворяют нелинейным уравнениям поля:

$$\square\varphi^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}). \quad (12.1.7)$$

### 12.1.2. Релятивистская теория гравитации

В наиболее развитом виде тензорная теория гравитации в рамках триалистической метафизической парадигмы представлена в так называемой *релятивистской теории гравитации* (РТГ), предложенной А. А. Логуновым и его сотрудниками. РТГ базируется на следующих принципах:

- «1) Пространство Минковского (псевдоевклидова геометрия пространства-времени) есть фундаментальное пространство, общее для всех физических полей, в том числе и для гравитационного. (...)
- 2) Гравитационное поле описывается симметричным тензором второго ранга  $\varphi^{\mu\nu}$  и является реальным физическим полем, обладающим плотностью энергии-импульса, нулевой массой покоя, спиновыми состояниями 2 и 0. Это положение в корне отличает РТГ от ОТО. (...)
- 3) Принцип геометризации, суть которого заключается в том, что взаимодействие гравитационного поля с веществом, в силу его универсальности, осуществляется путем «подключения» гравитационного поля  $\varphi^{\mu\nu}$  к метрическому тензору  $\eta^{\mu\nu}$  пространства Минковского в плотности лагранжиана по правилу

$$\tilde{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\eta}(\eta^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}). \quad (12.1.8)$$

(...) Метрический тензор  $\eta^{\mu\nu}$  пространства Минковского и тензор гравитационного поля  $\varphi^{\mu\nu}$  в этом пространстве являются первичными понятиями, а риманово пространство и его метрика  $g^{\mu\nu}$  — вторичными, обязанными своим происхождением гравитационному полю и его универсальному действию на вещество  $\varphi_A(\dots)$

- 4) Скалярная плотность лагранжиана гравитационного поля является квадратичной формой первых ковариантных производных  $D_p\tilde{g}^{\mu\nu}$  по метрике Минковского» [98, с. 10–13].

Таким образом, в этой теории налицо все три ключевые категории: пространство-время Минковского, тензорное поле второго ранга, описывающее гравитацию, и частицы в виде материальных источников гравитационного поля.

Скалярная плотность лагранжиана гравитационного поля искалась по принципам стандартной теории поля в самом общем виде:

$$\mathcal{L}_{(gr)} = a\tilde{g}_{\alpha\mu}\tilde{g}_{\beta\nu}\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_{\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} + b\tilde{g}_{\alpha\nu}D_{\mu}\tilde{g}^{\sigma\nu}D_{\sigma}\tilde{g}^{\alpha\mu} + c\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\lambda\sigma}D_{\lambda}\tilde{g}^{\alpha\beta}D_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (12.1.9)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — некоторые константы,  $D_{\mu}$  — ковариантная производная относительно метрического тензора Минковского (в произвольной координатной системе). Основная задача состояла в нахождении неизвестных коэффициентов в (12.1.9). Из ряда естественных условий для теории поля и принципа соответствия с известной теорией гравитации они были найдены в виде [98, с. 69]

$$a = -\frac{1}{2}b; \quad c = \frac{1}{4}b; \quad b = -\frac{c^3}{32\pi G}. \quad (12.1.10)$$

В итоге плотность лагранжиана гравитационного поля (12.1.9) оказалась представимой в виде

$$\mathcal{L}_{(gr)} = \frac{c^3}{32\pi G} (\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}D_{\lambda}\tilde{g}^{\mu\nu} - \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\sigma}\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\lambda}), \quad (12.1.11)$$

где тензор третьего ранга (в пространстве-времени Минковского)  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma}$  определен по формуле

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\sigma\lambda} (D_{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda} + D_{\nu}\tilde{g}_{\mu\lambda} - D_{\lambda}\tilde{g}_{\mu\nu}). \quad (12.1.12)$$

Используя эту формулу, плотность лагранжиана можно представить в форме

$$\mathcal{L}_{(gr)} = -\frac{c^3}{16\pi G}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\check{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\sigma}\check{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\lambda} - \check{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}\check{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma}), \quad (12.1.13)$$

где тензор третьего ранга  $\check{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma}$  имеет вид

$$\check{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (D_{\mu}g_{\nu\lambda} + D_{\nu}g_{\mu\lambda} - D_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (12.1.14)$$

Полная система уравнений для гравитационного поля в РТГ имеет вид

$$\eta^{\lambda\sigma}D_{\lambda}D_{\sigma}\tilde{g}^{\mu\nu} = 16\pi\frac{G}{c^4}t^{\mu\nu}; \quad (12.1.15)$$

$$D_{\mu}\tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (12.1.16)$$

где  $t^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса гравитационного поля и материи, получаемый из плотности полного лагранжиана вариацией по  $\eta_{\mu\nu}$ . Уравнения (12.1.16), соответствующие условиям гармоничности в ОТО, исключают из тензорного гравитационного поля векторные составляющие.

Уравнения (12.1.15) могут быть также представлены в форме уравнений Эйнштейна [98, с. 73]

$$\sqrt{-g}R_{\mu\nu} = \kappa \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right), \quad (12.1.17)$$

где эффективный тензор кривизны второго ранга представляется в форме

$$R_{\mu\nu} = D_\lambda \check{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - D_\mu \check{\Gamma}_{\nu\lambda}^\lambda + \check{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma \check{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\lambda - \check{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \check{\Gamma}_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (12.1.18)$$

На основе сферически-симметричных решений этих уравнений показано [98], что из РТГ следуют известные классические эффекты ОТО.

Однако следует заметить, что из-за постулирования плоского пространства-времени Минковского (с соответствующей ему топологией) в РТГ теряются решения с иной топологией, например, сферы, а также отсутствуют ситуации с топологическими особенностями.

В сообществе отечественных физиков-гравитационистов разгорелась дискуссия по поводу релятивистской теории гравитации Логунова, в ходе которой отмечались различные частные недостатки (скорее, недоработки) этой теории: интерпретация двух типов световых конусов, неполнота используемых координатных карт и т. д. Однако главный источник возражений состоял не в технических проблемах, — их можно преодолеть, — а в призыве авторов заменить эйнштейновскую ОТО теорией Логунова, так как она «изменяет сложившиеся под влиянием ОТО представления о пространстве-времени, выводит нас из дебрей римановой геометрии и по духу соответствует современным теориям в физике элементарных частиц» [98, с. 13]. На этом основании Логунов призывал «отказаться от ОТО, отдав ей должное как определенному этапу в развитии наших представлений о гравитации» [98, с. 9].

Суть дискуссии по сути дела носила метафизический характер. РТГ Логунова естественна в рамках триалистической парадигмы и, если строго следовать логике полевых представлений, теория гравитационного *поля* должна быть представлена именно таким образом. Однако данная концепция противоречит стратегической тенденции развития физики, выражающейся в стремлении перейти к меньшему числу категорий, и поэтому расценивалась как шаг назад — от двух категорий эйнштейновской теории гравитации обратно к трем категориям ньютоновой триалистической парадигмы. РТГ Логунова не вызвала бы особых



возражений, если бы трактовалась как исследование теории гравитации под иным углом зрения, а не как призыв отказаться от геометрического миропонимания, представленного в эйнштейновской ОТО.

### 12.1.3. «Перелицовка» ОТО в теорию триалистической парадигмы

Объединение теорий всех взаимодействий возможно лишь в случае, если они имеют одни и те же основания, в частности, если они построены в рамках одной и той же метафизической парадигмы. Имеются три пути реализации программы объединения гравитации с другими взаимодействиями: либо теорию гравитации переформулировать в традиционном духе теории поля (в триалистической парадигме или в теоретико-поле-вом миропонимании), либо, наоборот, теории электрослабых и сильных взаимодействий представить в геометризованном виде, что делалось в 3-й части данной книги, либо попытаться найти новую основу, от которой можно было бы перейти и к полевой, и к геометрической формулировкам. Последний путь предлагается в рамках монистической парадигмы в бинарной геометрофизике [36]. Здесь же рассмотрим первый путь, когда ОТО «перелицовывается» в теорию триалистической парадигмы. По сути дела, это обратный путь по сравнению с релятивистской теорией гравитации — от готовой теории Эйнштейна к лоренц-ковариантной теории на фоне плоского пространства-времени Минковского. Этот путь использовался в работах Белинфанте, А. Папаетру, С. Гупта [52] и многих других авторов.

В этом подходе к эйнштейновской теории гравитации в некоторой специальной (каким-то образом выделенной) координатной системе плотность метрического тензора представляется в виде

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu}, \quad (12.1.19)$$

где постулируется малость добавок к метрическому тензору пространства-времени Минковского

$$|\varphi^{\mu\nu}| \ll 1. \quad (12.1.20)$$

В данной теории все геометрические величины разлагаются в ряды по малым добавкам  $\varphi^{\mu\nu}$  к метрическому тензору плоского пространства-времени. Выпишем ключевые формулы такого разложения. В силу соотношения

$$|\tilde{g}^{\mu\nu}| = (\sqrt{-g})^4 |g^{\mu\nu}| = \frac{(\sqrt{-g})^4}{g} = g \quad (12.1.21)$$

имеем

$$g = -1 + \eta_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\varphi^{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta} + O(\varphi^3), \quad (12.1.22)$$

где значком  $O(\varphi^3)$  обозначена бесконечная совокупность слагаемых третьего и более высоких порядков по малым добавкам к метрическому тензору.

Для построения теории достаточно знать разложения в бесконечные ряды ко- и контравариантных компонент метрического тензора. Для них имеем:

$$g^{\mu\nu} = (-g)^{-1/2}\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varphi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\left(\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\lambda} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\lambda}\right)\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\sigma\lambda} + O(\varphi^3); \quad (12.1.23)$$

$$g_{\mu\nu} = -(-g)^{-1/2}\text{Минор}(\tilde{g}^{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + \left(\eta_{\alpha\mu}\eta_{\sigma\nu}\eta_{\beta\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}\eta_{\sigma\lambda} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\lambda} + \frac{1}{8}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\lambda}\right)\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\sigma\lambda} + O(\varphi^3). \quad (12.1.24)$$

В качестве плотности лагранжиана гравитационного поля берется (5.2.10) (плотность скалярной кривизны без дивергентного члена), которая теперь становится лоренц-инвариантным скаляром. В локально-декартовых координатных системах с учетом дополнительных условий де Дондера–Фока

$$\frac{\partial\tilde{g}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \rightarrow \frac{\partial\varphi^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (12.1.25)$$

первые порядки разложения плотности лагранжиана гравитационного поля в бесконечный ряд имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(gr)} = & -\frac{1}{4\pi c}\left(\eta^{\sigma\lambda}\frac{\partial\varphi^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} + \right. \\ & + \varphi^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + \eta^{\sigma\lambda}\varphi^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} + \\ & \left. + 2\varphi_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi^{\mu\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{\partial\varphi^{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - 2\eta^{\sigma\lambda}\eta^{\alpha\beta}\varphi^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi_{\mu\alpha}}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\varphi_{\nu\beta}}{\partial x^\lambda} + O(\varphi^4)\right), \quad (12.1.26) \end{aligned}$$

где опять использовано обозначение  $\varphi = \eta_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$ . В этом выражении квадратичные слагаемые описывают лагранжиан свободного (линеаризованного) гравитационного поля, а все последующие трактуются как члены самодействия гравитации, соответствующие нелинейным слагаемым в уравнениях поля.

Именно на основе этого выражения описываются слабые гравитационные волны, производится квантование слабого гравитационного поля и вводятся кванты этого поля — гравитоны.

## 12.2. Калибровочный подход к описанию взаимодействий

Отдельно выделим калибровочный подход к описанию физических взаимодействий (см. [120, 151]), который, с одной стороны, широко используется в дуалистическом теоретико-полевым миропонимании, и, с другой стороны, на его основе достигается наиболее естественный переход от теории гравитационных взаимодействий в триалистической парадигме к геометрической.

Калибровочный подход опирается на два ключевых положения: во-первых, на пронизывающие всю физику симметрии, описываемые группами Ли, и, во-вторых, на идею о локализации (зависимости от координат) параметров групп. Физические поля вводятся как факторы, позволяющие компенсировать нарушение соответствующих симметрий при локализации групп. *В этом подходе категория бозонных полей фактически заменяется эквивалентным постулатом инвариантности теории относительно соответствующих локализованных групп Ли.*

### 12.2.1. Калибровочная теория электромагнетизма

Продемонстрируем калибровочный подход на примере простейшего случая  $U(1)$ -симметрии, используемой для введения электромагнитного взаимодействия (или как составной части при построении модели Вайнберга—Салама—Глэшоу). Как известно, в квантовой теории поля наблюдаемые величины — вероятность обнаружения частиц, значения импульса, момента импульса и т. д. — строятся из квадратичных комбинаций вида

$$\psi^* D\psi, \quad (12.2.1)$$

где  $\psi$  — комплексная волновая функция,  $D$  — соответствующий оператор наблюдаемой величины. Для всех таких квадратичных комбинаций имеет место симметрия относительно преобразований волновой функции

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha g_1}; \quad \psi^* \rightarrow \psi'^* = \psi^* e^{-i\alpha g_1}, \quad (12.2.2)$$

где  $g_1$  следует понимать как некий заряд частицы. При построении электродинамики это электрический заряд ( $g_1 \sim e$ ). Очевидно, что

в квадратичных алгебраических комбинациях вида (12.2.1) экспоненты сокращаются. Поскольку можно определить результат от двух таких преобразований, ввести единичное и обратное преобразования, то можно утверждать, что эти преобразования образуют группу, характеризуемую одним параметром  $\alpha$ . Эта группа является группой  $U(1)$ . При постоянных  $\alpha$  говорят, что имеет место глобальная  $U(1)$ -симметрия.

Появление взаимодействия в данном подходе ассоциируется с нарушением глобальной групповой симметрии. Применяется прием, называемый *локализацией группы*. Он состоит в том, что параметр  $\alpha$  полагается зависящим от координат 4-мерного пространства-времени. Это оказывается принципиально существенным, если оператор  $D$  в (12.2.1) содержит в себе дифференцирование по координатам.

Поясним это на примере оператора импульса, когда  $D \sim \partial/\partial x^\mu$ . Тогда при преобразованиях (12.2.2) имеем

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \rightarrow \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial x^\mu} = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + ig_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu} \psi^* \psi, \quad (12.2.3)$$

где дополнительное слагаемое возникло из дифференцирования экспоненты. Оно нарушает инвариантность (12.2.1) относительно преобразования (12.2.2).

Для восстановления инвариантности предлагается, во-первых, изменить оператор дифференцирования следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ig_1 B_\mu, \quad (12.2.4)$$

и, во-вторых, постулировать, что при преобразованиях (12.2.2) введенное здесь векторное поле  $B_\mu$  изменяется по закону

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu}. \quad (12.2.5)$$

Очевидно, что комбинация (12.2.1) с оператором  $D$  вида (12.2.4) остается инвариантной относительно преобразований (12.2.2).

Именно так принято вводить электромагнитное взаимодействие в современной калибровочной теории (в электродинамике). Только в этом случае следует положить

$$B_\mu = A_\mu \quad \text{и} \quad g_1 = e/\hbar c,$$

тогда (12.2.5) становится известным в стандартной электродинамике калибровочным преобразованием векторного потенциала. Сохраняющейся величиной, соответствующей  $U(1)$ -симметрии, является электрический заряд системы.

### 12.2.2. Калибровочный подход к описанию электрослабых взаимодействий

В середине 50-х годов Янгом и Миллсом [201] было предложено обобщить изложенный прием на случаи других групп. Оказывается, этот прием имеет универсальный характер, его можно применить практически к любой из известных групп Ли. Каждой из них можно поставить в соответствие закон сохранения некоторого заряда и присущую ей совокупность возможных полей переносчиков взаимодействий. Сейчас принято называть такие поля *полями Янга—Миллса*. Но это, конечно, не означает, что все они реализуются в физике элементарных частиц. Кроме рассмотренной группы  $U(1)$ , в физике микромира оказались востребованными группы  $SU(2)$  и  $SU(3)$ : первая для описания электрослабых взаимодействий, а вторая — для построения хромодинамики.

Более подробно остановимся на группе  $SU(2)$ . В частности, как известно, она соответствует группе вращений 3-мерного (внешнего) евклидова пространства. В данном случае вводится некое внутреннее пространство частиц, именуемое *изотопическим пространством*. Использование этой группы обусловлено тем, что при описании слабых взаимодействий возникают квадратичные комбинации из волновых функций нейтрино ( $\psi_1 \rightarrow \nu_L$ ) и массивного лептона ( $\psi_2 \rightarrow e_L$ ). Имеет место симметрия между волновыми функциями нейтрино и левой компоненты массивного лептона (электрона). Предлагается ее понимать как инвариантность квадратичной комбинации из двух состояний (нейтринного и левого электронного) единого поля с разными проекциями спина  $1/2$  в изотопическом пространстве относительно преобразований группы  $SU(2)$ . Это означает, что в выражении (12.2.1) следует положить

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}; \quad \psi^* \rightarrow \bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2). \quad (12.2.6)$$

Тогда преобразования (12.2.2) обобщаются до матричного вида

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i(\vec{\alpha T})g_2} \psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i(\vec{\alpha T})g_2}, \quad (12.2.7)$$

где показатель экспоненты имеет матричный характер, т. е.

$$(\vec{\alpha T}) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3). \quad (12.2.8)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $g_2$  — константа, имеющая смысл заряда,  $\alpha_s$  — три параметра ( $s = 1, 2, 3$ ) группы  $SU(2)$ , а  $\sigma_s$  — три

матрицы Паули. Если параметры  $\alpha_s$  постоянные, то говорят о глобальной  $SU(2)$ -симметрии.

Введение взаимодействия осуществляется посредством локализации группы, т. е. заменой постоянных параметров на переменные  $\alpha_s(x^\mu)$ . Если оператор  $D$  содержит дифференцирование, то комбинация вида (12.2.1) становится неинвариантной при таком преобразовании. Для сохранения инвариантности опять вводятся два постулата.

Во-первых, оператор дифференцирования заменяется на

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial^+}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ig_2 \vec{A}_\mu \equiv I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ig_2}{2} A(s)_\mu \sigma_s, \quad (12.2.9)$$

где по индексу  $s$  подразумевается суммирование от 1 до 3, а  $A(s)_\mu$  — три калибровочных векторных поля ( $s = 1, 2, 3$ ) — по числу параметров группы  $SU(2)$ ;  $I_2$  — единичная 2-рядная матрица.

Во-вторых, полагается, что при преобразованиях (12.2.7) калибровочные поля изменяются по закону

$$\vec{A}_\mu \rightarrow \vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x^\mu} - \vec{\alpha} \times \vec{A}_\mu, \quad (12.2.10)$$

где  $\vec{A}_\mu = (1/2)A(s)_\mu \sigma_s$  и  $\vec{\alpha} = (1/2)\alpha_s \sigma_s$  — матричные величины. Это выражение отличается от (12.2.5) из-за матричного характера входящих в него величин. Оно не только «удлинняется» на предпоследнее слагаемое, но и изотопически поворачивается (последнее слагаемое). Этот поворот связан с матричным характером показателя экспоненты в (12.2.7) и величины  $\vec{A}_\mu$ , так как для сокращения экспоненциальных слагаемых в (12.2.1) экспоненту с матричным показателем следует перенести через матричный коэффициент в виде  $\vec{A}_\mu$ .

Таким образом, калибровочная  $SU(2)$ -симметричная теория диктует введение трех (триплета) векторных полей. Соответствующая этим полям напряженность имеет вид

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \vec{A}_\mu}{\partial x^\nu} - ig_2 (\vec{A}_\mu \vec{A}_\nu - \vec{A}_\nu \vec{A}_\mu), \quad (12.2.11)$$

где в отличие от обычной напряженности электромагнитного поля появляется квадратичный добавок, связанный с тем, что матрицы  $\sigma_s$ , входящие в состав  $\vec{A}_\mu$ , не коммутируют друг с другом. Это отражает общее свойство группы  $SU(2)$ , состоящее в том, что два последовательно произведенных поворота, сделанных в разном порядке, приводят к несовпадающим результатам. Такое свойство группы называют неабелевостью, а саму группу *неабелевой*.

Для описания электрослабых взаимодействий оказалось недостаточным одной группы  $SU(2)$ , — понадобилась локализация композиции двух групп  $U(1)$  и  $SU(2)$ . Для построения теории сильных взаимодействий на основе калибровочного подхода потребовалась локализация группы  $SU(3)$ .

### 12.2.3. Калибровочный подход к описанию гравитации

В калибровочной теории гравитационного взаимодействия, в отличие от калибровочных теорий электрослабого и сильного взаимодействий, локализуются не группы внутренних симметрий, а параметры группы преобразований Пуанкаре классического 4-мерного пространства-времени [69, 85, 178].

1. При изложении калибровочного подхода к теории гравитации (и к теории других взаимодействий) используются представления о *расслоенных пространствах*, которые можно понимать как совокупность двух пространств: *базы и слоя*. В качестве базы выступает 4-мерное пространство-время Минковского. В определение слоя включаются представления о пространствах внутренних симметрий, рассмотренных выше. Для случая гравитации в качестве слоя рассматривается векторное пространство четверки ортов (тетрады)  $g(\alpha)_\mu(x)$ , определенных в локальных касательных пространствах каждой точки базы. Как уже отмечалось при изложении тетрадного метода (формализма), в слое определены преобразования из группы Лоренца как самих компонент тетрады, так и полевых (тензорных) функций  $\Phi(\beta\delta \dots)$  с локальными индексами:

$$g'_\mu(\alpha) = L(\alpha\beta)g_\mu(\beta) \rightarrow \Phi'(\alpha\sigma \dots) = L(\alpha\beta)L(\sigma\delta) \dots \Phi(\beta\delta \dots), \quad (12.2.12)$$

где, напомним,  $L(\alpha\beta)$  — коэффициенты линейных преобразований 6-параметрической группы Лоренца. Аналогичную формулу можно записать и для спинорных функций  $\psi$ , преобразующихся по спинорному представлению группы Лоренца.

В группе Пуанкаре к этим преобразованиям добавляется группа трансляций в касательном пространстве

$$x'(\alpha) = x(\alpha) + \lambda(\alpha) \leftrightarrow x'^\mu = x^\mu + \lambda^\mu, \quad (12.2.13)$$

где  $\lambda(\alpha)$  — четверка параметров этой группы;  $x(\alpha) = g(\alpha)_\mu x^\mu$ .

2. При локализации группы Пуанкаре все ее параметры становятся функциями от координат. Это приводит к тому, что во всех операторах дифференцирования полевых функций с локальными индексами вида (12.2.12) возникают дополнительные слагаемые, содержащие производ-

ные от параметров группы. Для того чтобы их скомпенсировать, по общему правилу калибровочного подхода, необходимо частные производные заменить на «удлиненные», в которых каждому параметру группы будет соответствовать некое векторное поле, также преобразующееся при преобразованиях группы, причем так, что возникающая в них добавка будет компенсировать производные от параметров группы в частных производных.

В частности, при локализации параметров группы Лоренца следует писать «удлиненную» производную, например, от векторной функции с локальным индексом, в виде

$$\partial_\mu \Phi(\alpha) \rightarrow \nabla_\mu \Phi(\alpha) = (\delta(\alpha\beta)\partial_\mu - \Delta_\mu(\alpha\beta)) \Phi(\beta). \quad (12.2.14)$$

Здесь в качестве калибровочных векторных полей выступают коэффициенты вращения Риччи с одним универсальным и двумя локальными индексами. Вследствие антисимметрии по последним, 6 комбинаций локальных индексов в скобках можно понимать как обозначения шестерки калибровочных векторных полей. Отметим, что для спинорных векторных полей формуле (12.2.14) соответствует ковариантная производная с коэффициентами Фока—Иваненко, записанная в (7.3.9).

3. При локализации группы трансляций (12.2.13), т. е. когда параметры  $\lambda^\mu(x)$  становятся функциями координат, изменяются по универсальному тензорному закону как компоненты тетрады, так и производные от волновых функций:

$$g'_\mu(\alpha) = -\frac{\partial \lambda^\nu}{\partial x^\mu} g_\nu(\alpha); \quad \Phi'(\dots)_{,\mu} = -\frac{\partial \lambda^\nu}{\partial x^\mu} \Phi(\dots)_{,\nu}. \quad (12.2.15)$$

При этом возникает любопытная ситуация, когда в качестве четырех калибровочных полей относительно группы трансляций выступают компоненты тетрады  $g_\mu(\alpha)$ .

4. Опуская все промежуточные выкладки, отметим, что из калибровочных полей  $\Delta_\mu(\alpha\beta)$  по общим правилам калибровочного подхода, реализованным в (12.2.11), определяется антисимметричный тензор напряженности калибровочного поля, который представляет собой тензор Римана—Кристоффеля в тетрадной форме. Так вводятся основные понятия калибровочной теории гравитации, соответствующие общей теории относительности в тетрадной формулировке. Более подробно калибровочный подход к теории гравитации изложен в специальных монографиях по этому вопросу [70, 85, 178].

5. Следует отметить, что в самом общем случае калибровочный подход выводит за пределы ОТО. Из введенных таким образом компонент тетрады получаются не только символы Кристоффеля, соответствующие



щие римановой геометрии, но и коэффициенты связности дифференциальных геометрий Схоутена, в частности, тензор кручения. Чтобы получить ОТО, необходимо наложить на тетрады дополнительные ограничения.

6. В 70–80-х гг. XX в. на калибровочный подход возлагались большие надежды, поскольку он позволял поставить теорию гравитации и других взаимодействий на одну принципиальную основу, которая, как надеялись, упростит решение задачи объединения известных видов физических взаимодействий. В процессе таких исследований были детально проанализированы математический аппарат и возможные следствия данного подхода. Так, уравнения всех полей, в том числе и для гравитации, были представлены однотипно в виде нелинейных обобщений максвелловских уравнений, называемых уравнениями Янга–Миллса. Уравнения движения частиц в известных физических полях представлены в виде своеобразных геодезических в расслоенных пространствах, соответствующих уравнениям геодезических линий в ОТО. Было найдено множество интересных аналогий между теорией гравитации и других полей. Однако многолетние исследования данного подхода не оправдали надежд, а свелись к переформулировке на другом языке уже известных положений ОТО и ее обобщений на базе дифференциальных геометрий Схоутена.

### **12.3. Теория гравитации в теоретико-полевым миропонимании (суперсимметрия и супергравитация)**

Отмеченная выше асимметрия бозонных и фермионных полей в калибровочном подходе заставила сторонников теоретико-полевого миропонимания искать такие способы введения бозонных и фермионных полей, где бы они присутствовали равноправно, причем стремились сохранить калибровочный принцип. Это удалось сделать на основе принципа суперсимметрии (см. [23, 50, 162]). Суперсимметричные теории опираются на две обобщенные категории: суперпространство и поле суперсимметричного мультиплетта, объединяющего категории бозонных и фермионных полей.

#### **12.3.1. Суперпространство**

1. В дуалистической теоретико-полевой парадигме используется обобщение категории классического 4-мерного пространства-времени до

суперпространства, точки которого характеризуются в случае простого суперпространства восемью координатами: четырьмя классическими  $x^\mu$  и четырьмя новыми  $\theta_a$ , принадлежащими алгебре Грассмана, где индекс  $a$  пробегает значения: 1, 2, 3, 4. (В расширенном суперпространстве используется несколько наборов переменных из алгебры Грассмана.) Таким образом, опять используется своеобразное многомерие, однако если в теориях Калуцы—Клейна дополнительные размерности вводились для геометризации бозонных полей, то в суперсимметричных теориях его назначение — обеспечить возможность единого описания бозонных и спинорных полей в рамках новой обобщенной категории.

2. При определении суперпространства отходят еще дальше, чем в теориях Калуцы—Клейна, от привычного классического понимания координаты как вещественного числа. Дополнительные координаты описываются элементами алгебры Грассмана. Напомним, алгебры Клиффорда, Грассмана и другие характеризуются конечным числом образующих, для которых выполняются определенные правила умножения. В отличие от случая  $\gamma$ -матриц Дирака — образующих алгебры Клиффорда, удовлетворяющих соотношениям вида (7.1.55), — в алгебре Грассмана для четырех образующих  $\theta_a$  имеют место правила (антикоммутации)

$$\theta_a \theta_b + \theta_b \theta_a = 0 \quad (12.3.1)$$

с нулем справа для любых значений  $a$  и  $b$ . Напомним, что алгебры Клиффорда и Грассмана тесно связаны. Каждой алгебре Грассмана соответствует алгебра Клиффорда с удвоенным числом образующих.

3. Если в обычном 4-мерном пространстве-времени имеется 10-параметрическая группа преобразований Пуанкаре, то в суперпространстве определяется *расширенная 14-параметрическая группа Пуанкаре*, в которой к преобразованиям (12.2.12)–(12.2.13) добавлены *супертрансляции*

$$x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2} \bar{\varepsilon} \gamma^\mu \theta; \quad (12.3.2)$$

$$\theta' = \theta + \varepsilon, \quad (12.3.3)$$

где  $\theta$  представлено в виде 4-компонентного столбца из  $\theta_a$ , величина  $\varepsilon$  является 4-компонентным майорановским (вещественным) спинором, в данном случае характеризующим супертрансляцию.

При обычных преобразованиях Лоренца (12.2.12) столбцы  $\theta$  и  $\varepsilon$  преобразуются как компоненты биспинора.

4. Принято характеризовать группы соответствующими им генераторами, определяющими изменения функций при бесконечно малых

преобразованиях этих групп. Так, для 10-параметрической группы Пуанкаре в 4-мерии имеют место генераторы сдвига  $P_\mu$  и поворотов  $J_{\mu\nu}$ :

$$P_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \quad J_{\mu\nu} = x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (12.3.4)$$

Супертрансляциям (12.3.3) соответствуют генераторы

$$Q_a = \frac{\partial}{\partial \theta_a} - \frac{i}{2} (\gamma^\nu \theta)_a \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (12.3.5)$$

5. Обычно начинают изложение суперсимметричной теории с задания алгебры (супералгебры) генераторов, т. е. перестановочных соотношений между 14 генераторами. В дополнение к соотношениям только между  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  в супералгебре добавляются еще

$$\begin{aligned} Q_a P_\mu - P_\mu Q_a &= 0; \\ Q_a J_{\mu\nu} - J_{\mu\nu} Q_a &= \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})^b_a Q_b; \\ Q_a Q_b + Q_b Q_a &= -(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu. \end{aligned} \quad (12.3.6)$$

Здесь  $\sigma_{\mu\nu}$  — антисимметричная матрица, построенная из матриц Дирака  $\gamma_\mu$ ,  $C$  — матрица зарядового сопряжения. Первое из этих соотношений означает, что супертрансляция не влияет на сдвиги в классическом пространстве-времени, второе — что  $Q_a$  преобразуется при преобразованиях Лоренца как обычный спинор, а последнее — что супертрансляции не являются независимыми.

Таким образом, в супералгебре, определяемой (12.3.4) — (12.3.6), оказались объединенными как непрерывные преобразования, соответствующие генераторам  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$ , так и суперсдвиги, соответствующие  $Q_a$ .

6. Охарактеризованное здесь простое суперпространство можно поставить в соответствие с минимальным обобщением 4-мерной ОТО, даваемым 5-мерной теорией Калуцы. Аналогично переходу к 6-, 7- и большему числу измерений в многомерной геометрофизике, в суперсимметричных теориях предлагается задавать несколько четверок антикоммутирующих величин  $\theta_{as}$ , снабдив их еще одним индексом  $s$ , где  $s = 1, 2, \dots, N$ . В зависимости от значения числа  $N$  говорят о *расширенной  $N$ -суперсимметрии*. В таких случаях последнее соотношение в (12.3.6) следует обобщить до

$$Q_{as} Q_{br} + Q_{br} Q_{as} = -\delta_{sr} (\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu + C_{ab} Z_{sr} + (\gamma_5 C)_{ab} Z'_{sr}, \quad (12.3.7)$$

где  $Z_{sr}$  и  $Z'_{sr}$  — некоторые дополнительные генераторы, антисимметричные по  $s$  и  $r$ .

7. Аналогом компактификации скрытых размерностей в теории суперпространства является сам характер грассмановых переменных, по которым также производится интегрирование суперсимметричных лагранжианов, что, как и в случае геометрофизики, приводит к исчезновению грассмановых переменных в результирующем выражении, однако при этом остаются коэффициенты при них, играющие роль физических полей, но это уже обусловлено второй обобщенной категорией данной парадигмы. В рамках же самой категории суперпространства не содержатся понятия, соответствующие каким-либо физическим полям. В этом имеется принципиальное различие двух дуалистических парадигм: геометрической и физической.

### 12.3.2. Вторая обобщенная категория — поле супермультиплета

1. В суперсимметричной теории на фоне суперпространства (первой категории) определяется вторая категория данной парадигмы — суперполевой мультиплет (суперфункция)  $\Phi(x, \theta)$ , зависящий от 8 обобщенных координат в случае простой суперсимметрии или от  $4 + 4N$  координат в случае  $N$ -расширенной суперсимметрии. Суперфункция  $\Phi(x, \theta)$  раскладывается в ряд по переменным  $\theta_{as}$ . Поскольку базис алгебры Грассмана составляют произведения из конечного числа слагаемых, не превышающего число образующих алгебры, то вместо бесконечного ряда получается конечное число членов разложения. Как только в произведении оказываются две одинаковые образующие, путем антикоммутационных соотношений (12.3.1) их можно поставить рядом, а их квадрат равен нулю. При каждом слагаемом разложения по степеням  $\theta_{as}$  будет стоять некоторый коэффициент, представляющий собой тензорную или спинорную функцию (от четырех классических координат) в зависимости от того, при четной или нечетной степени  $\theta$  он стоит. Следовательно, суперполе  $\Phi(x, \theta)$  характеризуется набором функций-коэффициентов разложения (является супермультиплетом), где спинорные и тензорные величины входят равноправным образом.

Данное разложение можно уподобить использованному в геометрофизике представлению компонент дополнительной тетрады (смешанных компонент многомерного метрического тензора) (9.1.2) в виде рядов по гармоникам циклических зависимостей от дополнительных координат, где также коэффициентами при экспонентах являлись физические векторные поля, зависящие лишь от четырех классических координат. Подчеркнем, что в отличие от суперсимметричных теорий, в геометрофизике таким образом вводились лишь бозонные поля переносчиков

взаимодействий. Кроме того, это делалось в рамках обобщенной первой (пространственно-временной), а не второй категории.

2. Лагранжиан суперсимметричной теории, как обычно, строится из инвариантных (квадратичных) выражений из суперполя и первых производных от него по координатам, как классическим  $x^\mu$ , так и  $\theta_{a\alpha}$ . Далее по обычным правилам теории поля определяется супердействие в виде интеграла от лагранжиана по всем переменным, как классическим координатам, так и грассмановым переменным.

Супердействие аналогично гипердействию в геометрофизике, также определяемому через интеграл от гиперплотности лагранжиана (9.1.4) по всем координатам: четырем классическим и по всем дополнительным.

3. В алгебре Грассмана имеют место операции, соответствующие интегрированию и дифференцированию в теории вещественных и комплексных переменных (см. [7]). В них много необычного по сравнению с привычным математическим анализом. Так, вводятся символы дифференциалов  $d\theta_a$ , подчиняющиеся соотношениям:

$$[d\theta_a, d\theta_b] = [d\theta_a, \theta_b] = 0. \quad (12.3.8)$$

Однократные интегралы определяются в виде

$$\int d\theta_a = 0; \quad \int \theta_a d\theta_a = 1. \quad (12.3.9)$$

Кратные интегралы понимаются как повторные однократные. В итоге интегрирования супердействия по грассмановым переменным все грассмановы координаты исчезают, и остаются лишь комбинации из коэффициентов при соответствующих разложениях суперполя, т. е. возникает выражение, зависящее лишь от классических координат, представляющее собой действие в 4-мерном пространстве-времени.

Эта процедура аналогична использованной в геометрофизике, где интегрирование по периодам зависимостей от дополнительных координат обращает в нуль все слагаемые в гиперплотности лагранжиана, содержащие экспоненты циклических зависимостей от дополнительных координат. Аналогами формул грассманова интегрирования в геометрофизике являются значения интегралов:

$$\int_0^{2\pi/\gamma} dx^a = \frac{2\pi}{\gamma}; \quad \int_0^{2\pi/\gamma} \exp(\pm ik\gamma x^a) dx^a = 0 \quad (12.3.10)$$

при  $a = 4, 5, 6, 7$  и целых значениях  $k$ . В итоге остаются лишь комбинации функций от четырех классических координат, при которых экспоненты погасились друг с другом.

4. В результате проделанных процедур в суперсимметричных теориях достигается некая симметрия (суперсимметрия) между совокупностями фермионных и бозонных полей, которая представляется существенным положительным свойством данного подхода (этой парадигмы).

Суперсимметричные теории являются типичными теориями поля в рамках дуалистической физической парадигмы. В ней бозонные и фермионные поля объединяются, можно сказать, «по горизонтали», т. е. в рамках одной обобщенной категории, в отличие от геометрической дуалистической парадигмы, где эти два вида полей соотносятся друг с другом «по вертикали», т. е. возникают в рамках разных обобщенных категорий.

### 12.3.3. Теории супергравитации

#### 1. Четырехмерные теории супергравитации

1. Предыдущее относилось к введению свободных полей на основе *глобальной суперсимметрии*. Для описания взаимодействующих полей необходимо использовать еще один принцип, ранее использовавшийся в физике, — *принцип локализации групп*. Напомним, что в калибровочном подходе теория гравитации строится посредством локализации группы Пуанкаре, т. е. полагается, что 10 параметров этой группы зависят от координат. Тогда для сохранения инвариантности теории относительно таких преобразований в нее вводится ряд полей, которые трактуются как характеристики гравитационного поля, эквивалентные геометрическим связностям (символам Кристоффеля). В теории супергравитации<sup>1)</sup> использован тот же самый математический прием, только теперь нужно локализовать не 10-параметрическую группу Пуанкаре, а 14-параметрическую обобщенную группу Пуанкаре, включающую четыре фермионных параметра (в случае простой суперсимметрии). Таким образом, теория супергравитации возникает в результате слияния двух типов идей: 1) суперсимметрии и 2) калибровочного подхода к описанию полей.

2. Следует различать варианты 4-мерной теории супергравитации с различными  $N$  (как и всякой суперсимметричной теории). При  $N = 1$  имеем простую супергравитацию. В ней в единый мультиплет попадает поле спина 2 (гравитон) с одним майорановским спинором — частицей

---

<sup>1)</sup>Теория супергравитации возникла в середине 70-х годов в работах П. ван Ньювенгейзена, С. Феррары, Д. Фридмана, а также С. Дезера и В. Зумино. Много сделали для развития этой программы В. И. Огиевецкий, М. Дафф, Р. Е. Каллош и другие авторы.

спина  $3/2$ , названной *гравитино*. В этом варианте теории нет векторных полей и полей спина  $1/2$ , так что данный вариант имеет лишь академический интерес и не может претендовать на роль реалистической модели, объединяющей гравитацию с известной материей. Более богатые возможности имеются в расширенных теориях супергравитации с  $N > 1$ . В них партнерами гравитона выступают  $N$  гравитино,  $(1/2)N(N - 1)$  векторных полей,  $(1/6)N(N - 1)(N - 2)$  полей спина  $1/2$  и ряд скалярных полей.

3. Принципиально важным свойством супергравитации является требование, чтобы  $N$  не превышало восьми. Это диктуется условием, чтобы в теории не возникало более одного поля спина 2, трактуемого как гравитационное поле, а также полей более высокого спина. Максимально расширенная  $N = 8$  теория супергравитации в одном супермультиплете объединяет одно поле спина 2, восемь полей со спином  $3/2$ , 28 полей со спином 1, 56 полей со спином  $1/2$  и 70 скалярных полей (со спином 0). Этот вариант представляется наиболее перспективным для объединения всех известных бозонных и фермионных полей.

## II. Супергравитация Калуцы—Клейна

Поскольку суперсимметричные теории имеют много общего с классическими многомерными теориями типа теорий Калуцы, то естественно было обобщить 4-мерные теории супергравитации на случай теорий с большим числом классических координат  $n > 4$  и фермионными координатами из соответствующей алгебры Грассмана. Такие теории получили название *теории супергравитации Калуцы—Клейна*. Таким образом, в таких вариантах теории оказываются задействованными три сорта идей: 1) принцип суперсимметрии, 2) калибровочный подход и 3) идеи многомерия. Отметим ряд характерных черт таких теорий.

1. Было установлено, что структура суперсимметричных алгебр вместе с ограничениями на спины получающихся полей устанавливает верхний предел для размерности  $n$  пространства-времени, в котором формулируется теория супергравитации. Оказалось, что размерность  $n$  не может превышать одиннадцати.

Одним из основных доводов в пользу этой размерности обычно называют утверждение, приписываемое Э. Виттену, что одиннадцать — минимальное число измерений, необходимое для введения калибровочной группы  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , используемой для совместного описания калибровочных теорий сильных и электрослабых взаимодействий.

Напомним, что в геометрофизике для построения объединенной теории гравитационных и сильных взаимодействий необходимо было

использовать  $4 + 4 = 8$  измерений. Для совместного описания теорий гравитационного и электрослабых взаимодействий в дополнение к 4 классическим координатам необходимо ввести 3 скрытые размерности. В итоге для механического объединения теорий гравитационных, сильных и электрослабых взаимодействий (на основе «принципа кубиков») следует использовать  $4 + 4 + 3 = 11$  измерений, в согласии с утверждением Виттена. Однако в геометрофизике был использован более экономичный способ построения единой теории в рамках всего 8 измерений, который опирается на «принцип матрешки».

2. Особый интерес представляет простая супергравитация ( $N = 1$ ) в одиннадцати измерениях. Она исследовалась в работах Т. Креммера, Дж. Шерка и ряда других авторов. В ней все дополнительные координаты выбирались пространственно-подобными.

Закономерность, что все дополнительные размерности пространственно-подобны, с некоторыми оговорками относительно координаты  $x^4$  справедлива и в изложенной выше геометрофизике.

3. Все максимальные теории супергравитации с меньшим числом измерений ( $n < 11$ ) могут быть получены из теории супергравитации с  $n = 11$  и  $N = 1$  с помощью процедуры размерного редуцирования, т. е. методом понижения размерности до нужной, как это делается в теории Калуцы—Клейна.

4. Такая теория оказывается довольно жесткой, если, конечно, потребовать, чтобы уравнения были второго порядка и чтобы она содержала только один свободный параметр — гравитационную постоянную. Все попытки как-либо модифицировать теорию окончились неудачей.

Условиями суперсимметрии запрещено взаимодействие супермультиплета полей с какими-либо иными видами материи, вводимыми волевым образом, т. е. эта теория не терпит половинчатости: либо это теория всего, либо она неверна.

### III. Недостатки суперсимметричных теорий

Теории супергравитации развивались в надежде решения ряда конкретных проблем теории поля.

1. Ожидалось, что суперсимметричные теории приведут к некому фундаментальному набору из бозонных и фермионных полей, который позволил бы как-то теоретически обосновать наблюдаемый на опыте набор частиц и полей, а, может быть, даже помог бы предсказать существование некоторых новых частиц. Но с ростом  $N$  число полей быстро увеличивается, и ими распорядиться должным образом так и не удалось.



Выдвигались различные предположения о характере возникающих полей, в частности, предлагалось их трактовать как некие преполя или пречастичицы (преоны), из которых предстоит в виде каких-то связанных комбинаций образовать известные ныне лептоны, кварки и другие частицы, но эти надежды пока не оправдались.

2. Возлагались большие надежды на то, что из множества получающихся полей одного супермультиплета удастся выделить и должным образом скомбинировать поля переносчиков всех известных видов физических взаимодействий: гравитационного электрослабого и сильного, т. е. фактически на основе теории супергравитации построить теорию великого объединения. Как писал А. Салам, «построение расширенных теорий супергравитации ( $N = 2, 3, \dots, 8$ ) породило надежду на то, что частицы со спином 1 и 2, посредники всех четырех фундаментальных взаимодействий (в том числе и гравитации), плюс хиггсовы частицы, а также материальные «источники» (частицы с полуцелыми спинами) удастся объединить в один супермультиплет расширенной теории супергравитации, объединив тем самым «мрамор» гравитации с «каркасом» материи — как мечтал Эйнштейн» [145, с. 16].

Это направление исследований многими воспринималось как возрождение идей В. Клиффорда, А. Эйнштейна и Дж. Уилера об описании искривленным пространством всех видов материи. Только теперь во главу угла ставилось введение спинорных частиц.

3. Ожидалось, что удастся построить квантовую теорию поля, свободную от расходимостей. Анализ показывает, что в суперсимметричной квантовой теории поля ряд расходимостей, обусловленных бозонными полями, компенсируется расходимостями, связанными с фермионными полями, что подкрепляло надежды на это направление исследований, однако решить данную проблему в полном объеме пока не удалось.

### 12.3.4. Теория суперструн

К концу 80-х годов центр тяжести работ по объединению фундаментальных взаимодействий переместился в сторону исследований теории суперструн. Основная идея этой теории состоит в том, что точечные частицы общепринятой теории поля заменяются на очень малые, но конечные (открытые или замкнутые) нити — струны, колеблющиеся в пространстве-времени. Размеры этих струн имеют порядок планковской длины. Предлагается описывать свойства элементарных частиц через дискретные моды колебаний этих струн. Полагается, что между степенями свободы струн имеет место суперсимметрия, так что имеются моды,

соответствующие фермионным и бозонным частицам. Для получения достаточно широкого спектра частиц и полей рассматриваются колебания в многомерном (11-мерном) пространстве-времени. Ожидается, что таким образом можно построить «теорию всего», опираясь лишь на одну константу, соответствующую натяжению струны. Теория суперструн опирается на три сорта идей:

- 1) на идею о нелокальности (неточечности) физических объектов,
- 2) на соображения о суперсимметрии между бозонами и фермионами,
- 3) на идеи Калуцы о многомерии физического пространства-времени.

В принципиальном плане аналогичным образом строится теория супермембран, где 1-мерные струны заменяются на 2-мерные (многомерные) мембраны.

Теория суперструн (супермембран) в настоящий момент является наиболее популярной. Она нацелена на объединение теории гравитации с квантовой теорией, на объединение сильных и электрослабых взаимодействий, на устранение расходимостей из квантовой теории поля, на получение спектра масс элементарных частиц и соотношений между фундаментальными физическими константами.

Однако пока теория суперструн далека от завершения. Можно говорить лишь о «продвижениях» в решении названных проблем. Не удастся должным образом распорядиться всем множеством частиц, предсказываемых теорией, до сих пор не обнаружены частицы-суперпартнеры проинтерпретированных частиц, остаются проблемы с расходимостями и т. д. Энтузиаст теории суперструн Б. Грин в своей книге «Элегантная Вселенная», описывая достоинства и возможности этой теории, называет и существенные недостатки, такие как отсутствие экспериментальных подтверждений теории и отсутствие строгой математической базы. В связи с этим он пишет: «Могут пройти десятилетия или даже столетия, прежде чем теория струн будет полностью разработана и осознана. Это вполне может оказаться правдой. В действительности математический аппарат теории струн столь сложен, что сегодня никто даже не знает точных уравнений этой теории. Вместо этого физики используют лишь приближенные варианты этих уравнений, и даже эти приближенные уравнения столь сложны, что пока поддаются только частичному решению» [50, с. 22]. Все это лишь подкрепляет открытость вопроса: отражает ли суперсимметрия фундаментальные свойства природы?

В задачу этой книги не входит детальное изложение этой и других представленных в физике парадигм. Здесь лишь преследуется цель указать другие пути развития физики и сопоставить их с геометрофизикой.

## 12.4. Геометрическое миропонимание

Возвращаясь к геометрическому миропониманию, еще раз подчеркнем, что в нем объединяются категории пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий в одну обобщенную категорию искривленного (многомерного) пространства-времени, тогда как фермионные поля не геометризуются, а представляют собой вторую категорию. Они учитываются добавлением фермионных слагаемых к гиперплотности скалярной кривизны.

### 12.4.1. Идея всеобщей геометризации физики

В рамках геометрического миропонимания делались попытки перехода к монистической парадигме, в которой предполагалось опереться лишь на одну категорию искривленного пространственно-временного многообразия, т. е. без добавления в плотность лагранжиана или в уравнения Эйнштейна каких-либо слагаемых негеометрического происхождения.

Примечательно, что холистический взгляд на мир в рамках геометрического миропонимания был предложен задолго до создания ОТО, и сделано это было в работах английского математика В. Клиффорда, скончавшегося в год рождения А. Эйнштейна (1879 г.). В своих работах он четко поставил вопрос: «Спросим же себя, не можем ли мы рассматривать как изменения физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства? Не окажется ли, что все или некоторые из причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?» [82, с. 46]. В частности, им было высказано предположение, что такими физическими причинами могут быть теплота, свет, электрическое поле.

Эйнштейн был знаком с работами Клиффорда, и идея всеобщей геометризации физики волновала его на протяжении большей части творческого пути. Выше уже говорилось о его попытках геометризовать наряду с гравитационным и электромагнитное взаимодействие. Но его идея распространялась значительно дальше геометризации бозонных полей (категории переносчиков взаимодействий) и охватывала всю остальную

материю. Так, в его совместной работе с Л. Инфельдом говорилось: «Мы имеем две реальности: вещество и поле. Несомненно, что в настоящее время мы не можем представить себе всю физику построенной на понятии вещества, как это делали физики в начале девятнадцатого столетия. В настоящее время мы принимаем оба понятия. Можем ли мы считать вещество и поле двумя различными, несходными реальностями?» [200, с. 510]. Отметим, что здесь под полем авторы понимают характеристики (метрический тензор) искривленного пространства-времени (обобщенную категорию), а под веществом — категорию частиц. Далее в работе дается отрицательный ответ на поставленный вопрос: «Но деление на вещество и поле, после признания эквивалентности массы и энергии, есть нечто искусственное и неясно определенное. Не можем ли мы отказаться от понятия вещества и построить чистую физику поля? То, что действует на наши чувства в виде вещества, есть на самом деле огромная концентрация энергии в сравнительно малом пространстве. Мы могли бы рассматривать вещество как такие области в пространстве, где поле чрезвычайно сильно. Таким путем можно было бы прийти к новым представлениям о природе. (...) В нашей новой физике не было бы места и для поля, и для вещества, поскольку единственной реальностью было бы поле».

Известно, что Эйнштейн считал правую часть своих уравнений дефектом ОТО и всячески избегал везде, где это было возможно, написания тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ . Он говорил, что его теория покоится на двух ногах: одной «монолитной» (левой, геометрической части уравнений) и другой «глиняной» (правой, физической части уравнений). «Но до сих пор мы не имели успеха в последовательном и убедительном выполнении этой программы. Заключение о том, возможно ли ее выполнить, принадлежит будущему. В настоящее время во всех наших теоретических построениях мы все еще должны допускать две реальности — поле и вещество», — не без горечи отмечалось в данной работе [200, с. 511].

Впоследствии идея глобальной геометризации физики была подхвачена Дж. Уилером и его учениками, развивавшими теорию, которая получила название *геометродинамики*. В совместной статье Дж. Уилера и Ч. Мизнера «Классическая физика как геометрия» наиболее четко сформулированы взгляды этой школы: «Классическая физика как совокупность теории гравитации, электромагнетизма, неквантованного заряда и массы. Все эти четыре понятия описываются с помощью пустого искривленного пространства без каких-либо добавлений к принятой теории» [159, с. 218]. Концептуальные (метафизические) черты этой тео-

рии Уилером определены следующим образом: « \* 1) Пространство-время не есть *арена* для физики, это *вся классическая физика*. 2) Не существует нуждающихся в объяснении «мировых констант»: ни  $c$ , ни  $G$  ... 3) Не существует «констант связи», как нет и независимо существующих полей, взаимодействующих друг с другом. Электромагнитное поле не является особым объектом» [159, с. 334].

### 12.4.2. Теория Райнича—Уилера и ее обобщения

К достижениям классической (неквантовой) геометродинамики Уилер отнес следующее: «Настоящая хорошо установленная исконно единая классическая теория (геометродинамика — Ю. В.) позволяет описывать с помощью пустого искривленного пространства

- 1) гравитацию без гравитации,
- 2) электромагнетизм без электромагнетизма,
- 3) заряд без заряда,
- 4) массу без массы» [159, с. 229].

1. «**Гравитация без гравитации**» уже была построена в рамках эйнштейновской ОТО, поскольку в ней нет отдельного гравитационного поля, а есть искривленное 4-мерное пространство-время, характеристиками которого (метрикой, кривизной) описывается гравитационное взаимодействие.

2. «**Электромагнетизм без электромагнетизма**» предлагалось описывать также характеристиками 4-мерного пространства-времени по следам, оставляемым электромагнетизмом на его кривизне. Для этого были привлечены результаты Г. Райнича, полученные еще в 20-х годах. Райнич заметил, что из уравнений Эйнштейна в электровакууме (5.1.7) можно алгебраически выразить компоненты тензора электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$  через компоненты тензора Риччи  $R_{\mu\nu}$ . Он нашел условия на тензор Риччи, необходимые и достаточные для того, чтобы источником кривизны было электромагнитное поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла (5.1.3) и (5.1.4):

$$R_{\alpha}^{\alpha} = R = 0; \quad (12.4.1)$$

$$R_{\mu\nu}\tau^{\mu}\tau^{\nu} \geq 0 \quad (12.4.2)$$

для любого времени-подобного вектора  $\tau^{\mu}$ ;

$$R_{\mu\alpha}R_{\nu}^{\alpha} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R_{\beta\sigma}R^{\beta\sigma}; \quad (12.4.3)$$

$$V_{\alpha;\beta} - V_{\beta;\alpha} = 0, \quad (12.4.4)$$

где вектор Райнича  $V_\alpha$  имеет следующий вид

$$V_\alpha = \sqrt{-g} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{R^{\gamma\lambda;\beta} R_\lambda^\delta}{R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}}. \quad (12.4.5)$$

При этом тензор электромагнитного поля, выраженный через тензор Риччи, определяется с точностью до «поворота дуальности»:

$$F'_{\mu\nu} = e^{*\alpha} F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} \cos \alpha + \overset{*}{F}_{\mu\nu} \sin \alpha, \quad (12.4.6)$$

где  $\alpha = \text{const}$  — постоянная фаза. Это легко усмотреть из того, что как тензор энергии-импульса электромагнитного поля справа в (5.1.7), так и уравнения Максвелла инвариантны относительно поворотов дуальности (12.4.6).

Таким образом, согласно «исконно единой теории Максвелла—Эйнштейна—Райнича—Уилера», электромагнитное поле оставляет на кривизне настолько характерный отпечаток, что по нему можно с точностью до поворотов дуальности восстановить это поле.

Однако в этой теории имеется существенный недостаток: она рушится в чрезвычайно важном с физической точки зрения случае чисто электромагнитного излучения, когда обращаются в нуль оба инварианта электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \overset{*}{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0. \quad (12.4.7)$$

Действительно, в этих случаях, поскольку

$$R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \sim (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + (\overset{*}{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 = 0, \quad (12.4.8)$$

вектор Райнича (12.4.5) становится сингулярным и формулы, выражающие тензор электромагнитного поля через тензор Риччи, теряют силу.

3. «**Скаляризм без скаляризма**», т. е. описание скалярных полей, как вещественных, так и комплексных, как безмассовых, так и с массой покоя, рассматривалось в духе работ Райнича многими авторами (см., например, [99]). Решалась задача определения скалярного поля  $\varphi$ , удовлетворяющего уравнениям Клейна—Фока (5.1.9) по следам, оставляемым на кривизне пространства-времени согласно уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса скалярного поля справа (5.1.10).

В частности, для вещественного безмассового скалярного поля в работе Людвиг и Сканлана [99] были найдены условия на тензор Риччи,

аналогичные условиям Райнича (12.4.1)–(12.4.5):

$$\left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \right) \tau^\alpha \tau^\beta \geq 0; \quad (12.4.9)$$

$$R_{\mu\alpha}R_\nu^\alpha = RR_{\mu\nu}; \quad (12.4.10)$$

$$\varphi_{\alpha;\beta} - \varphi_{\beta;\alpha} = 0. \quad (12.4.11)$$

Рассматривались более общие случаи массивных и заряженных скалярных полей. Найденные в них условия на тензор кривизны имеют более сложный вид.

4. «**Нейтрино без нейтринного поля**», т. е. аналогичная задача определения характеристик нейтринного поля по его следам на тензоре кривизны рассматривалась в работах ряда авторов. Так, в работе Иномата и Мак-Кинли [73] были найдены аналоги условий Райнича для случая 2-компонентного безмассового спинорного поля:

$$R = 0; \quad R_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu \geq 0; \quad (12.4.12)$$

$$R_{\mu\alpha}R_\nu^\alpha = 0; \quad \nabla_\lambda R_{\mu\nu} = 0. \quad (12.4.13)$$

5. «**Материя с электромагнетизмом без материи и электромагнетизма**». В работе Гудинсона и Ньюинга [51] был рассмотрен случай электромагнитного поля в присутствии материи с давлением, когда уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \varkappa \left( (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(e.m.)} \right), \quad (12.4.14)$$

где  $T_{\mu\nu}^{(e.m.)}$  — тензор энергии-импульса электромагнитного поля,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $u_\mu$  — скорость материи. Авторами было показано, что  $\rho$ ,  $p$ ,  $u_\mu$ ,  $T_{\mu\nu}^{(e.m.)}$  можно выразить через геометрические величины, однако не через тензор Риччи, как у Райнича, а через компоненты собственного вектора и собственные значения тензора Риччи.

6. «**Заряды без зарядов**», т. е. заряженные частицы, Уилер предлагал вводить, используя более сложную топологию пространства-времени в виде ручек на гиперповерхности. Частицы трактовались как устья этих ручек, т. е. как входы и выходы своеобразных «кротовых нор». Частиц много, отсюда следует, что в геометродинамике реальный мир должен рассматриваться как многосвязный с большим количеством ручек. Ручки пронизаны силовыми линиями электромагнитного поля, определяемого кривизной. Устья, куда входят силовые линии, можно трактовать как заряженные частицы одного типа заряда (отрицательного), а устья, откуда выходят линии, — как заряды другого знака (положительного).

Геометродинамика Уилера представляла собой попытку построения единой геометрической картины мира (монистической геометрической парадигмы, соответствующей замыслам Клиффорда) в согласии с 4-мерной ОТО. Условия типа Райнича и соответствующие выражения для характеристик физических полей через компоненты тензора кривизны были призваны заменить правую часть уравнений Эйнштейна. В таком подходе возможные, так или иначе определенные следы на тензоре кривизны должны были соответствовать известным видам физических полей.

7. Однако *традиционная геометрофизика обладает существенным недостатком: в ее рамках, т. е. с помощью ее классических средств, невозможно описать спинорные свойства частиц*. Эта трудность, в частности, проявилась и в геометродинамике Дж. Уилера, который по этому поводу писал: «Она *ничего* непосредственно не дает нам для понимания спина без спина, элементарных частиц без элементарных частиц и каких-либо других явлений квантовой физики» [159, с. 229]. В другом месте он писал: «Затронув вопросы о порядках величин масс частиц и о ядерных силах, мы приходим к последнему и решающему вопросу — к проблеме спина. Каким образом классическая теория, рассматривающая поля с целыми значениями спина, способна после квантования привести к спину  $1/2$ , как это требуется для объяснения свойств нейтрино, электрона и других фермионов?.. Если это не будет иметь места, то *чистая квантовая геометродинамика должна рассматриваться как схема, недостаточная для построения основы физики элементарных частиц*. Поэтому вопрос о происхождении спина является решающим при оценке возможностей квантовой геометродинамики» [159, с. 347].

В рамках геометродинамики так и не удалось решить эту проблему, что послужило одним из оснований для перехода Уилера и его сторонников к исследованиям теории супергравитации. Этот и ряд других факторов свидетельствуют о необходимости перехода от классического геометрического подхода (парадигмы) к такой теории, в которой спинорные свойства частиц были бы положены в ее фундамент. В связи с этим следует упомянуть твисторную программу Р. Пенроуза [127, 128].



## Концепция дальнего действия



Данная отдельная глава посвящена описанию ключевых идей и результатов реляционного миропонимания, опирающегося на концепцию дальнего действия, поскольку оно оказалось в XX в. на обочине магистрального направления развития физики и было не столь широко известно. Вместе с тем, анализ развития теоретической физики свидетельствует о большом влиянии на нее идей реляционного миропонимания. Известно, что А. Эйнштейн, создавая ОТО, следовал идеям Маха в духе концепции дальнего действия. Р. Фейнман и Ю. Швингер, получившие Нобелевскую премию за развитие квантовой электродинамики, также придерживались реляционных принципов. Позволим себе напомнить, что концепция дальнего действия была доминирующей в середине XIX в. В русле этого миропонимания мыслили математики К. Гаусс и Б. Риман, физики В. Вебер, Л. Лоренц, Франц и Карл Нейманы и многие другие. Позже взгляды реляционного подхода отстаивали Э. Мах и А. Пуанкаре (см. в [18,, 41]).

Термин «дальнее действие» имеет несколько смыслов. Здесь **под дальним действием понимается воздействие одного объекта на другой без посредника, распространяющегося через все промежуточные точки между ними**. В этом смысле *концепция дальнего действия противоположна концепции ближнего действия, положенной в основу общепринятой теории поля*. Теории физических взаимодействий, развиваемые в рамках реляционного миропонимания, имеют принципиально иной характер по сравнению с теориями поля. В работах А. Д. Фоккера [175], Г. Тетроде [154], Р. Фейнмана и Дж. Уилера [157–158], П. Дэвиса [60] и других в XX в. была развита *теория прямого межчастичного взаимодействия*, в которой, как и в геометрофизике, нет бозонных полей в статусе самостоятельной категории. Общепринятые поля переносчиков взаимодействий возникают в ней из двух других категорий: плоского пространства-времени и характеристик непосредственно взаимодействующих друг с другом частиц. Эта теория опирается на принцип Фоккера [175],

---

первоначально сформулированный для случая электромагнитного взаимодействия, а затем распространенный на описание гравитационного и другие взаимодействия.

Реляционное миропонимание, представленное теорией прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана, но имеющее и другие ветви исследований, чрезвычайно важно, по нашему мнению, для формирования целостного мировосприятия, поскольку эта позиция (см. рис. 13.1) позволяет вскрыть свойства мироздания, невидимые с точек зрения геометрического или физического миропониманий.

### 13.1. Принцип действия Фоккера

1. Изложим суть теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия Фоккера—Фейнмана. Для этого выделим две произвольные заряженные частицы, присвоив им номера 1 и 2. Согласно принципу действия Фоккера, электромагнитное взаимодействие описывается исключительно через характеристики частиц следующим вкладом в классическое действие:

$$\begin{aligned} S_{int}^{(e)}(1, 2) &= -\frac{e_{(1)}e_{(2)}}{c} \int \int \delta(s^2(1, 2)) \eta_{\mu\nu} dx_{(1)}^\mu dx_{(2)}^\nu = \\ &= -\frac{1}{c} \int \int j_{(1)}^\mu j_{(2)\mu} \delta(s^2(1, 2)) ds_{(1)} ds_{(2)}, \end{aligned} \quad (13.1.1)$$

где  $e_{(1)}$  и  $e_{(2)}$  — электрические заряды двух частиц,  $j_{(1)}^\mu = e_{(1)} dx_{(1)}^\mu / ds_{(1)}$  — вектор 4-тока частицы с номером 1;  $dx_{(1)}^\mu$ ,  $dx_{(2)}^\nu$  — изменения координат и  $ds_{(1)}$ ,  $ds_{(2)}$  — смещения вдоль мировых линий частиц;  $\eta_{\mu\nu}$  — метрический тензор пространства-времени Минковского;  $s^2(1, 2)$  — квадрат интервала между точками на мировых линиях двух частиц;

$$\delta(s^2(1, 2)) = \delta(c^2 t_{(12)}^2 - r_{(12)}^2) \quad (13.1.2)$$

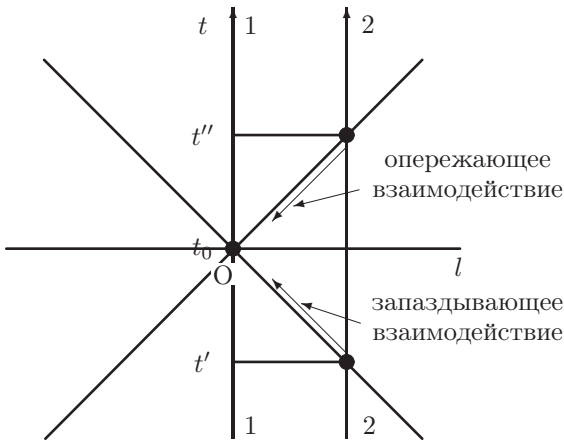
—  $\delta$ -функция. Здесь  $t_{(12)}$  и  $r_{(12)}$  — промежуток времени и расстояние между положениями взаимодействующих частиц.

2. Представляя  $\delta$ -функцию (13.1.2) в виде

$$\delta(s^2(1, 2)) = \frac{1}{2|r_{(12)}|} [\delta(ct_{(12)} - r_{(12)}) + \delta(ct_{(12)} + r_{(12)})], \quad (13.1.3)$$

приходим к выводу, что при фиксированном положении частицы с номером 1 в некоторый момент времени  $t_{(o)}$  (на ее мировой линии) взаимодействие между частицами происходит при двух положениях

второй частицы: в предшествующий момент  $t'$  и в будущий момент  $t''$ , соответствующих двум пересечениям конусов прошлого и будущего (с вершиной на мировой линии первой частицы в момент  $t_{(0)}$ ) с мировой линией второй частицы (см. рис. 13.1). С точки зрения первой частицы



**Рис. 13.1.** Опережающее и запаздывающее взаимодействия двух частиц

взаимодействие, определяемое положением второй частицы в момент  $t'$ , называется *запаздывающим*, а положением в момент  $t''$  — *опережающим*. Таким образом, согласно принципу Фоккера, запаздывающее и опережающее взаимодействия присутствуют симметричным образом. В 20–30-х годах это представляло основную трудность теории прямого межчастичного взаимодействия. Можно было говорить о совпадении этой теории с общепринятой теорией поля лишь для статических и стационарных электромагнитных явлений.

Как видно из формулы (13.1.1), в нее не входят поля переносчиков взаимодействий. Взаимодействие определяется лишь характеристиками частиц, т. е. этой формулой описывается запаздывающее (и опережающее) дальнее действие.

3. Полное действие для системы взаимодействующих электрических зарядов в классической теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия записывается в виде

$$S^{(e)} = - \sum_i m_{(i)} c \int ds_{(i)} - \frac{1}{2c} \sum_i \sum_k \int \int j_{(i)}^\mu j_{(k)\mu} \delta(s^2(i, k)) ds_{(i)} ds_{(k)}, \quad (13.1.4)$$

где  $m_{(i)}$  — масса покоя частицы  $i$ . Первое слагаемое справа соответствует действию для свободных (невзаимодействующих) частиц. Во втором

слагаемом справа суммирование производится по всем парам заряженных частиц, причем  $i \neq k$ .

4. Поясним, как в теории прямого межчастичного взаимодействия можно ввести вторичные (вспомогательные) понятия, соответствующие потенциалам и напряженностям электромагнитного поля. Для этого выделим из (13.1.4) одну частицу, например, с номером  $i = 1$  и запишем для нее действие в более привычной форме

$$S_{(1)}^{(e)} = -m_{(1)}c \int ds_{(1)} - \frac{1}{c} \sum_{k \neq 1} \int j_{(1)}^\mu A_\mu(1, k) ds_{(1)}, \quad (13.1.5)$$

где введено обозначение для отдельных вкладов

$$A_\mu(1, k) = \int j_{(k)\mu} \delta(s^2(1, k)) ds_{(k)}, \quad (13.1.6)$$

которые интерпретируются как векторный электромагнитный потенциал, создаваемый зарядом  $e_{(k)}$  в том месте, где находится заряд  $e_{(1)}$ .

Объединяя вклады всех заряженных частиц, получаем суммарный электромагнитный потенциал  $A_\mu(1)$  в месте нахождения заряда с номером 1

$$A_\mu(1) = \sum_{k \neq 1} A_\mu(1, k) \quad (13.1.7)$$

и действие для выделенной частицы:

$$S_{(1)}^{(e)} = -m_{(1)}c \int ds_{(1)} - \frac{1}{c} \int j_{(1)}^\mu A_\mu(1) ds_{(1)}, \quad (13.1.8)$$

формально совпадающее с общепринятым выражением в электродинамике Максвелла—Лоренца. Однако следует подчеркнуть, что *в теории прямого межчастичного взаимодействия бессмысленно говорить о потенциале в точках пространства-времени, где отсутствуют электрические заряды.*

5. Из действия (13.1.8) легко получить уравнение движения выделенной заряженной частицы. Согласно принципу наименьшего действия, эта частица движется по экстремальной кривой

$$\delta S_{(1)}^{(e)} = 0 \quad (13.1.9)$$

в предположении, что на концах траектории вариации координат равны нулю. После стандартных выкладок получается уравнение знакомого

вида

$$m_{(1)}\eta_{\mu\nu}\frac{d^2x_{(1)}^\nu}{ds_{(1)}^2} = \frac{e_{(1)}}{c^2}F_{\mu\nu}(1)\frac{dx_{(1)}^\nu}{ds_{(1)}}, \quad (13.1.10)$$

где введен тензор электромагнитного взаимодействия в точке нахождения заряда с номером 1:

$$F_{\mu\nu}(1) = \frac{\partial A_\nu(1)}{\partial x_{(1)}^\mu} - \frac{\partial A_\mu(1)}{\partial x_{(1)}^\nu}. \quad (13.1.11)$$

Если опустить индекс, обозначающий номер частицы, получим стандартное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном «поле».

6. Введенный в (13.1.11) тензор электромагнитного взаимодействия  $F_{\mu\nu}$  тождественно удовлетворяет соотношениям, аналогичным уравнениям Максвелла. Чтобы это показать, следует воспользоваться соотношением Дирака для  $\delta$ -функции:

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_{(i)}^\mu\partial x_{(i)}^\nu}\delta(s^2(i, k)) = 4\pi\delta^4(x_{(i)} - x_{(k)}). \quad (13.1.12)$$

Поддействуем оператором  $\eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x_{(1)}^\mu\partial x_{(1)}^\nu$  слева на вклад в векторный потенциал от одной частицы, определенный в (13.1.6). Используя (13.1.12), находим, что векторный потенциал удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2 A_\alpha(1, k)}{\partial x_{(1)}^\mu\partial x_{(1)}^\nu} = \frac{4\pi}{c}j_{(k)\alpha}, \quad (13.1.13)$$

где

$$j_{(k)\alpha} = e_{(k)}\eta_{\alpha\beta}\int\delta^4(x_{(1)} - x_{(k)})\frac{dx_{(k)}^\beta}{ds_{(k)}}ds_{(k)}$$

— ток заряда  $k$ .

Легко убедиться, что определенный согласно (13.1.6) векторный потенциал автоматически удовлетворяет условию калибровки Лоренца

$$\frac{\partial A^\alpha(i, k)}{\partial x_{(i)}^\alpha} = 0. \quad (13.1.14)$$

Расписывая  $\partial F_{\beta}^\alpha(i, k)/\partial x_{(i)}^\alpha$  с учетом (13.1.11) и (13.1.14), находим

$$\frac{\partial F_{\beta}^\alpha(i, k)}{\partial x_{(i)}^\alpha} = -\frac{4\pi}{c}j_{(k)\beta}. \quad (13.1.15)$$

7. Таким образом, приходим к выводу, что в теории прямого электромагнитного взаимодействия типа Фоккера—Фейнмана

- 1) нет потенциалов поля в точках пространства-времени, где отсутствуют частицы, а следовательно, и нет полевых уравнений Максвелла;
- 2) потенциалы электромагнитного взаимодействия можно ввести в местах расположения заряженных частиц, и для них выполняются тождества, соответствующие уравнениям Максвелла.

Если допустить существование векторных потенциалов во всех точках непрерывного пространства-времени, то в математическом плане две теории: поля и прямого межчастичного взаимодействия, — окажутся эквивалентными. Они отличаются исходными положениями. В теории поля исходят из дифференциальных уравнений, из которых можно найти функцию Грина и записать решение в интегральном виде. В теории прямого межчастичного взаимодействия исходным является задание функции Грина. Ее роль играет дельта-функция в (13.1.12). Зная функцию Грина, можно восстановить соответствующее ей дифференциальное уравнение. Однако для физики допущение о распространении значений потенциалов на все точки пространства-времени имеет существенное значение.

## 13.2. Фейнмановская теория поглотителя и принцип Маха

В теории прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа, по определению, взаимодействие между любыми двумя электрическими зарядами (или массами) является наполовину запаздывающим и наполовину опережающим, причем исключить не наблюдаемые на опыте опережающие взаимодействия волевым образом не представлялось возможным. В итоге оказалось, что фоккеровская теория эквивалентна теории поля Максвелла—Лоренца лишь при описании статических и стационарных электромагнитных явлений.

Эта трудность была устранена Р. Фейнманом и Дж. Уилером [157, 158], которые показали, что необходимо учесть влияния на электромагнитные взаимодействия между любыми двумя зарядами со стороны всех других зарядов Вселенной. Это влияние является своеобразным «откликом Вселенной» на процесс излучения, т. е. на акт взаимодействия. Методика корректного учета отклика Вселенной составила важную часть всей теории прямого межчастичного взаимодействия, названной Фейнманом и Уилером *теорией поглотителя*. Она основана на трех постулатах: 1) ускоренный заряд в пустом пространстве не

излучает; 2) силы, действующие на любую частицу, складываются из вкладов взаимодействий со всеми другими частицами Вселенной; 3) эти взаимодействия выражаются половиной опережающего и половиной запаздывающего взаимодействий, что эквивалентно соответствующим половинам решений Лиенара—Вихерта уравнений Максвелла.

Было показано, что если во Вселенной имеется достаточно большое число заряженных частиц, то суммарное воздействие их на частицу-приемник излучения полностью компенсирует опережающее взаимодействие с источником. Кроме того, опережающая часть того же суммарного воздействия, суммируясь с запаздывающим взаимодействием источника с приемником, его удваивает, приводя к наблюдаемому на опыте запаздывающему взаимодействию. Этот результат можно интерпретировать следующим образом. На источник «излучения»  $i$  падает совокупность практически плоских опережающих «волн» (в терминах теории поля) от всех зарядов поглотителя (опережающее воздействие). В момент ускорения частицы-источника сходящаяся «волна» коллапсирует, и в следующий момент времени она расходится от источника вместе с его собственным излучением (их амплитуды одинаковы). Произвольный заряд-приемник  $j$  не может различить эти две «волны» (воздействия) разного происхождения и реагирует на них как на единое целое, т. е. как на удвоенное запаздывающее воздействие.

При получении данных результатов исходили из ряда упрощающих допущений, предполагая, что заряды имеют малую плотность в поглотителе, что они свободны и их распределение равномерно и т. д. Возникает естественный вопрос: а не изменятся ли результаты в более общих случаях? Фейнман подробно проанализировал этот вопрос и показал, что полученные результаты не зависят от подобных обобщений свойств поглотителя и что существенно лишь предположение о достаточно большом количестве зарядов в поглотителе, т. е. «абсолютность» поглотителя.

Другой принципиально важный результат, получающийся из учета поглотителя, состоит в том, что, оказывается, сам «излучающий» источник  $i$  получает при этом дополнительное воздействие в виде силы

$$\vec{F} = \frac{2e_i^2}{3c^3} \frac{d\vec{a}_i}{dt}. \quad (13.2.1)$$

В итоге 3-мерные уравнения движения «излучающей» частицы  $i$  имеют вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}\vec{H}] + \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}, \quad (13.2.2)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — внешние напряженности электрического и магнитного воздействий. (В релятивистском виде эти уравнения записаны в (8.4.8).) Таким образом, в теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия автоматически возникает сила радиационного трения, которая оказывается обусловленной воздействием на излучающую частицу со стороны всех частиц окружающей Вселенной. Следует напомнить многочисленные и до сих пор не увенчавшиеся успехом попытки обосновать возникновение силы радиационного трения в рамках традиционной теории поля.

Заметим, что приведенные рассуждения не единственны. Неявно был использован существенный постулат, согласно которому любое воздействие («излучение») от источника будет поглощено окружающей материей Вселенной, а воздействие на заряд  $j$  со стороны источников из прошлого практически равно нулю. Всю изложенную схему рассуждений можно перевернуть. Для этого достаточно постулировать, что в будущем отсутствуют возможные поглотители, тогда как в прошлом имеется достаточно много источников (постулат абсолютного излучателя). В этом случае суммарное запаздывающее воздействие от  $i$  на  $j$  (с учетом отклика Вселенной) обращается в нуль, а опережающее воздействие удваивается. Следовательно, для выбора одной из указанных схем рассуждений необходимы дополнительные соображения. Фактически здесь встает проблема обоснования направления стрелы времени (по образному выражению А. Эддингтона), т. е. направленности всей эволюции физического мира в будущее. В работах Фейнмана и Уилера [157, 158] были использованы термодинамические соображения, однако в последнее время для этой цели стали привлекаться свойства космологических моделей.

Фейнмановская теория поглотителя, т. е. учет взаимодействия с частицами всей окружающей Вселенной, соответствует принципу Маха (см. [179]). Напомним, согласно взглядам Э. Маха, развивавшего идеи немецкой физической школы середины XIX в., реальный мир представляет собой неразрывное целое, так что свойства его отдельных частей, обычно понимаемые как локальные (присущие отдельно взятым системам), на самом деле обусловлены распределением всей материи мира, или глобальными свойствами Вселенной. Он писал: «Дело именно в том, что природа не начинается с элементов, как мы вынуждены начинать. Для нас во всяком случае счастье то, что мы в состоянии временами отвлечь наш взор от огромного целого и сосредоточиться на отдельных частях его. Но мы не должны упускать из виду, что необходимо впоследствии дополнить и исправить дальнейшим исследованием то, что мы временно



оставили без внимания» [102, с. 199]. Фейнмановская теория поглотителя является прекрасной иллюстрацией справедливости принципа Маха в реляционном миропонимании.

Напомним, что идеи Маха были возведены в ранг принципа А. Эйнштейном в его статье 1918 г., где он писал: «Название «принцип Маха» выбрано потому, что этот принцип является обобщением требования Маха, что инерция должна сводиться к взаимодействию тел». Однако вскоре после создания общей теории относительности стало ясно, что в ней принцип Маха просматривается лишь в том, что метрика становится функцией координат и зависит от распределения окружающей материи. Метрический тензор находится из уравнений Эйнштейна, содержащих справа тензор энергии-импульса всей материи мира, однако уравнения допускают и вакуумные, т. е. в отсутствие материи, решения.

Эйнштейн ожидал от создаваемой теории большего. Он писал: «По мнению Маха, в действительно рациональной теории инертность должна, подобно другим ньютоновским силам, происходить от взаимодействия масс. Это мнение я в принципе считал правильным. Оно неявным образом предполагает, однако, что теория, на которой все основано, должна принадлежать тому же общему типу, как и ньютонова механика: основными понятиями в ней должны служить массы и взаимодействия между ними. Между тем нетрудно видеть, что такая попытка не вяжется с духом теории поля» [199, с. 268]. Эйнштейновская ОТО оказалась построенной в духе традиционной теории поля (концепции близкого действия), тогда как Э. Мах мыслил в духе концепции дальнего действия. ОТО и физические воззрения Маха оказались соответствующими разным метафизическим парадигмам. Принцип Маха следует считать присущим, главным образом, реляционной метафизической парадигме.

Таким образом, *принцип Маха следует понимать в более широком смысле, как идею об обусловленности локальных свойств материальных образований закономерностями и распределением всей материи мира*, т. е. глобальными свойствами Вселенной. Такая трактовка позволяет усмотреть проявление принципа Маха в ряде мест теории прямого межчастичного взаимодействия. Во-первых, в свете этого принципа устраняются опережающие взаимодействия между парой частиц благодаря учету воздействий со стороны окружающих частиц мира (с помощью фейнмановской теории поглотителя). Во-вторых, принцип Маха объясняет появление сил радиационного трения в уравнениях движения излучающих частиц. Имеются и другие свидетельства действия

принципа Маха<sup>1)</sup>, в частности, на его основе вводится эффективная искривленность пространства-времени.

### 13.3. Прямое межчастичное гравитационное взаимодействие

1. Для построения теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия необходимо видоизменить принцип действия Фоккера. Сразу же следует подчеркнуть, что прямое обобщение принципа Фоккера на случай гравитации приводит к линеаризованной теории гравитации, т. е. к приближенной теории первого порядка по гравитационной константе  $G$ . Вследствие нелинейности гравитационных взаимодействий и ряда других особенностей теория прямого межчастичного гравитационного взаимодействия строится итерационным способом — в виде своеобразного разложения в ряд по гравитационной константе.

2. Проанализируем первый порядок теории прямого гравитационного взаимодействия<sup>2)</sup>. В этом случае принцип Фоккера (13.1.1) также записывается для парных взаимодействий с той разницей, что вместо токов взаимодействующих частиц следует писать их тензоры энергии-импульса

$$S_{int}^{(g)}(1, 2) = \frac{G}{c} \int \int T_{(1)}^{\mu\nu} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - b \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) \times \\ \times T_{(2)}^{\alpha\beta} \delta(s^2(1, 2)) ds_{(1)} ds_{(2)}, \quad (13.3.1)$$

<sup>1)</sup>С принципом Маха также можно связать гипотезу Дирака [57] о связи фундаментальных физических констант и о совместном их изменении. Здесь имеется в виду замеченная Дираком связь между фундаментальными константами, характеризующими, с одной стороны, элементарные частицы, и, с другой стороны, глобальные свойства Вселенной (ее размер, скорость расширения). Ряд таких любопытных соотношений указывался и анализировался в работах А. Эддингтона, Г. А. Гамова, К. П. Станюковича, В. Н. Мельникова [152] и других авторов.

<sup>2)</sup>Обобщение принципа Фоккера на случай гравитационного взаимодействия было исследовано в работах Я. И. Грановского и А. А. Пантюшина (1965–1969) [48, 124], Е. Б. Парушина (1974), К. А. Пирагаса и В. И. Жданова (1972–1995) [63, 132] и ряда других авторов. В этих работах была развита теория в первом приближении по гравитационной константе  $G$  и рассмотрен ряд приложений этой теории для анализа приближенных уравнений движения системы гравитирующих частиц. Кроме того, следует указать большую серию работ Ф. Хойла и Дж. Нарликара (1964–1979) [117, 118, 183, 184] по своеобразному варианту теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, который правильнее было бы назвать теорией прямого скалярного взаимодействия на фоне искривленного пространства-времени общей теории относительности. Построение теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия в любом порядке по  $G$ , совпадающей с эйнштейновской теорией гравитации, было осуществлено в наших работах с А. Ю. Турыгиным (1986) [30, 31].

где  $T_{(k)}^{\mu\nu}$  — тензоры энергии-импульса взаимодействующих частиц с номерами 1 и 2;  $b$  — постоянный коэффициент, который в работах разных авторов выбирается равным 0, 1, или 2. Остальные обозначения те же, что и в предыдущих главах. Раскрывая  $T_{(k)}^{\mu\nu}$  для точечных частиц, имеем

$$S_{int}^{(g)}(1, 2) = G \frac{m_{(1)}m_{(2)}}{c} \int \int u_{(1)}^\mu u_{(1)}^\nu (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - b\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) \times \\ \times u_{(2)}^\alpha u_{(2)}^\beta \delta(s^2(1, 2)) ds_{(1)} ds_{(2)}, \quad (13.3.2)$$

где  $u_{(k)}^\mu$  — компоненты 4-скоростей, а  $m_{(k)}$  — массы соответствующих частиц.

Действие для системы гравитационно взаимодействующих частиц на фоне плоского пространства-времени имеет вид

$$S^{(g)} = -c \sum_i m_{(i)} \int ds_{(i)} + \\ + \frac{G}{2c} \sum_i \sum_{j \neq i} m_{(i)} m_{(j)} \int \int u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - b\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) \times \\ \times u_{(j)}^\alpha u_{(j)}^\beta \delta(s^2(i, j)) ds_{(i)} ds_{(j)}, \quad (13.3.3)$$

где, подчеркнем, суммирование производится по несовпадающим номерам частиц.

3. Выделяя одну частицу с номером  $i$ , представим ее действие в форме

$$S^{(g)}(i) = -cm_{(i)} \int \left( 1 - G \sum_{j \neq i} \varphi_{\mu\nu}(i, j) u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu \right) ds_{(i)}, \quad (13.3.4)$$

где использовано обозначение для потенциалов гравитационного воздействия на частицу  $i$  со стороны частицы  $j$

$$\varphi_{\mu\nu}(i, j) = \frac{m_{(j)}}{2c^2} \int \delta(s^2(i, j)) (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - b\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}) u_{(j)}^\alpha u_{(j)}^\beta ds_{(j)}. \quad (13.3.5)$$

Объединяя вклады от всех частиц, имеем суммарный гравитационный потенциал в месте нахождения частицы  $i$ :

$$\varphi_{\mu\nu}(i) = \sum_{j \neq i} \varphi_{\mu\nu}(i, j) \quad (13.3.6)$$

и действие для частицы  $i$  в виде

$$S^{(1)}(g)(i) = -cm_{(i)} \int \left( 1 - G \varphi_{\mu\nu}(i) u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu \right) ds_{(i)}. \quad (13.3.7)$$

4. Расписывая вариацию действия (13.3.7) при обычных предположениях о равенстве нулю вариаций координат на концах траектории, можно получить уравнения движения частицы  $i$  в виде (номер частицы  $i$  опускаем):

$$\begin{aligned} \eta_{\sigma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} - G \left( \frac{\partial \varphi_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \varphi_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) u^\mu u^\nu - \\ - 2G\varphi_{\mu\sigma} \frac{du^\mu}{ds} + G \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} u^\mu u^\nu u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\sigma} + \\ + 2G\varphi_{\mu\nu} \frac{u^\mu}{ds} u^\nu u^\alpha \eta_{\alpha\sigma} + G\varphi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \frac{du^\alpha}{ds} \eta_{\alpha\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (13.3.8)$$

5. Используя выражение для квадрата конечного интервала

$$s^2(x, x') = \eta_{\mu\nu} (x^\mu - x'^\mu)(x^\nu - x'^\nu)$$

и определение гравитационных потенциалов (13.3.5), таким же способом, как в электродинамике, легко получить условия, соответствующие условиям Лоренца (13.1.14):

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \varphi \right) = 0, \quad (13.3.9)$$

где  $\varphi = \varphi_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$ .

6. Из тождеств Дирака (13.1.12) и определения (13.3.5) следует тождественная выполнимость соотношений:

$$G \square \left( \varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \varphi \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (13.3.10)$$

соответствующих уравнениям Даламбера в релятивистской скалярной теории гравитации.

### 13.4. Общая теория относительности в концепции дальнего действия

Эйнштейн напрасно отрекся от взглядов Маха. Построенная им ОТО может быть переформулирована в терминах теории прямого межчастичного взаимодействия, т. е. реляционного миропонимания. Для этого необходимо сделать два шага: во-первых, перейти от гравитационных потенциалов (13.3.5) к эффективной метрике искривленного пространства-времени, — в итоге получается ОТО в первом приближении по гравитационной константе, и, во-вторых, обобщить принцип Фоккера, учтя не

только парные (13.3.3), но и тройные, четверные и т. д. взаимодействия. Охарактеризуем эти шаги.

1. Будем рассматривать метрику Минковского как нулевое приближение некоей эффективной римановой метрики

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu}, \quad (13.4.1)$$

определив первое приближение по  $G$  в виде:

$$g_{\mu\nu}^{(1)} = \eta_{\mu\nu} - 2G\varphi_{\mu\nu}. \quad (13.4.2)$$

Здесь второй член справа представляет собой малую добавку к метрике плоского пространства-времени Минковского. Чтобы не возникало путаницы, будем пометать все величины, вычисленные с помощью метрики  $g_{\mu\nu}^{(0)}$ , значком (о) сверху, а величины, вычисленные с помощью метрики  $g_{\mu\nu}^{(1)}$ , — значком (1). Так, имеем

$$\begin{aligned} d s^{(0)2} &= g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu; & \dot{u}^\mu &= dx^\mu / d s^{(0)}; \\ d s^{(1)2} &= \left(1 - 2G\varphi_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu\right) d s^{(0)2}; & \frac{d}{d s} &= \frac{d}{d s^{(0)}} + O(G^2); \\ \dot{u}^\mu &= \left(1 - G\varphi_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu\right) \dot{u}^\mu + O(G^2). \end{aligned} \quad (13.4.3)$$

2. Используя эти формулы, уравнение движения (13.3.8) можно представить в виде уравнения геодезической линии в метрике (13.4.2):

$$g_{\sigma\nu}^{(1)} \frac{d \dot{u}^\nu}{d s^{(1)}} + \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{(1)} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu = 0, \quad (13.4.4)$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}^{(1)}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}^{(1)}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(1)}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (13.4.5)$$

— символы Кристоффеля (первого порядка малости по  $G$ ).

3. Далее покажем, что в первом порядке по  $G$  тождественно выполняются уравнения Эйнштейна. Для этого подсчитаем ряд промежуточных величин. Из (13.4.2) находим контравариантный метрический

тензор

$${}^{(1)}g^{\mu\nu} \approx {}^{(o)}g^{\mu\nu} + 2G\varphi^{\mu\nu}, \quad (13.4.6)$$

где  $\varphi^{\mu\nu} = \varphi_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}$ . Из (13.4.2) и (13.4.6) последовательно находятся компоненты символов Кристоффеля  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ , тензора Риччи  $R^{\alpha}_{\mu\nu}$  и скалярной кривизны  $R$  в эффективной метрике (13.4.2). В итоге для тензора Эйнштейна получаем выражение

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(1)}g_{\mu\nu}{}^{(1)}R = G\Box\left(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(o)}g_{\mu\nu}\varphi\right) - G\left(\varphi_{\mu,\alpha} - \frac{1}{2}{}^{(o)}g^{\alpha}_{\mu}\varphi_{,\alpha}\right)_{,\nu} - \\ - G\left(\varphi_{\nu,\alpha} - \frac{1}{2}{}^{(o)}g^{\alpha}_{\nu}\varphi_{,\alpha}\right)_{,\mu} + G{}^{(o)}g_{\mu\nu}\left(\varphi_{,\alpha}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}{}^{(o)}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{,\beta}, \end{aligned} \quad (13.4.7)$$

где запятая означает частное дифференцирование.

С учетом этих условий тензор Эйнштейна приводится к виду

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(1)}g_{\mu\nu}{}^{(1)}R = G\Box\left(\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(o)}g_{\mu\nu}\varphi\right). \quad (13.4.8)$$

Условия типа Лоренца на потенциалы (13.3.9) теперь следует трактовать как гармонические координатные условия (или условия де Дондера) в первом приближении по  $G$ . Учитывая эти условия, из (13.3.10) получаем тождества, соответствующие уравнениям Эйнштейна в первом порядке по  $G$ :

$${}^{(1)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}{}^{(1)}g_{\mu\nu}{}^{(1)}R \equiv \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (13.4.9)$$

4. Для получения теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия, соответствующей эйнштейновской общей теории относительности в любом порядке по  $G$ , необходимо ввести в принцип действия Фоккера слагаемые более высоких порядков по  $G$ . В наших с А. Ю. Турыгиным работах показано (см. [31]), что это делается с помощью перехода от двухточечных взаимодействий к многоточечным. Поскольку эти выражения имеют громоздкий вид, здесь не будем их выписывать, отослав читателя к первоисточникам.

## 13.5. Концепция дальнего действия в многомерии

Теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера—Фейнмана, как правило, развивались в рамках традиционного 4-мерия, однако

ряд аспектов этой теории диктует использование скрытых размерностей, причем как калуцевского типа (для объединения электромагнитных и гравитационных взаимодействий), так и клейновского типа (для построения релятивистской квантовой теории).

### 13.5.1. Теория Калуцы в концепции дальнего действия

1. Изложенные выше теории прямого межчастичного электромагнитного, линеаризованного гравитационного и, добавим к этому, скалярного взаимодействий (макрообъектов) можно собрать воедино, увеличив размерность плоского пространства-времени до пяти [30]. Пусть  $\eta_{AB}$  — метрический тензор 5-мерного плоского пространства-времени с сигнатурой  $(+ - - - | -)$  в псевдодекартовой координатной системе, тогда принцип Фоккера первого порядка по константе гравитационного взаимодействия  $G$  для системы взаимодействующих частиц записывается в виде

$$S = \left[ - \sum_i \mu_{(i)} \int dI_{(i)} \right] + \frac{G}{2c} \sum_i \sum_{k \neq i} \mu_{(i)} \mu_{(k)} \times \\ \times \int \int f(x_{(i)}, x_{(k)}) (\eta_{AC} \eta_{BD} + \eta_{AD} \eta_{BC} - b \eta_{AB} \eta_{CD}) U_{(i)}^A U_{(i)}^B U_{(k)}^C U_{(k)}^D dI_{(i)} dI_{(k)}, \quad (13.5.1)$$

где  $U_{(i)}^A = dx_{(i)}^A / dI_{(i)}$  — компоненты 5-скорости частицы  $i$ ,  $\mu_{(i)}$  — затраченное значение массы частицы,  $f(x_{(i)}, x_{(k)})$  — структурная двухточечная функция. Будем полагать, что структурная функция зависит лишь от четырех классических координат:

$$f(x_{(i)}, x_{(k)}) = \delta(s^2(i, k)). \quad (13.5.2)$$

В (13.5.1) первое слагаемое справа (свободная часть действия) заключено в квадратные скобки, поскольку в 5-мерной теории его вводить не обязательно.

2. Выделяя в (13.5.1) координату  $x^5$  и используя представление 5-мерного интервала  $dI = ds \sqrt{1 - (dx^5/ds)^2}$ , введем обозначения для физических значений массы  $m_{(i)}$ , электрического заряда  $q_{(i)}$  и 4-скорости частицы:

$$m_{(i)} \equiv \frac{\mu_{(i)}}{\sqrt{1 - (dx_{(i)}^5/ds_{(i)})^2}}; \quad q_{(i)} \equiv \frac{2\sqrt{G}\mu_{(i)}}{\sqrt{1 - (dx_{(i)}^5/ds_{(i)})^2}} \frac{dx_{(i)}^5}{ds_{(i)}}; \quad u_{(i)}^\mu = \frac{dx_{(i)}^\mu}{ds_{(i)}}, \quad (13.5.3)$$

которые согласуются с ранее данными в рамках 5-мерной теории Калуцы определениями (8.2.18) и (8.4.10). Тогда, выделяя из (13.5.1) конкретную частицу  $i$ , ее действие можно представить в виде

$$S = \left[ -m_{(i)} \int ds_{(i)} \right] + \int \left( \left[ \frac{q_{(i)}^2}{4Gm_{(i)}} \right] + \Delta_{(i)}(x_{(i)}) \right) ds_{(i)} - \\ - q_{(i)} \int u_{(i)}^\mu A_\mu(x_{(i)}) ds_{(i)} + Gm_{(i)} \int u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu \varphi_{\mu\nu}(x_{(i)}) ds_{(i)}, \quad (13.5.4)$$

где использованы обозначения:

$$\Delta_{(i)}(x_{(i)}) = \frac{1}{4} \sum_{k \neq i} \int \delta(s^2(i, k)) \left( \frac{q_{(i)}^2 q_{(k)}^2}{4Gm_{(i)} m_{(k)}} - q_{(i)}^2 \frac{m_{(k)}}{m_{(i)}} - q_{(k)}^2 \frac{m_{(i)}}{m_{(k)}} \right) ds_{(k)}; \quad (13.5.5)$$

$$A_\mu(x_{(i)}) = \sum_{k \neq i} q_{(k)} \int \delta(s^2(i, k)) u_{\mu(k)} ds_{(k)}; \quad (13.5.6)$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x_{(i)}) = \sum_{k \neq i} m_{(k)} \int \delta(s^2(i, k)) (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha} - b \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta ds_{(k)}. \quad (13.5.7)$$

3. В выражениях действия (13.5.1) и (13.5.4) нет необходимости записывать слагаемое, соответствующее действию свободных частиц, как это принято записывать в принципе Фоккера в рамках 4-мерного пространства-времени. Как видно из второго слагаемого в (13.5.4), свободное действие можно описать посредством «скалярных» вкладов, возникающих в результате процедуры 4 + 1-расщепления. Выделяя из (13.5.7) слагаемое вида  $(\eta_{\mu\nu} u_{(i)}^\mu u_{(i)}^\nu)(\eta_{\alpha\beta} u_{(k)}^\alpha u_{(k)}^\beta)$  и перенося его в скалярную часть (13.5.5), имеем скалярный вклад

$$I_{(scal)} = -m_{(i)} \int \sum_{k \neq i} Gm_{(k)} \int \delta(s^2(x_{(i)}, x_{(k)})) \times \\ \times \left( 1 + \frac{q_{(i)}^2}{4Gm_{(i)}^2} + \frac{q_{(k)}^2}{4Gm_{(k)}^2} - \frac{q_{(i)}^2 q_{(k)}^2}{16G^2 m_{(i)}^2 m_{(k)}^2} \right) ds_{(i)} ds_{(k)}, \quad (13.5.8)$$

который следует отождествить с действием для свободной частицы  $i$  в теории прямого взаимодействия. Содержащийся в (13.5.8) интеграл



приравняем константе  $c^2$ :

$$\sum_{k \neq i} Gm_{(k)} \int \delta(s^2(x_{(i)}, x_{(k)})) \left( 1 + \frac{q_{(i)}^2}{4Gm_{(i)}^2} + \frac{q_{(k)}^2}{4Gm_{(k)}^2} - \frac{q_{(i)}^2 q_{(k)}^2}{16G^2 m_{(i)}^2 m_{(k)}^2} \right) ds_{(k)} = c^2. \quad (13.5.9)$$

4. Проанализируем, чему соответствует получившееся соотношение. Для этого учтем, что для макрообъектов отношения электрических зарядов к массе чрезвычайно малы, что позволяет ими пренебречь в (13.5.9) по сравнению с единицей. Интегрирование по интервалам снимается  $\delta$ -функцией, приводя к учету окружающей материи на конусах будущего и прошлого. Суммирование по всем частицам мира можно заменить на интегрирование эффективно введенной плотности материи  $\rho$  по всему (однородному и изотропному) пространственному сечению:

$$\sum_{k \neq i} \frac{Gm_{(k)}}{r_{(ik)}} \sim 4\pi G \int_0^R \frac{\rho}{r} r^2 dr = 2G\pi\rho R^2 = \frac{\pi GM_o}{6R} \sim c^2, \quad (13.5.10)$$

где  $r_{(ik)}$  в знаменателе возникло из вида  $\delta$ -функции (13.1.3). Легко видеть, что получившееся выражение соответствует определению гравитационного радиуса Вселенной:

$$1 - \frac{2M_o G}{c^2 R} = 0 \quad \rightarrow \quad R = \frac{2GM_o}{c^2} \quad (13.5.11)$$

через вклады со стороны всех других частиц  $k$  окружающего мира в духе принципа Маха.

5. Легко видеть, что слагаемые с электромагнитным полем, т. е. содержащие выражение (13.5.6), можно трактовать как обусловленные смешанными компонентами 5-мерного метрического тензора, где

$$A_\mu(x_{(i)}) \sim G_{5\mu} \sim \lambda_\mu. \quad (13.5.12)$$

Совершенно аналогично можно положить, что последние слагаемые в (13.5.7) справа, содержащие  $\varphi_{\mu\nu}$  без исключенного слагаемого, соответствуют линеаризованной теории гравитации.

6. Для получения теории гравитации, эквивалентной ОТО, необходимо произвести обобщение принципа Фоккера на случай тройных, четверных и т. д. взаимодействий, что уже отмечалось ранее.

В работах Хойла и Нарликара в рамках их варианта теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия эта процедура дублировалась переопределением уравнения, которому удовлетворяет двухточечная функция  $f(x_{(i)}, x_{(k)})$ :

$$\square \tilde{f}(x_{(i)}, x_{(k)}) - \nu^n R \tilde{f}(x_{(i)}, x_{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{-nG}} \delta^{(4)}(x_{(i)}, x_{(k)}), \quad (13.5.13)$$

где  $\nu$  — некоторый постоянный коэффициент, зависящий от размерности  $n$ . Варьирование действия по метрике приводит к появлению в уравнениях поля нелинейных слагаемых.

### 13.5.2. Клейновское 5-мерие в концепции дальнего действия

Для построения целостной картины мира в рамках реляционной парадигмы необходимо было разработать соответствующую ей квантовую теорию, пригодную для объяснения квантовых эффектов микромира. В итоге возникла фейнмановская формулировка квантовой механики. По этому поводу Фейнман писал: «Теорию электромагнетизма, развитую Уилером и Фейнманом, (...) можно сформулировать в виде принципа наименьшего действия, содержащего только координаты частиц. Именно попытка проквантовать эту теорию, не обращаясь к представлению о поле, привела к изложенной здесь формулировке квантовой механики» [163, с. 202].

При построении реляционной квантовой теории пришлось решать следующие задачи:

- 1) описание категории микрочастиц;
- 2) обеспечение ключевого характера действия;
- 3) описание взаимодействия;
- 4) удовлетворение условию релятивистской инвариантности;
- 5) описание спинорных частиц (фермионов).

Эти задачи решались Р. Фейнманом в несколько этапов. Первые три задачи сначала были решены в рамках нерелятивистской теории. Для ее релятивизации предлагалось использовать дополнительную, 5-ю координату клейновского типа, т. е. были использованы идеи геометрофизики. Кратко поясним решения перечисленных задач.

#### I. Нерелятивистская фейнмановская квантовая теория

1. В рамках нерелятивистской теории была введена амплитуда вероятности  $\varphi(x_{(1)}^o, x_{(1)}^i)$  нахождения частицы в 3-мерном пространстве в некоторый момент времени  $x_{(1)}^o$ .

Амплитуда вероятности в некоторый другой момент времени  $x_{(2)}^o$  определяется через ее значение в начальный момент времени посредством пропагатора  $K(x_{(2)}^\mu, x_{(1)}^\nu)$ , связывающего точки на двух пространственных сечениях:

$$\varphi(x_{(2)}^o, x_{(2)}^i) = \int K(x_{(2)}^o, x_{(2)}^i; x_{(1)}^o, x_{(1)}^i) \varphi(x_{(1)}^o, x_{(1)}^i) d^3x_{(1)}. \quad (13.5.14)$$

Предложен метод вычисления таких интегралов путем разбиения промежутка времени  $(x_{(2)}^o - x_{(1)}^o)$  на малые участки  $(x_{(2)}^o - x_{(1)}^o)/n = \varepsilon$  и последовательное вычисление выражений вида (13.5.14) по всем промежуточным пространственным сечениям.

2. Пропагатор выражается через классическое действие следующим образом:

$$K(x_{(2)}^\mu, x_{(1)}^\nu) = \int_{\{x(x^o)\}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{x_{(1)}}^{x_{(2)}} S(x, \dot{x}, \dots) dx^o\right) D[x(x^o)], \quad (13.5.15)$$

где  $D[x(x^o)]$  означает, что интегрирование производится по всем возможным траекториям частицы между точками  $x_{(2)}$  и  $x_{(1)}$ .

В нерелятивистском случае действие выбирается в виде

$$S = \int_{x_{(1)}}^{x_{(2)}} \left( \frac{mc}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{c} U(x) \right) dt, \quad (13.5.16)$$

где точка означает дифференцирование по времени  $t$ , а  $U(x)$  является потенциальной энергией частицы.

3. Далее нужно разложить все входящие в (13.5.16) величины в ряды по малым смещениям координат и времени, за исключением слагаемого, соответствующего кинетической энергии. Выражения с квадратичными смещениями по координатам играют ключевую роль в определении гауссовых интегралов. Достаточно использовать три гауссовых интеграла, содержащие нулевой, первый и второй порядок смещений в разложениях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{imc}{2\hbar\varepsilon} \zeta^2\right) d\zeta = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{i\hbar\varepsilon}{mc}}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \zeta \exp\left(\frac{imc}{2\hbar\varepsilon} \zeta^2\right) d\zeta = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 \exp\left(\frac{imc}{2\hbar\varepsilon} \zeta^2\right) d\zeta = \sqrt{2\pi} \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mc}\right)^{3/2}. \quad (13.5.17)$$

Произведя все разложения и выбирая нормирующий коэффициент в виде  $n = (2\pi i\hbar\varepsilon/mc)^{3/2}$ , получаем стандартное уравнение Шрёдингера

$$i\hbar c \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \eta^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} + U(x)\varphi. \quad (13.5.18)$$

## II. Релятивистское уравнение для скалярных частиц

1. При релятивизации фейнмановского метода в пропагаторе (13.5.15) нужно заменить классическое действие на релятивистское, причем в последнем взаимодействие, т. е. потенциальная энергия  $U(x)$ , должно пониматься в духе теории прямого межчастичного взаимодействия.

Решение данной задачи основано на выборе параметра эволюции. Замена абсолютного времени  $t$  на времени-подобную координату  $x^0$  для данной цели не подходит. Непосредственное применение фейнмановского метода приводит к дифференциальному уравнению первого порядка по параметру эволюции, тогда как по остальным координатам получается уравнение второго порядка, т. е. нарушается пространственно-временная симметрия. Для преодоления этой трудности было предложено ввести особый параметр эволюции, который фактически *соответствует дополнительному времени-подобному измерению* [26]. Имея в виду изложенные выше идеи геометрофизики, обозначим ее через  $x^4$ . Тогда все четыре классические координаты  $x^\mu$  выступают равноправно.

2. Опять разделяя конечный промежуток параметра эволюции на малые равные интервалы  $\Delta x^4 \equiv \varepsilon$  и полагая этот параметр пропорциональным собственному времени выбранной частицы, классическое действие между двумя близкими моментами можно представить в виде

$$S(x_{(2)}, x_{(1)}, \varepsilon) = \eta_{\mu\nu} \frac{m(x_{(2)}^\mu - x_{(1)}^\mu)(x_{(2)}^\nu - x_{(1)}^\nu)}{\varepsilon} + \frac{e}{c} A_\mu \left( \frac{x_{(2)} + x_{(1)}}{2} \right) (x_{(2)}^\mu - x_{(1)}^\mu). \quad (13.5.19)$$

Легко видеть, что это выражение с точностью до некоторого слагаемого можно понимать как квадрат 5-мерного интервала, где векторный потенциал  $A_\mu$  выступает в виде смешанных компонент 5-мерного метрического тензора. Поскольку введенный параметр эволюции времени-подобен, можно сказать, что в этом варианте теории используется 5-мерное пространственно-временное многообразие с сигнатурой  $(+ - - - | +)$ .

3. Далее следует произвести разложение всех величин в ряды по малым смещениям, оставляя неизменным первое экспоненциальное слагаемое справа в (13.5.19) для возможности использовать гауссовы инте-

гралы (13.5.17). В итоге получается уравнение шредингеровского типа

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial x^4} = \frac{\hbar^2}{2mc} \eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \Phi = 0. \quad (13.5.20)$$

Далее только остается положить

$$\Phi = \varphi(x^\mu) \exp \left( \frac{imc}{2\hbar} x^4 \right), \quad (13.5.21)$$

что соответствует формуле (8.5.7) в 5-мерной теории Клейна. В итоге получается известное релятивистское уравнение Клейна—Фока в присутствии электромагнитного поля:

$$\left[ \eta^{\mu\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) + \frac{(mc)^2}{\hbar^2} \right] \varphi = 0. \quad (13.5.22)$$

В работах [26, 55] этим методом рассматривались возможности описания также гравитационного взаимодействия.

4. Не представляет особого труда объединить этот материал с изложенным в предыдущем пункте, где использована дополнительная координата калуцевского типа. В итоге можно прийти к 6-мерной теории Калуцы—Клейна в концепции дальнего действия.

5. Здесь не обсуждались вопросы описания спинорных частиц, что требует особого рассмотрения. Укажем только, что именно в процессе решения этой задачи Р. Фейнман сформулировал известные правила Фейнмана записи матричных элементов процессов в квантовой теории поля (см. [164]).

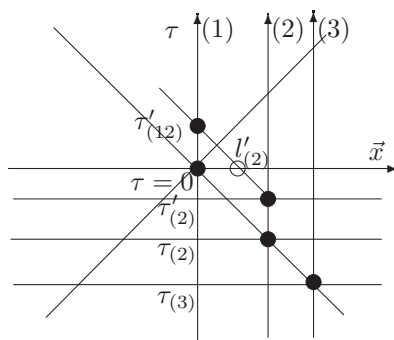
### 13.6. Соотношение концепций дальнего действия и ближнего действия

1. В современной физике, опирающейся на концепцию ближнего действия, эволюция систем фактически описывается на основе принципов простых марковских процессов, т. е. полагается, что состояние системы в некоторый последующий момент времени  $\tau_o + \Delta\tau$  определяется ее состоянием в момент  $\tau_o$  и некоторый предшествующий момент  $\tau_o - \Delta\tau$ . Это отражено тем, что уравнения движения пишутся для ускорения системы, которое определяется тремя точками, а начальные состояния (в момент  $\tau_o$ ) задаются положением (координатами) частиц и их скоростями. Последнее равносильно заданию положений в два близких момента времени  $\tau_o$  и  $\tau_o - \Delta\tau$ .

Реляционный подход (концепция дальнего действия) фактически строится на основе принципов сложных (даже бесконечно усложняющихся) процессов Маркова, когда состояние системы в момент времени  $\tau_0 + \Delta\tau$  определяется состоянием, т. е. процессами в ряд (даже в бесконечном множестве) моментов времени в прошлом. С точки зрения реляционного подхода введение понятия поля представляет собой математический прием, превращающий сложный марковский процесс в простой. Поясним это более подробно.

На рис. 13.2 изображен световой конус частицы (1) с вершиной на ее мировой линии в момент времени  $\tau = 0$ , когда она находится в релятивистском контакте с событиями на мировых линиях частиц (2), (3) и так далее в прошлые моменты времени  $\tau_{(2)}$ ,  $\tau_{(3)}$ ,  $\dots$ . Эти события, происшедшие с другими частицами в прошлые моменты времени, определяют изменение состояния данной частицы (1). Чтобы его описать в реляционной парадигме, необходимо просуммировать по вкладам от всех частиц мира на световом конусе прошлого, т. е. по множеству моментов времени в прошлом.

Это существенно отличается от описания поведения частиц в физической парадигме (в теории поля), где изменение состояния частиц определяется свойствами системы лишь в точке ее нахождения (локально в момент  $\tau = 0$ ). Локальность обеспечивается введением понятия поля, которое заменяет частицы, находящиеся в релятивистском контакте в прошлые моменты, на взаимодействие с полем в рассматриваемый момент времени.



**Рис. 13.2.** Процессы взаимодействия в реляционной парадигме

Очевидно, что событие в пространственно-подобной точке  $\tau'_{(2)}$  никак не сказывается на состоянии частицы (1) в момент  $\tau = 0$ , — она окажется в релятивистском контакте лишь в момент  $\tau'_{(1,2)}$ , т. е. в промежутке от

$\tau'_{(2)}$  до  $\tau'_{(1,2)}$  для нее этого события как бы не существует. В теории поля же постулируется, что вся информация уже содержится на любой пространственно-подобной гиперповерхности, в частности, на пространственном сечении в момент  $\tau = 0$ . Это осуществляется введением поля, соответствующего излучению, распространяющемуся по пространству от излучателя до приемника. В данном случае воздействие от события с частицей (2) отображается фронтом волны в соответствующей точке пространства  $l'_{(2)}$ . В теории поля изменение, происшедшее с частицей-излучателем, передается полю — переносчику взаимодействия.

С позиций реляционной парадигмы понятие поля имеет чисто вспомогательный характер, предназначенный для замены дальнего действия (с ньютоновой, нерелятивистской точки зрения) на локальный способ описания процессов взаимодействия. С точки зрения реляционной парадигмы представляется ложной так называемая «проблема редукции волнового пакета» в триалистической парадигме, где понятие поля абсолютизируется, т. е. понимается реально существующим и распространяющимся в виде, например, сферической волны во все стороны от излучателя, которая затем схлопывается в точке поглотителя. Это типичная парадигмальная проблема триалистической парадигмы, где парадокс усматривается в необходимости допустить, что поле из всех точек волнового фронта должно со сверхсветовой скоростью (точнее, мгновенно) сойтись в точку нахождения поглотителя излучения.

2. *Специальная теория относительности более соответствует концепции дальнего действия, нежели ближнего действия* [176]. Можно сделать еще более сильное утверждение: концепция ближнего действия опирается на ньютоновы (нерелятивистские) представления о контакте, который понимается как обращение в нуль расстояния между взаимодействующими объектами ( $\Delta l \rightarrow 0$ ), тогда как в концепции дальнего действия используется релятивистское понимание контакта, означающее обращение в нуль интервала между взаимодействующими объектами: ( $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 \rightarrow 0$ ). Последнее означает, что взаимодействие между двумя объектами происходит тогда, когда они оказываются на световом конусе друг друга, т. е. в согласии с принципом Фоккера.

3. Резюмируя изложенный выше реляционный подход к описанию взаимодействий, можно сделать следующие выводы:

- 1) теория прямого гравитационного взаимодействия типа Фоккера—Фейнмана (в первом порядке по  $G$ ) строится по образу и подобию теории прямого электромагнитного взаимодействия;

- 2) тензорный (2-го ранга) характер прямого гравитационного взаимодействия позволяет ввести эффективную риманову метрику (в месте нахождения частиц);
  - 3) для эффективной римановой метрики имеют место тождества, соответствующие линеаризованным уравнениям Эйнштейна;
  - 4) обобщение принципа Фоккера для гравитационного взаимодействия на более высокие порядки по  $G$  приводит к нелинейной теории прямого гравитационного взаимодействия, соответствующей ОТО;
  - 5) теории прямого межчастичного электромагнитного, гравитационного и скалярного взаимодействий можно объединить, переписав принцип Фоккера в пространстве-времени пяти измерений;
  - 6) в 5-мерной объединенной теории прямого межчастичного взаимодействия электромагнитный векторный потенциал  $A_\mu$  можно интерпретировать через смешанные компоненты эффективного метрического тензора  $G_{5\mu}$ ;
  - 7) в концепции дальнего действия квантовая теория взаимодействующих частиц естественным образом строится в рамках теории 6 измерений, соответствующей 6-мерной теории Калуцы—Клейна в геометрофизике.
4. Сделаем несколько замечаний по теории прямого межчастичного взаимодействия.
- а) В концепции дальнего действия вместо дифференциальных уравнений теории поля доминируют интегральные уравнения, менее привычные большинству исследователей.
  - б) В реляционном подходе различные типы взаимодействий соответствуют разному тензорному рангу: электромагнетизм — векторному, гравитационное — тензорному второго ранга. В этом подходе непосредственно не просматриваются принципы, позволяющие ввести векторные взаимодействия различных типов: электромагнитные, слабые и сильные.
  - в) Имеется ряд особенностей в формулировке теории прямого межчастичного взаимодействия спинорных частиц. Их анализ способствовал построению Фейнманом диаграммной техники в квантовой электродинамике (см. [164]).



### 13.7. Выводы из сравнения метафизических парадигм

Сопоставительный анализ взаимодействий в разных парадигмах позволяет сформулировать ряд принципиально важных следствий, некоторые из которых можно возвести в ранг метафизических принципов<sup>1)</sup>.

1. **Принцип тринитарности** (троичности или триединства) уже неоднократно упоминался. Перечислим ряд проявлений этого принципа.

- 1) Анализ представленных в литературе аксиоматик геометрии (пространства-времени) показывает, что в них *минимальное и устойчиво повторяющееся число примитивов равно трем*. Как правило, в качестве примитивов геометрии выбираются: **точки, метрика (расстояния), области непрерывных множеств**. В теории относительности геометрические точки трактуются как физические точки-события, а вместо расстояний выступают интервалы (метрика).
- 2) Оказывается, аксиоматика даже 3-мерной евклидовой геометрии представляет собой довольно сложный комплекс из примитивов и аксиом; число последних превышает два десятка и варьируется в некоторых пределах. Как правило, совокупность аксиом разбивается на *три основные группы: аксиомы порядка, метрические и топологические аксиомы*. Аксиомы порядка и метрические аксиомы непосредственно определяют порядковые или числовые соотношения для пар точек или их ограниченного числа. Затем эти свойства распространяются на все множество. Топологические

---

<sup>1)</sup>Метафизические принципы можно усмотреть уже в аксиоматике геометрии, поскольку аксиомы представляют собой исходные, недоказуемые утверждения, удовлетворяющие условиям полноты и непротиворечивости, а самое главное, — приемлемости построенной на их основе геометрии (теории).

Всякая аксиоматика опирается на систему примитивов — исходных (далее не определяемых) элементарных понятий, подчиняющихся лишь данной системе аксиом, из которых по определенным правилам строятся теоремы [74]. Имеется большой произвол в выборе как самих примитивов, так и аксиом. Например, то, что в одной аксиоматике является теоремой, в другой — может быть аксиомой. И в этом случае некоторые аксиомы первой аксиоматики становятся теоремами во второй. Конкретизация аксиоматики, в конечном счете, обусловлена миропониманием, т. е. выбранной метафизической парадигмой. В большинстве предлагавшихся аксиоматик фактически отражалась именно триалистическая парадигма. Естественно, аксиоматики 3-мерной евклидовой геометрии отражали представления о пространстве в ньютоновой физике. После открытия специальной теории относительности (СТО) были разработаны аксиоматики 4-мерного пространства-времени в работах Д. Гильберта [45], А. Робба [137], А. Д. Александрова [1] и др. Затем были предложены аксиоматики общей теории относительности [27, 116, 131].

аксиомы задают свойства непрерывных подмножеств — областей и окрестностей.

- 3) Еще раз подчеркнем, что классическая физика строится на трех физических категориях.
- 4) Переход от триалистической парадигмы к дуалистическим осуществляется по трем каналам, соответствующим геометрическому, теоретико-полевому и реляционному миропониманиям.
- 5) Обобщенные дифференциальные геометрии характеризуются тремя и только тремя схоутенами: тензором кручения  $S_{\alpha\beta}^{\mu}$ , тензором неметричности  $Q_{\alpha\beta\gamma}$  и третьим схоутеном  $W_{\alpha\beta}^{\mu}$ .
- 6) В общей теории относительности системы отсчета характеризуются тремя монадными физико-геометрическими тензорами: вектором ускорения  $a_{\mu}$ , тензором угловой скорости вращения  $\omega_{\mu\nu}$  и тензором скоростей деформаций  $d_{\mu\nu}$ .
- 7) Имеются три вида однородных изотропных космологических моделей, соответствующих трем видам 3-мерных геометрий: Евклида, Лобачевского и Римана.

Этот список можно существенно продолжить.

2. **Принцип фрактальности**<sup>1)</sup> гласит, что в редукционистском подходе каждая выделенная категория сохраняет свойства целого и в ней неизбежно проявляются все другие категории. Так, в рамках триалистической парадигмы определение каждой из трех ключевых физических категорий — пространства-времени, полей и частиц — содержит в себе информацию о двух других категориях. Поясним это.

Начнем с категории *пространства-времени*. В аксиоматике геометрии три ее примитива следующим образом сопоставляются с тремя физическими категориями:

- 1) точка (точка-событие) — категория частиц;
- 2) интервал (метрика) — категория полей переносчиков взаимодействий;
- 3) области непрерывного множества — категория пространства-времени.

Первое из названных соответствий не вызывает сомнений, поскольку теория относительности имеет дело именно с событиями, в которых обязательно участвует какая-либо частица. Второе — менее очевидное в рамках специальной теории относительности — становится понятным,

<sup>1)</sup>Термин фрактал был введен в 1975 г. Бенуа Мандельбротом в его книге «The Fractal Geometry of Nature» для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур. «Фракталом, — по определению Б. Мандельброта, — называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

если иметь в виду общую теорию относительности, где через компоненты метрического тензора (метрики) описывается гравитационное взаимодействие. В многомерных теориях Калуцы—Клейна метрика ответственна и за появление электромагнитного и других физических полей. Соответствие областей и самой категории пространства-времени также представляется очевидным.

В самой дефиниции *категории поля* проявляются свойства фрактальности, так как она отражает все три ключевые категории. Во-первых, это *область определения* функции, — она задана на непрерывном пространственно-временном многообразии (или на некоторой его области), — в чем можно усмотреть отражение категории пространства-времени. Во-вторых, это *числовая* функция, которую, как и метрику, следует сопоставить с самой категорией переносчиков взаимодействий. В-третьих, *аргументом функции является точка*, олицетворяющая категорию частиц.

*Категория частиц* предстает в виде трех составляющих:

- 1) *рассматриваемые частицы или тела*, которые непосредственно соответствуют категории частиц;
- 2) *тело отсчета*, относительно которого определяются все понятия, в том числе и компоненты полей;
- 3) *все прочие частицы (тела) окружающего мира (Вселенной)*, которые позволяют говорить о категории пространства-времени.

Первая из указанных составляющих может определяться отдельной элементарной частицей или достаточно сложными макрообъектами. Вторая составляющая в общепринятом подходе — как в геометрической, так и в теоретико-полевой или реляционной парадигмах — представляет собой макрообъект (макроприбор). Метафизический характер данной составляющей обуславливает важное значение систем отсчета в теории относительности и самого понятия макроприбора в квантовой теории. Третья составляющая в триалистической парадигме лишь неявно подразумевается, но она играет важную роль в геометрофизике и, — подчеркнем это, — в реляционном миропонимании.

Принцип фрактальности в полной мере проявляется и в дуалистических (также редукционистских) парадигмах.

**3. Принцип дополнительности метафизических парадигм** является обобщением известного принципа дополнительности Н. Бора<sup>1)</sup>: **метафи-**

<sup>1)</sup>На стене кафедры теоретической физики МГУ Н. Бор написал: <Contraria non contradictoria rad complimenta sunt>. («Противоположности не противоречат, а дополняют друг друга»). Этот принцип дополнительности, сформулированный

зические парадигмы не противоречат, а дополняют друг друга, представляют собой видение одной и той же физической реальности под разными углами зрения. Как в 3-мерном пространстве полное представление об объемном объекте можно составить, изобразив его проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости, так и согласно метафизике физическая реальность достаточно полно представляется лишь совокупностью теорий из разных метафизических парадигм.

Анализ описания физического мира в рассмотренных парадигмах показывает, насколько различны мировосприятия в рамках каждой из них. То, что хорошо просматривается и необходимо в русле одной из них, может оказаться не замеченным в теориях иной парадигмы. Например, принцип Маха не нашел подобающего воплощения в рамках геометрической или теоретико-полевой парадигм, но играет важную роль в теориях реляционной парадигмы.

Все три миропонимания сыграли свою важную и неповторимую роль в создании современной физической картины мира.

4. **Принцип целостности** состоит в том, что *ни одно утверждение (или формула) в теории редукционистской парадигмы не может претендовать на физическую значимость, если в нем не представлены все категории используемой парадигмы.*

Так, в ньютоновой *триалистической парадигме* физически значимым (фундаментальным) является второй закон Ньютона  $m\vec{a} = \vec{F}$ , в котором  $m$  соответствует категории частиц,  $\vec{a}$  — категории пространства и времени, а  $\vec{F}$  — категории полей.

В *геометрической дуалистической парадигме* физически значимыми (фундаментальными) являются уравнения Эйнштейна, в которых левая часть описывает категорию искривленного пространства-времени, а правая часть — категорию частиц и других бозонных полей. Фундаментальными также являются плотности и гиперплотности лагранжиана, содержащие две части: геометрическую и физическую (фермионную).

В *теоретико-полевой дуалистической парадигме* физически значимыми являются ковариантные волновые уравнения (Клейна—Фока, Дирака) для взаимодействующих полей, поскольку в них содержатся производные от амплитуды вероятности (обобщенной категории полей и частиц) по координатам, представляющим категорию пространства-времени.

---

для интерпретации квантовой механики, Н. Бор возвел в ранг общепhilософского принципа [11].

В *реляционном подходе* физически значимым следует назвать принцип Фоккера, поскольку он характеризует взаимодействие через характеристики частиц на фоне пространственно-временного многообразия.

5. Анализ физических теорий и программ XX века выявил **тенденцию дальнейшего сокращения числа категорий, т. е. стремление перейти от дуалистических парадигм к монистической**. В разд. 11.4 были отмечены попытки построения монистической парадигмы, исходя из геометрического миропонимания. В рамках теоретико-полевого миропонимания такая же тенденция проявляется в виде теории суперструн, а в рамках реляционного подхода — в бинарной геометрофизике [41, 43].

6. В бинарной геометрофизике холистический подход приводит к взгляду на гравитацию как на специфическое проявление других видов (физических) взаимодействий.

Примечательно, что близкие соображения о вторичном, производном характере гравитационного взаимодействия высказываются некоторыми авторами в рамках теоретико-полевого миропонимания. В частности, к аналогичным выводам об обусловленности искривленности пространства-времени свойствами квантованных полей пришел в своих работах А. Д. Сахаров [148]. Обращают на себя внимание и введенные им образные термины: «теория нулевого лагранжиана» и «метрическая упругость вакуума». Можно назвать также других авторов, писавших об «индуцированной гравитации»: О. Клейна, Х. Теразава, С. Адлера и Д. Амати, Г. Венециано. Так, П. Уэст, обсуждая возможности «объединения тяготения (гравитации) со всеми другими силами природы» в рамках теории суперструн, пишет: «Но в этой связи следует напомнить, что *гравитация может оказаться не фундаментальной силой, а быть обусловленной динамическим механизмом* (курсив Ю. В.)» [162, с. 14].

## Парадигмальные проблемы общей теории относительности



Следует особо подчеркнуть что метафизика, как таковая, ничего не доказывает, однако на ее основе можно осмыслить суть ряда принципиальных проблем в рассматриваемой теории, занять реалистическую позицию и выбрать подходящие пути преодоления трудностей.

Метафизика прежде всего, предостерегает от абсолютизации понятий и категорий в теориях, развиваемых в рамках той или иной редукционистской парадигмы. По этому поводу еще Э. Мах писал: «Средствам мышления физики, понятиям массы, силы, атома, вся задача которых заключается только в том, чтобы побудить в нашем представлении экономно упорядоченный опыт, большинством естествоиспытателей приписывается реальность, выходящая за пределы мышления. Более того, полагают, что эти силы и массы представляют то настоящее, что подлежит исследованию, и если бы они стали известны, все остальное получилось бы само собою из равновесия и движения этих масс. (...) Мы не должны считать *основами* действительного мира те интеллектуальные вспомогательные средства, которыми мы пользуемся для *постановки* мира на сцене нашего мышления» [102, с. 432]. К названным Махом понятиям, характеризующим категории ньютоновой триалистической парадигмы, добавим ряд других, соответствующих исходным и обобщенным категориям дуалистических парадигм. К таковым следует отнести понятия волновых функций, кривизны пространства-времени и т. д.

Назовем *парадигмальными* те проблемы, которые вызваны превышением смысла (ролей) категорий и понятий используемой парадигмы или попытками введения в одну парадигму понятий иной парадигмы. Как правило, превышение смысла категорий состоит в их абсолютизации, т. е. в допущении их действительного существования в отрыве от других категорий этой же парадигмы. Серьезным предупреждением от подобных заблуждений является сам факт наличия нескольких теорий, построенных в рамках разных метафизических парадигм.

---

В случае геометрофизики и ОТО к парадигмальным проблемам следует отнести попытки ввести энергию и импульс гравитационного поля, определить гравитационные волны как новый вид материи, квантовать гравитацию и ряд других. Рассматривая данный комплекс проблем, мы стремились показать опасность нарушения метафизических принципов, сформулированных выше.

## 14.1. Эффекты ОТО в разных метафизических парадигмах

Одни и те же эффекты можно описать в рамках теорий из разных метафизических парадигм. При одинаковых конечных результатах в промежуточных выкладках и рассуждениях используются различные понятия, соответствующие категориям используемой парадигмы [121]. Однако при смешении понятий из разных метафизических парадигм можно прийти к парадоксальным, нелепым выводам. Продемонстрируем это на примере эффекта гравитационного красного смещения света в метрике Шварцшильда.

**Геометрическое миропонимание** было рассмотрено в гл. 3 при обсуждении понятий системы отсчета в метрике Шварцшильда. Напомним основные моменты. Было решено уравнение изотропной геодезической в радиальном направлении, соединяющем источник излучения, характеризуемый радиальной координатой  $r_1$ , и приемник, характеризуемый координатой  $r_2$ . Подчеркивалось, что в ОТО физически наблюдаемыми следует считать лишь инвариантные величины, не зависящие от выбора координат, в том числе и радиальной координаты  $r$ . Этого можно достичь, используя понятия системы отсчета. Была использована система отсчета, покоящаяся (зависая) относительно гравитирующего центра, которая адекватно описывается хронометрической (кинеметрической) калибровкой монады для метрики Шварцшильда в координатах кривизн. Сравнимаемыми инвариантами являлись проекции волнового вектора  $\varepsilon = k^\mu \tau_\mu$  электромагнитного излучения, распространяющегося вдоль радиальной геодезической

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r_1}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{1 - 2GM/c^2 r_2}}, \quad (14.1.1)$$

где  $\varepsilon_o$  — константа интегрирования. Полагалось, что для процессов однотипного излучения (в собственной системе отсчета излучателя) инварианты  $\varepsilon_k$  одинаковы. Из выражения (3.6.20) для относительного изменения данного инварианта в точках испускания и приема было получено

известное значение (3.6.22) для гравитационного красного смещения

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{GM(r_2 - r_1)}{c^2 r_1 r_2}. \quad (14.1.2)$$

**Теоретико-полевое миропонимание** обычно дается на основе формул, полученных из геометрической теории гравитационного поля. Как уже отмечалось, данный эффект одинаков в ньютоновой и эйнштейновской теориях гравитации (имеет место принцип соответствия), поэтому можно рассуждать следующим образом. Испущенный источником фотон, обладая начальной энергией  $\varepsilon_1 = h\nu_1$ , для достижения приемника, находящегося на высоте  $H = (r_2 - r_1)$ , должен затратить энергию  $\Delta\varepsilon = mgH = (h\nu_1/c^2)g(r_2 - r_1)$ . В итоге фотон достигает приемника, обладая меньшей энергией  $\varepsilon_1 - \Delta\varepsilon$  по сравнению со своей начальной энергией, равной энергии однотипного фотона  $\varepsilon_1$ , излученного в месте расположения приемника излучения.

Очевидно, данное рассуждение формально опирается на координатные понятия и зависит от выбора координатной системы. Однако ничто не мешает в теоретико-полевом подходе использовать понятия системы отсчета и в данном рассуждении говорить о сравнении инвариантных понятий энергии фотона в двух его положениях.

Заметим, что в геометрическом миропонимании можно было не использовать понятие фотона, распространяющегося по геодезической. Достаточно было сравнивать проекции волнового вектора вдоль данной геодезической в двух ее точках.

**Реляционное миропонимание** исключает из числа используемых (первичных) понятий поле, а следовательно, в нем нет и распространяющегося от излучателя к приемнику кванта поля — фотона, другими словами, имеет место прямое электромагнитное воздействие излучателя на приемник путем непосредственного релятивистского контакта ( $ds^2 = 0$ ), т. е. вдоль светового конуса. В этой парадигме гравитационное воздействие шварцшильдовского центра на излучатель и на приемник может быть описано посредством эффективной римановой метрики, т. е. для рассуждений в реляционной парадигме опять можно использовать понятия ОТО. Однако в данном случае следует сравнивать ход часов в точках излучения и приема. Теперь инвариантом следует считать интервал координатного времени  $\Delta x^0$  в фоновом плоском пространстве-времени. Ему соответствуют следующие показания двух часов:

$$\Delta\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}; \quad \Delta\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}. \quad (14.1.3)$$



Отсюда следует, что часы в местонахождении излучателя идут медленнее часов, где находится приемник. Частоты излученного и полученного сигналов обратно пропорциональны интервалам времени испускания и поглощения:

$$\nu_1 \simeq \frac{1}{\Delta\tau_1}; \quad \nu_2 \simeq \frac{1}{\Delta\tau_2}. \quad (14.1.4)$$

Опять полагая, что частоты излучения однотипного излучения должны быть одинаковыми во всех точках, приходим к формуле (14.1.2), полученной в геометрическом или теоретико-полевым миропониманиях, однако в реляционном миропонимании отсутствует понятие распространяющегося фотона, расходующего энергию на преодоление силы тяжести.

Таким образом, все три рассуждения, использующие разные понятия, приводят к одному и тому же результату. Иначе говоря, они представляют собой три различные интерпретации (в трех парадигмах) одного и того же результата. Нет оснований утверждать, что одно из рассуждений верно, а другие ошибочны, — все они верны в соответствующих парадигмах. Если последовательно опираться на понятия, присущие одной и той же парадигме, то не должно возникать недоразумений. Все неприятности возникают тогда, когда производится смешение понятий и способов рассуждений из разных парадигм. Например, если сторонники реляционного способа рассуждений (без фотонов) все же введут фотоны, то они приходят к выводу, что распространяющийся от излучателя к приемнику сигнал в процессе распространения не меняет своей энергии, а эффект обусловлен исключительно разностью хода часов в местах нахождения излучателя и приемника. Однако этот вывод сразу вступает в противоречие с объяснением эффекта в теоретико-полевым миропонимании.

Подобные недоразумения могут возникать при использовании эклектических рассуждений при объяснениях и других эффектов теории гравитации.

## 14.2. Проблема энергии-импульса гравитационного поля

Проблема определения гравитационной энергии и законов сохранения энергии-импульса оказалась ключевой в блоке парадигмальных проблем ОТО. На безуспешные попытки ее решения было затрачено чрезвычайно много усилий. Сразу же отметим, что с позиций метафизики суть неудач состояла в том, что, во-первых, допускалось существование категории искривленного пространства-времени в отрыве

от категории частиц (материи, помещаемой в пространство-время) и, во-вторых, исследователи стремились внести в дуалистическую геометрическую парадигму свойства, ей не присущие, однако имеющие место в теориях иных парадигм.

### 14.2.1. Ситуация с законами сохранения энергии и импульса в ОТО

Напомним ключевое выражение, из которого следуют законы сохранения энергии и импульса материи в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах):

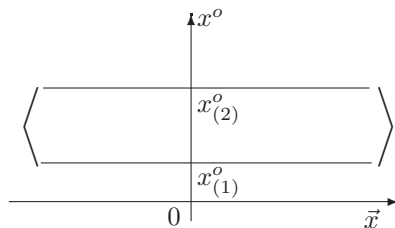
$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (14.2.1)$$

где  $T^{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи. Записав интеграл от левой части этого выражения по 4-мерному объему, с помощью теоремы Остроградского—Гаусса можно перейти к интегрированию по 3-мерной гиперповерхности, ограничивающей выбранный 4-объем. Беря в качестве 4-объема область пространства-времени, заключенную между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями  $x^0_{(1)} = \text{const}_{(1)}$  и  $x^0_{(2)} = \text{const}_{(2)}$  (см. рис. 16.1), и полагая, что на пространственной гиперповерхности в бесконечности  $T^{\mu\nu} = 0$ , получаем законы сохранения:

$$\int_{x^0_{(2)}} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu - \int_{x^0_{(1)}} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0 \rightarrow \int T^{\mu 0} d^3x \equiv P^\mu = (\text{const})^\mu. \quad (14.2.2)$$

Здесь  $\sigma_\nu$  — элемент гиперповерхности, включающий в себя вектор единичной нормали к этой гиперповерхности. Знак минус обусловлен тем, что при обходе по всей гиперповерхности, ограничивающей объем интегрирования, имеем противоположные знаки нормали.

На ситуацию с законом сохранения энергии и импульса в ОТО можно взглянуть под несколькими углами зрения.



**Рис. 14.1.** Выбор 4-мерного объема для получения законов сохранения в плоском пространстве-времени

1. В искривленном пространстве-времени соотношение (14.2.1) должно быть заменено на ковариантное выражение

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} = 0, \quad (14.2.3)$$

ранее использованное при записи (постулировании) уравнений Эйнштейна. Однако это выражение в общем случае не соответствует сохранению какой-либо величины, так как для перехода к интегрированию по гиперповерхности необходимо иметь обычную, а не ковариантную дивергенцию. «Лишним» оказывается последний член справа. Таким образом, *в искривленном пространстве-времени, вообще говоря, законы сохранения энергии и импульса отсутствуют, точнее, теряют смысл.*

2. Другое объяснение отсутствия законов сохранения энергии и импульса в ОТО состоит в следующем: чтобы проинтегрировать некую величину, необходимо снести ее значения в одну точку, однако для тензорных величин подобная операция зависит от пути переноса из одной точки в другую. Предпринимались попытки решить проблему законов сохранения посредством конкретизации путей переноса, например по геодезическим линиям. Однако при этом возникают другие трудности, связанные с тем, что во многих конкретных ситуациях между парой точек можно провести несколько геодезических линий.

Заметим, что сама искривленность пространства-времени еще не означает вообще отсутствия законов сохранения. Так, в ОТО имеет место закон сохранения электрического заряда. Этот закон в плоском пространстве-времени обычно связывается с соотношением, подобным (14.2.1):

$$\frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad (14.2.4)$$

где  $j^\nu$  — вектор плотности 4-мерного электрического тока. В искривленном пространстве-времени имеем

$$\nabla_\nu j^\nu = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}j^\nu)}{\partial x^\nu} = 0. \quad (14.2.5)$$

Отсюда получается закон сохранения заряда

$$\int_V (\nabla_\nu j^\nu) \sqrt{-g} d^4x = \oint \sqrt{-g} j^\nu d\sigma_\nu = 0 \rightarrow \int \sqrt{-g} j^\nu d\sigma_\nu = \text{const}. \quad (14.2.6)$$

Заметим, что в данном случае интегрируется не тензорная величина, а скаляр  $j^\nu n_\nu$ , т. е. вектор тока, свернутый с нормалью к гиперповерхности. В качестве нормали может выступать монада  $n_\nu = \tau_\nu$  в кинематической калибровке.

3. На отсутствие законов сохранения энергии, импульса или момента импульса в ОТО можно взглянуть с позиций симметрий пространственно-временного многообразия. Обычно в плоском пространстве-времени эти законы связываются соответственно с однородностью времени, пространства или с изотропией пространства. В общем случае искривленных многообразий свойства симметрии необходимо трактовать на языке векторов Киллинга, но, как уже отмечалось, в самом общем случае векторы Киллинга могут отсутствовать.

В частных метриках, обладающих векторами Киллинга, можно ввести соответствующие им законы сохранения. Действительно, пусть в рассматриваемом искривленном пространстве-времени имеется вектор Киллинга  $\xi_\mu$ . Построим вектор  $P^\nu = T^{\mu\nu}\xi_\mu$ . Согласно (14.2.3) и уравнениям Киллинга (4.3.10), этот вектор удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}\nabla_\nu P^\nu &= (\nabla_\nu T^{\mu\nu})\xi_\mu + T^{\mu\nu}(\nabla_\nu \xi_\mu) = \\ &= \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu) = 0,\end{aligned}\quad (14.2.7)$$

т. е. имеем свойство  $P^\nu$ , аналогичное (14.2.5) для вектора плотности тока. Отсюда следует закон сохранения. Если вектор Киллинга  $\xi_\nu$  времени-подобен, то можно говорить о законе сохранения энергии, если он пространственно-подобен — о законе сохранения импульса или момента импульса. При отсутствии векторов Киллинга нет смысла говорить о законах сохранения энергии и импульса.

Исходя из изложенного, можно констатировать, что **при решении корректно поставленных задач в рамках парадигмы ОТО нет проблем, вызванных отсутствием законов сохранения**. Для конкретно заданной классической системы можно при помощи уравнений Эйнштейна рассчитать метрику пространства-времени, посредством уравнений геодезических линий (уравнений движения) найти движение отдельных тел в этой метрике и с помощью монадного метода проинтерпретировать полученные результаты в используемой системе отсчета, в том числе и получить значения энергии и импульса рассматриваемой *материальной системы*.

По вопросу законов сохранения энергии-импульса в геометрофизике (в ОТО) можно утверждать следующее:

- 1) Оставаясь в рамках парадигмы ОТО, можно игнорировать отсутствие законов сохранения названных величин. Их отсутствие не следует трактовать как нарушение этих законов, а означает лишь потерю их смысла.

- 2) Разумно анализировать такие ситуации, когда в рамках ОТО можно говорить о законах сохранения энергии или импульса, т. е. когда пространство-время обладает соответствующими векторами Киллинга.
- 3) Проблемы возникают лишь при попытках решения некорректно поставленных задач в ОТО, как правило, обусловленных смешением понятий и принципов из разных метафизических парадигм. В этих случаях иногда может оказаться удобным использование неких вспомогательных понятий, соответствующих энергии и импульсу «гравитационного поля», однако при этом не следует забывать об их условном характере, не переносимом автоматически за пределы условий решаемой задачи.

### 14.2.2. Критика псевдотензорного подхода

Энергия и импульс являются важнейшими понятиями физики и занимают важное место в триалистической и дуалистической теоретико-полевой парадигмах вследствие законов их сохранения. Отсутствие этих законов в искривленном пространстве-времени, по мнению многих физиков, вызывает ряд трудностей, в частности при описании явлений квантовой теории или ожидаемых гравитационных волн, поэтому значительные усилия исследователей были нацелены на введение энергии и импульса гравитационного поля, что позволило бы, наперекор изложенному, оставить в геометрической парадигме законы сохранения этих величин. Естественно, что речь могла идти лишь о некоем подобии понятий энергии и импульса, описываемом так называемым псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Обсудим суть данного направления исследований и некоторые варианты решения, вызывавшие в свое время большой интерес.

#### I. Суть псевдотензорного подхода

Псевдотензорный подход основан на следующем широко используемом приеме в теоретической физике. Известно, что в ньютоновой механике в общем случае не сохраняется кинетическая энергия  $T$  механической системы. Однако закон сохранения энергии удастся «спасти», введя потенциальную энергию  $U$  материальных объектов так, что

$$\frac{d(T + U)}{dt} = 0. \quad (14.2.8)$$

Эйнштейн и ряд других авторов в свое время предложили аналогичный метод в искривленном пространстве-времени: следует требовать сохранения энергии и импульса  $P^\mu$  материи вместе с дополнительным членом  $p^\mu$ , понимаемым как энергия-импульс гравитационного поля. Тогда вместо (14.2.1) следует писать:

$$\frac{\partial \tilde{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv \frac{\partial (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 0, \quad (14.2.9)$$

где нетензорный добавок  $t^{\mu\nu}$  называют *псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля*. Очевидно, что  $t^{\mu\nu}$  не может быть тензором, так как действие нетензорного оператора  $\partial/\partial x^\nu$  на тензорную величину не дает тензора.

Разберемся, что означает величина  $t^{\mu\nu}$ . Для этого перепишем уравнения Эйнштейна в форме

$$\frac{(-g)^N}{\kappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = (-g)^N T^{\mu\nu}, \quad (14.2.10)$$

где  $N$  — целое или полуцелое число, и разобьем левую часть на два слагаемых:

$$\frac{(-g)^N}{\kappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \Theta^{\mu\nu} - (-g)^N t^{\mu\nu}. \quad (14.2.11)$$

Соотношение вида (14.2.9) выполняется, если  $\Theta^{\mu\nu}$  имеет вид:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial h^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda}, \quad (14.2.12)$$

где  $h^{\mu\nu\lambda} = -h^{\mu\lambda\nu}$  — так называемый *суперпотенциал гравитационного поля*. Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial h^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g)^N (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0, \quad (14.2.13)$$

т. е. формально получена нужная форма закона сохранения энергии-импульса.

Казалось бы, проблема с законами сохранения решена, однако введение таких величин вызывает ряд новых проблем. Прежде всего, это неоднозначность. Можно построить счетное множество симметричных

псевдотензоров эйнштейновского типа, используя в качестве суперпотенциалов выражения вида [47]:

$$h_{\mu\cdot}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)^N (g_\mu^\nu g^{\lambda\alpha} - g_\mu^\lambda g^{\nu\alpha})], \quad (14.2.14)$$

где, как отмечалось,  $N$  — любое целое или полуцелое число. Спрашивается, какое значение  $N$  нужно предпочесть? Различные авторы предлагали свои способы выбора  $N$ . Рассмотрим несколько из них.

## II. Варианты псевдотензоров энергии-импульса

- 1) *Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля Эйнштейна* определяется посредством специального способа превращения «лишнего» слагаемого в (14.2.3) в обычную дивергенцию. Исходя из выражения:

$$\sqrt{-g} T_{\mu;\nu}^\nu = \frac{\partial(\sqrt{-g} T_\mu^\nu)}{\partial x^\nu} - \sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu, \quad (14.2.15)$$

Эйнштейн предложил преобразовать последний член, пользуясь своими уравнениями, т. е.

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\nu &= -\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (R_\alpha^\nu - \frac{1}{2} g_\alpha^\nu R) = \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} (R^{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} R). \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

Далее был использован тот факт, что в метрической лагранжевой формулировке ОТО уравнения Эйнштейна могут быть получены действием оператора Эйлера—Лагранжа на плотность лагранжиана (5.2.12), что позволяет записать (14.2.16) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r))}{\partial g_{\nu\sigma}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r))}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right) \right] = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r))}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r))}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[ g_\mu^\alpha (\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r)) - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}(g_r))}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} t_\mu^\alpha). \end{aligned} \quad (14.2.17)$$

Отсюда находится псевдотензор Эйнштейна в виде

$$t_\mu^\nu = \frac{1}{2\kappa \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{g_{\mu\sigma}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)(g^{\alpha\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\alpha})] \right). \quad (14.2.18)$$

Ему соответствует суперпотенциал

$$h_{\mu\cdot}^{\nu\lambda} = \frac{g_{\mu\sigma}}{2\kappa\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)(g^{\alpha\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma}g^{\nu\alpha})], \quad (14.2.19)$$

а закон сохранения записывается следующим образом (при  $N = 1/2$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g}T_\mu^\nu + \sqrt{-g}t_\mu^\nu) = 0. \quad (14.2.20)$$

- 2) *Псевдотензор Ландау и Лифшица* [94] был выведен, исходя из предположения о преимущественном характере локально-геодезической координатной системы. Было показано, что в этой координатной системе левая часть уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) &= \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[ \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})) \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(-g)} \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} h^{\mu\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (14.2.21)$$

Поскольку  $h^{\mu\nu\lambda}$  антисимметрично по индексам  $\nu$  и  $\lambda$ , было предложено выбрать эту величину в качестве суперпотенциала гравитационного поля. Очевидно, что в другой координатной системе соотношение (14.2.21) не выполняется. Авторы предложили считать добавочные выражения псевдотензором гравитационного поля. Следовательно, суперпотенциал и псевдотензор гравитационного поля в подходе Ландау и Лифшица имеют вид:

$$h^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})); \quad (14.2.22)$$

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa(-g)} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})). \quad (14.2.23)$$

Закон сохранения записывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0. \quad (14.2.24)$$

Эти выражения в общем случае отличаются от эйнштейновских.

- 3) В литературе анализировался *псевдотензор*, предлагавшийся независимо *К. Меллером*, *Н. В. Мицкевичем* [112] и *Э. Шрёдингером*,

$$t_\mu^\nu = \frac{1}{2\kappa\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} [\sqrt{-g}(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})g^{\nu\beta}g^{\lambda\alpha}]. \quad (14.2.25)$$

- 4) Обсуждались и иные варианты псевдотензоров: *Папанетру* и ряда других авторов.



### III. Несостоятельность псевдотензорного подхода

После получения псевдотензора Эйнштейна казалось, что проблема энергии-импульса гравитационного поля решена, однако вскоре Э. Шредингер и Бауэр показали, что энергия гравитационного поля, вычисляемая при помощи этого псевдотензора, изменяется при чисто пространственных преобразованиях координат, что естественно, поскольку псевдотензор не является тензором. Более того, Бауэр показал, что источник метрики Шварцшильда в сферических координатах обладает бесконечно большой энергией, вычисленной на основе псевдотензора Эйнштейна. Этот результат вошел в литературу под названием «парадокса Бауэра». Сложившаяся ситуация побудила поиски других выражений для псевдотензора гравитационного поля.

Однако и другие псевдотензоры обладали теми же недостатками. Было выполнено множество работ, в которых на конкретных примерах была продемонстрирована несостоятельность различных вариантов псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля (например, см. [98]).

В группе Н. В. Мицкевича был получен еще более разительный результат — было показано, что, если взять метрику пространства-времени Минковского, где заведомо отсутствует гравитационное поле, записать ее в некоей криволинейной координатной системе и подставить ее в псевдотензор, например Эйнштейна, можно получить отличный от нуля результат для «энергии» гравитационного поля.

Наконец, в 60-х годах К. Меллер сформулировал 5 условий [103], которым должен удовлетворять искомый псевдотензор гравитационного поля:

- 1) Плотность (веса 1) псевдотензора  $\bar{t}_\mu^\nu \equiv \sqrt{-g}t_\mu^\nu$  должна алгебраически выражаться через компоненты метрики и их производные.
- 2) Должен иметь место (слабый) закон сохранения  $\partial(\bar{t}_\mu^\nu)/\partial x^\nu = 0$ .
- 3) При чисто пространственных преобразованиях координат  $\bar{t}_\mu^\nu$  должно вести себя как плотность 4-вектора, т. е. должен отсутствовать парадокс Бауэра.
- 4) При преобразованиях координат, сводящихся к тождественным преобразованиям вдали от островной системы, интегральная величина  $P_\mu = \int \bar{t}_\mu^0 d^3x$  не должна изменяться.
- 5) Для островной системы в системе центра масс интегральный вектор энергии-импульса  $P_\mu$  должен иметь вид  $P_\mu = \{Mc^2, 0, 0, 0\}$ , где  $M$  — полная масса системы.

Эти условия должны были исключить возможность упомянутых нелепых результатов. Меллер же доказал теорему, что *из компонент*

метрического тензора и их производных в принципе невозможно построить комплекс величин, удовлетворяющих всем сформулированным требованиям (см. также [104]).

Несмотря на то, что все упомянутые исследования проводились как бы в рамках ОТО, они были нацелены на достижение цели, диктуемой иной метафизической парадигмой.

### 14.3. Системы отсчета и законы сохранения

Как уже отмечалось, монадный метод описания системы отсчета позволяет в каждой точке выделить из тензорной плотности тензора энергии-импульса материи  $T_{\mu\nu}$  плотность наблюдаемой энергии  $\rho$  и плотность модуля полного импульса  $P$ :

$$\rho = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu; \quad \tilde{P}^\alpha = -h_\mu^\alpha\tau_\nu T^{\mu\nu}; \quad P = \sqrt{-h_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta}. \quad (14.3.1)$$

Монадный метод позволяет также для пространственно-подобного сечения используемой системы отсчета найти суммарное значение энергии материи, так как определенная выше плотность энергии является скаляром, а перенос скаляра не зависит от пути. Если система отсчета нормальная, то имеется семейство пространственно-подобных гиперповерхностей, ортогональных конгруэнции ее мировых линий. Для любой такой гиперповерхности

$$E = \int \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\tau_\nu d\sigma_\mu \equiv \int \sqrt{-g}P^\mu d\sigma_\mu. \quad (14.3.2)$$

#### 14.3.1. Монадные векторы энергии грави-инерциального поля

1. В общем случае полная энергия материи, определенная согласно (14.3.2), не обязана сохраняться. Предпринимались попытки спасти закон сохранения энергии в рамках монадного метода, руководствуясь принципами, схожими с псевдотензорным подходом, т. е. добавлением к энергии материи некоторого выражения. Проанализируем этот подход.

Для описания только закона сохранения энергии следует использовать четыре (а не 10, как в разд. 14.2) уравнения Эйнштейна

$$\frac{\tau_\mu}{\varkappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = T^{\mu\nu}\tau_\mu \equiv P^\nu, \quad (14.3.3)$$

где  $P^\nu$  — 4-вектор энергии материи. Разобьем левую часть этих уравнений на два векторных слагаемых

$$\frac{\tau_\mu}{\varkappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = \Theta^\nu - p^\nu, \quad (14.3.4)$$

где

$$\Theta^\nu = \mathcal{F}^{\nu\mu}_{;\mu}. \quad (14.3.5)$$

Здесь тензор  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  играет роль суперпотенциала в псевдотензорном подходе; он антисимметричен  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\mathcal{F}^{\nu\mu}$ . Вследствие соотношения

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (14.3.6)$$

имеем закон сохранения

$$\nabla_\nu \Theta^\nu = \nabla_\nu (P^\nu + p^\nu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{-g} (P^\nu + p^\nu)] = 0, \quad (14.3.7)$$

где настоящий вектор  $p^\nu$  является аналогом псевдотензора гравитационного поля. Сохраняющейся величиной является

$$\tilde{E} = \int \sqrt{-g} (P^\nu + p^\nu) d\sigma_\nu. \quad (14.3.8)$$

2. Рассмотрим конкретную реализацию этой процедуры [56], выбрав в качестве монадного суперпотенциала выражение

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} (\tau_{\nu,\mu} - \tau_{\mu,\nu}) = \frac{1}{\varkappa} (-2\omega_{\mu\nu} - a_\mu \tau_\nu + a_\nu \tau_\mu). \quad (14.3.9)$$

Учитывая монадный вид проекций уравнений Эйнштейна (3.5.24) и (3.5.25), из (14.3.4) находим проекции вектора  $p^\nu$  в вакууме:

$$p(0) = p^\nu \tau_\nu = \frac{1}{\varkappa} (\omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta} + a_\alpha a^\alpha - \partial_T d); \quad (14.3.10)$$

$$\tilde{p}_\sigma = -h_{\sigma\nu} p^\nu = \frac{1}{\varkappa} [\tilde{\nabla}_\nu (d^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma + h^\nu_\sigma d) + h_{\nu\sigma} (\partial_T - d) a^\nu]. \quad (14.3.11)$$

Отсюда видно, как добавок  $p(0)$  в сохраняющемся обобщенном выражении для энергии (14.3.10) строится из физико-геометрических тензоров, характеризующих систему отсчета. В частности, в него входят квадратично тензоры угловой скорости вращения и ускорения системы отсчета. Переходя от одной системы отсчета к другой, можно в широких пределах изменять величины (14.3.10) и (14.3.11). По этой причине величину  $p^\nu$  правильнее назвать *вектором энергии грави-инерциального поля*.

3. Особенно рельефно проявляется суть вектора  $p^\nu$  в вакууме в киллинговых системах отсчета:

$$p(0) = \frac{1}{\varkappa} (\omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + a_\alpha a^\alpha); \quad \tilde{p}_\sigma = \frac{1}{\varkappa} (\tilde{\nabla}_\nu \omega^\nu_\sigma - \partial_T a_\sigma). \quad (14.3.12)$$

Данное выражение для плотности энергии грави-инерциального поля в киллинговых системах отсчета очень напоминает плотность энергии

электромагнитного поля (5.3.12), записанную через компоненты электрической и магнитной напряженностей.

4. В метрике Шварцшильда в покоящейся системе отсчета плотность энергии гравитационного поля имеет вид:

$$p(0) = \frac{1}{\varkappa} a_\alpha a^\alpha = -\frac{M^2 G}{8\pi r^4} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \simeq -\frac{g^2}{8\pi G}, \quad (14.3.13)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

5. Из изложенного видно, что монадный подход обладает рядом преимуществ по сравнению с псевдотензорным:

- 1) В нем удастся ввести истинные скаляры для выражения энергии гравитационного поля, для которых корректно определена операция интегрирования.
- 2) Скалярные плотности энергии строятся из монадных физико-геометрических тензоров, т. е. получающиеся величины допускают корректную интерпретацию.
6. Однако следует констатировать, что монадный подход не решает задачи введения физической сохраняющейся величины типа энергии по следующим причинам.

- 1) Введенная выше плотность энергии гравитационного поля  $p(0)$  может быть отличной от нуля даже в плоском пространстве-времени в неинерциальной системе отсчета.
- 2) Как и в случае псевдотензорного подхода, встает проблема неоднозначности энергии гравитационного поля. Имеется бесконечное число способов определения монадного вектора энергии гравитационного поля, отличающихся выбором тензора суперпотенциала  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ . В общем случае можно выбрать величину

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} [a_{01}\omega_{\mu\nu} + c_{02}(\tau_\mu a_\nu - \tau_\nu a_\mu) + c_{03}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda d_\nu^\lambda - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda d_\mu^\lambda) + c_{04}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda \omega_{\nu}^\lambda - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \omega_{\mu}^\lambda) + c_{05}(\tau_\mu \partial_T a_\nu - \tau_\nu \partial_T a_\mu) + c_{06}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\nu d - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\mu d) + \dots]. \quad (14.3.14)$$

Здесь под многоточием следует понимать выписанные слагаемые, умноженные на  $d$  с некими коэффициентами  $c_{1s}$ , затем те же слагаемые, умноженные на  $a_\alpha a^\alpha$  с коэффициентами  $c_{2s}$  и т. д. Итого, в общем случае имеем бесконечно много возможностей.

Использованное выше определение представляет собой частный случай, когда  $c_{01} = -2$ ,  $c_{02} = 1$ , а остальные коэффициенты равны нулю.

- 3) Легко понять, что все таким образом определенные плотности энергии гравитационного поля соответствуют введению наряд-

ду с реальной материей еще фиктивного «материального» поля (инерции) с плотностью  $\rho \sim 1/\varkappa$ , заполняющего все пространство. При формальном изменении системы отсчета плотность фиктивной материи остается прежней, но меняются характеристики системы отсчета, что в физическом плане означает генерирование или уничтожение материи, не вызванное никакими физическими процессами.

Положение можно было бы исправить, материализовав систему отсчета, т. е. связав ее с обычными видами материи, как это имеет место в случае выбора сопутствующей материи системы отсчета в метриках Фридмана. Но эта ситуация, по определению, диктует использование тензора энергии-импульса материи  $T_{\mu\nu}$ .

- 4) В метафизическом плане данная ситуация ничем не лучше, нежели в псевдотензорном подходе. По-прежнему, предлагается ввести физически значимую величину, опираясь на характеристики лишь части используемых категорий. Отличие состоит лишь в том, что задачу предлагается решать, используя более узкую характеристику искривленного пространства-времени, связанную с вектором  $\tau_\mu$ .

### 14.3.2. Тетрадные комплексы энергии-импульса

1. Когда возникает необходимость одновременно рассматривать вопрос о сохранении энергии и импульса вдоль выделенного направления, целесообразно использовать диадный метод. Диада  $\tau^\mu, l^\mu$  позволяет производить интегрирование в 3-мерных пространственно-подобных сечениях используемой системы отсчета скалярных величин:  $P(0) = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$  — плотности энергии материи и  $P(1) = T^{\mu\nu}l_\mu\tau_\nu$  — плотности импульса материи вдоль направления  $l^\mu$ .

Если же нужно рассмотреть вопрос об определении или о сохранении энергии и проекций импульса материи по всем трем ортогональным пространственным направлениям, то следует использовать тетрадный метод, где плотности энергии и импульса материи определяются симметричным образом:

$$P(\alpha) = T^{\mu\nu}g_\mu(\alpha)g_\nu(0) \equiv T^{\mu\nu}g_\mu(\alpha)\tau_\nu. \quad (14.3.15)$$

2. Для получения аналогов законов сохранения энергии и проекций импульса в симметричном виде опять можно воспользоваться методикой, изложенной выше. Уравнения Эйнштейна представляются в форме:

$$\frac{g_\nu(\alpha)}{\varkappa} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right) = \Theta^\mu(\alpha) - t^\mu(\alpha) = T^\mu(\alpha), \quad (14.3.16)$$

где  $T^\mu(\alpha) = T^{\mu\nu} g_\nu(\alpha)$ ;  $t^\mu(\alpha)$  — четыре вектора, составляющие комплекс энергии-импульса гравитационного поля;  $\Theta^\mu(\alpha)$  — совокупность из четырех векторов, представимых в виде:

$$\Theta^\mu(\alpha) = \mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha)_{;\nu}, \quad (14.3.17)$$

где  $\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha) = -\mathcal{F}^{\nu\mu}(\alpha)$ .

Законы сохранения следуют из соотношения

$$\nabla_\mu \Theta^\mu(\alpha) = \nabla_\mu (T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} (T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha))), \quad (14.3.18)$$

а сохраняющаяся величина записывается симметрично для всех значений индекса в круглых скобках

$$p(\alpha) = \int \sqrt{-g} (T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)) d\sigma_\mu. \quad (14.3.19)$$

3. В тетрадном методе опять существует бесконечно много тетрадных комплексов энергии-импульса гравитационного поля. Они определяются видом антисимметричного тензора  $\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha)$ . Укажем несколько из них.

- 1) *Тетрадный комплекс Б. Н. Фролова* [177] наиболее непосредственно обобщает рассмотренное выше монадное определение энергии гравитационного поля. В качестве  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha)$  выбирается выражение

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{\varkappa} (g_\nu(\alpha)_{;\mu} - g_\mu(\alpha)_{;\nu}) = \frac{2}{\varkappa} C_{\mu\nu}(\alpha), \quad (14.3.20)$$

где  $C_{\mu\nu}(\alpha)$  — введенные в (6.2.27) объекты неголономности. Очевидно, что при  $\alpha = 0$  имеем  $g_\nu(0) = \tau_\nu$  и (14.3.20) совпадает с (14.3.9).

Соответствующий тетрадный комплекс энергии-импульса имеет вид:

$$t^\mu(\alpha) = \frac{2}{\varkappa} \nabla_\nu C^{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{\varkappa} \nabla_\nu (\Delta^{\mu,\nu}_{(\alpha)} - \Delta^{\nu,\mu}_{(\alpha)}), \quad (14.3.21)$$

где  $\Delta_\mu(\alpha\beta)$  — коэффициенты вращения Риччи.

- 2) *Тетрадный комплекс Родичева* [138] соответствует выбору

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\alpha) = \frac{2}{\varkappa} \Delta(\alpha)_{\mu\nu}, \quad (14.3.22)$$

тогда комплекс энергии-импульса записывается в виде

$$t^\mu(\alpha) = \frac{2}{\varkappa} \nabla_\nu \Delta(\alpha)^{\mu\nu}. \quad (14.3.23)$$

Можно указать счетное множество других тетрадных комплексов энергии-импульса. Все они оказываются несостоятельными по пе-

речисленным выше причинам для случая вектора энергии гравитационного поля. Касаясь истории данных исследований, отметим, что в 70–80-х годах ряд авторов формулировал необходимые требования к тетрадным комплексам энергии-импульса, аналогичные требованиям Меллера к псевдотензорам (см., например, [156]). Доказывались теоремы, что на основе тетрадных комплексов такого рода невозможно решить поставленную физическую задачу.

### 14.3.3. Определения грави-инерциальной суперэнергии

Для полноты обсуждения данной проблемы отметим, что предлагались способы преодоления того недостатка, что монадные векторы энергии гравитационного поля могут оказаться отличными от нуля даже в плоском пространстве-времени, когда о гравитационном поле нет смысла говорить. Была предложена совокупность монадных (и тетрадных) векторов, которые в плоском пространстве-времени обращаются в нуль. Приведем ряд примеров такого рода.

1. Пусть

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (14.3.24)$$

где в качестве антисимметричного тензора  $f^{\alpha\beta} = -f^{\beta\alpha}$  можно использовать любой тензор  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$  из (14.3.14). Тогда монадный вектор энергии определяется выражением

$$p^\mu = \frac{1}{\varkappa} \nabla_\nu (R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} f^{\alpha\beta}). \quad (14.3.25)$$

Используя тождества Бианки,  $p^\mu$  можно представить в виде

$$p^\mu = \frac{1}{\varkappa} (R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;\nu} + f^{\alpha\beta} (R^{\mu}_{\alpha;\beta} - R^{\mu}_{\beta;\alpha})). \quad (14.3.26)$$

С помощью уравнений Эйнштейна тензор Риччи справа можно выразить через тензор энергии-импульса материи, тогда плотность сохраняющейся величины будет описываться выражением

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\mathcal{E} = \sqrt{-g} \left[ T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu + f^{\alpha\beta} \left( T^{\mu}_{\alpha;\beta} - T^{\mu}_{\beta;\alpha} + \frac{1}{2} (g^{\mu}_{\alpha} g^{\sigma}_{\beta} - g^{\mu}_{\beta} g^{\sigma}_{\alpha}) T_{,\sigma} \right) \tau_\mu + \right. \\ \left. + \frac{\tau_\mu}{\varkappa} R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;\nu} \right]. \quad (14.3.27) \end{aligned}$$

Если совокупность членов, содержащих тензор энергии-импульса материи, назвать *плотностью суперэнергии материи*, то последний член

$$\sqrt{-g}\tilde{p}(0) \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa} \tau_\mu R^{\mu\nu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;\nu} \quad (14.3.28)$$

следует назвать *плотностью суперэнергии грави-инерциального поля*.

2. Отметим частный случай, когда

$$f^{\alpha\beta} = a(F^{\alpha\tau\beta} - F^{\beta\tau\alpha}), \quad (14.3.29)$$

где  $a$  — постоянная, тогда

$$\sqrt{-g}\tilde{p}(0) = \frac{2a\sqrt{-g}}{\varkappa} (-X^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_{\beta}a_{\alpha} + Y^{\gamma\alpha\beta}a_{\beta}(d_{\alpha\gamma} + \omega_{\gamma\alpha})), \quad (14.3.30)$$

где  $X^{\alpha\beta}$  и  $Y^{\gamma\alpha\beta}$  — проекции тензора Римана—Кристоффеля, определенные в (3.5.28)–(3.5.29).

3. Не вдаваясь в подробности, укажем *тетрадное обобщение векторов суперэнергии-импульса*. По аналогии с (14.3.24) определим

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}(\alpha) = \frac{1}{\varkappa} R^{\mu\nu}{}_{\dots\sigma\beta} f^{\sigma\beta}(\alpha), \quad (14.3.31)$$

где в качестве  $f^{\sigma\beta}(\alpha)$  можно взять, в частности, выражения (14.3.20) или (14.3.22). В результате получим плотности четырех сохраняющихся величин:

$$\sqrt{-g}\tilde{p}(\alpha) = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa} R^{\mu\nu}{}_{\dots\sigma\beta} f^{\sigma\beta}(\alpha)_{;\nu} g_{\mu}(0). \quad (14.3.32)$$

4. В работе [149, с. 205] тензор  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  был выбран в виде

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} R^{\mu\nu}{}_{\dots\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (14.3.33)$$

где дуальный тензор кривизны  $R^{\alpha\beta\mu\nu}$  определен в (5.5.17). Используя тождества Бианки в виде  $R_{\alpha\beta\lambda\sigma;\nu}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$  и выбирая в качестве  $f^{\alpha\beta}$  (14.3.29), находим для плотности суперэнергии гравитационного поля выражение

$$\sqrt{-g}\tilde{p}^*(0) = -\frac{a\sqrt{-g}}{\varkappa} (Y^{\alpha}{}_{\lambda\sigma}\tilde{\nabla}_{\nu}a_{\alpha} - Z^{\alpha\beta\lambda\sigma}(d_{\nu}^{\beta} + \omega_{\nu}^{\beta})a^{\alpha}), \quad (14.3.34)$$

где проекция тензора Римана—Кристоффеля  $Z_{\alpha\beta\lambda\sigma}$  определена формулой (3.5.27).

5. Заметим, что в ряде работ обсуждался под названием суперэнергии гравитационного поля (или тензора суперэнергии Беля—Робинсона) принципиально иная величина, построенная исключительно из компонент тензора Римана—Кристоффеля:

$$T^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( R^{\alpha\tau\mu\sigma} R^{\beta\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma} + R^{\alpha\tau\mu\sigma} R^{\beta\cdot\nu}{}_{\tau\cdot\sigma} \right). \quad (14.3.35)$$

Это выражение примечательно в двух отношениях.

- 1) Тензор суперэнергии в последней форме имеет такой же вид, как и тензор энергии-импульса электромагнитного поля, записанный в форме (5.1.6).
- 2) Для тензора суперэнергии имеет место дифференциальный «закон сохранения»

$$\nabla_{\mu} T^{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (14.3.36)$$

Однако это выражение, как и  $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ , не означает сохранения какой бы то ни было физической величины.



## 14.4. Проблема гравитационных волн

Другой проблемой ОТО (геометрофизики) метафизического характера является проблема гравитационных волн. Она привлекала пристальное внимание физиков в течение всего XX в. По этой теме было выполнено много теоретических исследований, были затрачены большие средства на попытки экспериментального обнаружения гравитационных волн, однако проблема так и не была решена. Это заставляет обратиться к метафизическому анализу постановки задачи и попробовать взглянуть на суть данной проблемы с максимально общих позиций.

Анализируя сложившееся понимание проблемы гравитационных волн можно обнаружить, что в его основе лежат предпосылки, навеянные аналогиями со свойствами электромагнитного взаимодействия в рамках 4-мерной теории, но, как показано в гл. 5, с позиций 4-мерия следует различать несколько видов аналогий между теориями гравитации и электромагнетизма. Чаще всего подразумеваются аналогии компонент метрического тензора (4-мерного  $g_{\mu\nu}$  или 3-мерного  $h_{ik}$ ) с компонентами электромагнитного векторного потенциала  $A_\mu$ . В ряде работ полагалось, что более корректным является сопоставление компонент тензора кривизны  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  с компонентами тензора напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Но имеется и вариант сопоставления тензора кривизны с квадратом тензора электромагнитного поля.

Оперевшись на одну из аналогий, далее полагают, что компоненты метрического тензора (или тензора кривизны) представляют собой лишь разновидность известных физических полей. При этом вскрытые ОТО геометрические свойства пространства-времени воспринимаются в качестве информации, позволяющей записать вид лагранжиана гравитационного поля, существующего наравне с другими полями. Далее обращаются с гравитационным полем по всем правилам, принятым в теории поля. Этот шаг имеет явно метафизический характер, причем, сделав его, рассуждения уже проводят на основе триалистической (или дуалистической теоретико-полевой) парадигмы.

В рамках многомерной теории метод аналогий гравитации и физических полей возможен в редукционистском подходе к многомерной метрике. Однако имеется и холистический подход, согласно которому многомерный метрический тензор представляет собой единое целое, а гравитационное взаимодействие является специфическим проявлением физических взаимодействий. Этот подход к сущности теории гравитации не означает противоречия с ОТО, а лишь подсказывает, как использовать геометрические понятия в физической теории.

С позиций холистического подхода имеет смысл понятие волновых грави-инерциальных процессов (полей), однако лишь как сопутствующее, например, электромагнитным явлениям. При этом то, что принято трактовать как энергия-импульс гравитационной волны, теперь следует понимать как дополнительные вклады в энергию и импульс, переносимые электромагнитным излучением.

#### 14.4.1. Трудности общепринятой трактовки гравитационных волн

Нарушение метафизических принципов в виде некорректно поставленных задач в рамках используемой парадигмы неизбежно проявляется через непреодолимые математические трудности, встающие на пути исследователя, который, справившись с решением одной математической проблемы, как правило, встречается с еще более сложной.

Так обстояло дело при введении законов сохранения энергии-импульса в ОТО, нечто аналогичное наблюдается при попытках введения гравитационных волн в указанном выше смысле.

Перечислим главные **математические и физические трудности**, которые в конце концов являются следствиями нарушения метафизических принципов в понимании сущности гравитационных волн.

- 1) Проблема гравитационных волн оказывается тесно связанной с проблемой энергии-импульса гравитационного поля, поскольку так или иначе введенные гравитационные волны (с заложенной в них трактовкой) должны обладать энергией-импульсом. Как уже отмечалось, сложности в определении энергии-импульса гравитационного поля связаны с попытками нарушения метафизического принципа целостности в описании физических понятий. При сопутствующем характере гравитационной волны целостность восстанавливается и понятие энергии-импульса волнового процесса приобретает смысл.
- 2) Электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла, а ожидаемые гравитационные волны — существенно нелинейными уравнениями Эйнштейна. Как известно, в случае нелинейных уравнений отсутствует принцип суперпозиции, типичный для волновых решений. Это влечет за собой математические трудности в определении критерия, позволяющего отделить волновые решения от неволновых, чем занимались многие исследователи.
- 3) При описании электромагнитных или иных волновых процессов важную роль играют динамические степени свободы, т. е. величи-

ны, непосредственно описывающие волну и ее поляризации. Так, в случае электромагнитного излучения таковыми являются две поперечные (относительно направления распространения волны) компоненты векторного потенциала. Для ожидаемых гравитационных волн *в общем случае* не удастся корректно выделить динамические степени свободы.

- 4) Так или иначе вводимое гравитационное излучение обладает качественно иными свойствами по сравнению с электромагнитными волнами. Поскольку электромагнитные волны воздействуют лишь на электрически заряженные тела, их можно обнаружить, сравнивая поведение заряженных объектов с нейтральными. В случае гравитационных волн подобное сравнение исключено. Теперь мы имеем дело с искривлением самого пространства-времени, что означает одинаковые возмущения (смещения) в данном месте всех объектов. Ищутся специальные приемы, которые позволили бы заметить проявления таких универсальных воздействий.
- 5) В ОТО реализовано глубокое единство гравитации и инерции. По сути дела изучаются не чисто гравитационные, а грави-инерциальные процессы, описываемые кинематическими характеристиками системы отсчета. Своеобразие ситуации состоит в том, что в искривленном пространстве-времени принципиально нельзя различить, что описывает инерцию, а что — чистую гравитацию. По этой причине правильнее говорить не о гравитационных волнах, а о *грави-инерциальных волновых процессах*.
- 6) Как показывают оценки, в реальных ситуациях гравитационные волны настолько слабы, что пока не могут быть обнаружены современными приборами. Ведущиеся экспериментальные поиски рассчитаны на сверхмощные источники, главным образом, гипотетической природы. Фактически обсуждаются явления, лежащие далеко за пределами возможностей эксперимента, что позволяет довольно долго сохраняться тем или иным иллюзиям. В этих условиях правильный путь могут подсказать лишь соображения метафизического характера.

Следует выделить **три главных направления исследований грави-инерциальных волновых процессов**.

- а) *Алгебраический подход*, опирающийся на алгебраическую классификацию Петрова пространств Эйнштейна.
- б) *Референционный анализ грави-инерциальных волновых процессов*, тесно связанный с методами описания систем отсчета.
- в) *Подход на основе линеаризованной теории гравитации* (анализ слабых гравитационных волн).

### 14.4.2. Алгебраический подход к определению гравитационных волн

В 60-х–70-х годах в связи с открытием алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна сразу же встал вопрос о физическом смысле пространств различных алгебраических типов и подтипов. Была высказана идея, поддержанная многими исследователями, что некоторые алгебраически специальные типы метрик описывают волновые решения уравнений Эйнштейна. Это побудило поиск алгебраических критериев гравитационных волн. Законность постановки такой проблемы обосновывалась рядом указанных в гл. 5 аналогий теорий гравитации и электромагнитного поля, в частности, в связи с алгебраическими свойствами электромагнитных волн и с классификацией электромагнитных полей, изложенной в гл. 5.

#### 1. Алгебраические критерии гравитационных волн

Алгебраическая классификация пространств Эйнштейна значительно сложнее, нежели электромагнитных полей. Теперь пришлось иметь дело с 6 подтипами метрик. Подтип  $D$  сразу же исключался, поскольку к нему принадлежит, в частности, метрика Шварцшильда. Основное внимание было обращено на метрики типов  $T_2$  и  $T_3$  по Петрову. Чтобы остановиться на каком-то варианте, следовало опереться на какие-то дополнительные соображения. Разные авторы, сопоставляя различные стороны электродинамики со свойствами искривленных пространств, предлагали ряд критериев гравитационных волн. Их набралось более десятка. Некоторые из них оказались эквивалентными, отличаясь лишь терминологией. Интересно отметить, что подавляющая часть критериев имеет общую область пересечения. Назовем наиболее известные критерии (см. [64]) в порядке сужения множества пространств, удовлетворяющих им.

1. Согласно критерию *Пирани*, в вакууме волновыми являются все метрики, принадлежащие подтипам  $II$ ,  $N$  или  $III$ . Критерию Пирани эквивалентен *первый критерий Беля*, который связан с монадным методом. Согласно этому критерию, в окрестности произвольной точки пустого пространства-времени существуют гравитационные волны, если для любого единичного времени-подобного вектора  $\tau^\mu$  в этой точке вектор потока суперэнергии (14.3.35) отличен от нуля:

$$P^\alpha = -h_\sigma^\alpha \tau_\beta \tau_\lambda \tau_\mu T^{\sigma\beta\lambda\mu} \neq 0. \quad (14.4.1)$$

Если  $P^\alpha = 0$ , то гравитационные волны в окрестности данной точки отсутствуют.

2. Все пространства подтипов  $N$  и  $III$  удовлетворяют *второму критерию гравитационных волн Беля*. Его можно сформулировать на языке инвариантов из тензора Римана—Кристоффеля: пространства предлагается считать волновыми, если обращаются в нуль все четыре фундаментальных скаляра (4.5.33). В противном случае свободные гравитационные волны отсутствуют. Этому критерию эквивалентны *критерий Дебеве*, сформулированный на языке уравнений Беля (4.5.39) для данных подтипов, и *критерий Мизры и Сингха*.

3. Согласно *критерию Лихнеровича*, волновыми следует считать лишь пространства, принадлежащие подтипу  $N$ . Этому критерию эквивалентен *критерий Малдыбаевой*, формулируемый в виде общековариантных уравнений для тензора Римана—Кристоффеля.

Следующие три критерия гравитационных волн выделяют подмножества пространств подтипа  $N$ .

4. *Критерий Зельманова* исключает из подтипа  $N$  два вида симметрических пространств и звучит следующим образом: пространство-время описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда его тензор Римана—Кристоффеля не является ковариантно постоянным, т. е.  $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$ , и удовлетворяет общековариантному волновому уравнению

$$g^{\sigma\lambda} \nabla_\sigma \nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0. \quad (14.4.2)$$

5. Еще более узкими являются *критерий Хэлли* и *критерий Зунда—Левина*, также выделяющие некие случаи пространств подтипа  $N$ .

Предлагались и другие алгебраические критерии гравитационных волн (см. [64]).

## II. Недостатки алгебраических критериев гравитационных волн

Перечислим главные недостатки алгебраических критериев.

- 1) Поскольку алгебраический подход опирается на аналогию с электромагнитным полем, то следует иметь в виду, что условие равенства нулю двух инвариантов электромагнитного поля еще не означает наличия электромагнитного излучения. Действительно, пусть имеются взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля ( $\vec{E} \perp \vec{H}$ ) и пусть их напряженности равны ( $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ ), тогда оба инварианта обратятся в нуль, но никакого излучения нет. Таким образом, даже для случая электромагнитного излучения недостаточно выполнения лишь алгебраического волнового критерия. Аналогичный довод можно привести и в случае гравитации.
- 2) Имеются явные примеры метрик, не удовлетворяющих ни одному из перечисленных алгебраических волновых критериев, однако по

ряду других соображений их следует причислить к волновым. Таким примером являются цилиндрические волны Эйнштейна—Розена (4.5.42).

- 3) Алгебраический подход опирается на некоторые аналогии с электромагнетизмом, однако, как указывалось в гл. 4, имеются и иные аналогии, в частности вариант, когда электромагнитное поле описывается конформно-плоскими метриками, т. е. принадлежит подтипу  $O$  по алгебраической классификации Петрова.
- 4) К недостаткам алгебраического подхода можно отнести также множественность критериев гравитационных волн при отсутствии критерия, выделяющего один из них.
- 5) Рассмотренные критерии относятся к идеализированным метрикам, далеким от соответствия с физической реальностью. Внесение сколь угодно малой массы в пространство, ранее удовлетворявшее какому-либо волновому критерию, существенно изменяет его алгебраический тип. В работах некоторых авторов метрики представлялись в виде суперпозиции вкладов различных подтипов по Петрову.

Эти и ряд других обстоятельств заставили дополнять алгебраические критерии рядом других соображений. Отметим также, что анализ алгебраических свойств метрик относится как к вакуумным, так и невакуумным метрикам, т. е. справедлив и для случаев, где имеют место грави-инерциальные процессы с участием физических бозонных или материальных полей.

### 14.4.3. Референционный анализ грави-инерциальных волновых процессов

Как и в случае неудач с определением энергии-импульса гравитационного поля, в псевдотензорном подходе, предпринимались попытки преодолеть или осмыслить возникшие трудности с помощью понятий системы отсчета (и ориентаций). Здесь можно выделить три направления поиска с целью:

- 1) осмыслить ситуацию в алгебраическом подходе в рамках понятий систем отсчета;
- 2) ввести в терминах понятий систем отсчета дифференциальный критерий грави-инерциальных волновых процессов;
- 3) исследовать понятие грави-инерциальной волны (волновых процессов) непосредственно в терминах физико-геометрических тензоров.

Сразу же отметим, в данном подходе исследовались волновые свойства тензора Римана—Кристоффеля, которые можно отнести как к гипотетическим чисто гравитационным (вакуумным) волнам, так и неким волновым процессам с участием физических полей. Другими словами, эти исследования не решали и в данной постановке задачи не могли дать ожидавшегося от них решения проблемы введения *чисто гравитационных волн*.

### 1. Диадное описание волновых процессов

В гл. 6 отмечалось, что диадный метод удобен для описания волновых процессов, поскольку волновой вектор может быть представлен в виде  $k^\mu = \varepsilon(\tau^\mu \pm l^\mu)$ , где  $\tau^\mu$  — 4-скорость системы отсчета, а  $l^\mu$  — пространственно-подобное направление распространения волнового процесса. С помощью диадного метода можно разделить 20 компонент тензора Римана—Кристоффеля на три группы:

а) продольные составляющие:

$$\hat{X} = X_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta; \quad \hat{Y}_{\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} l^\lambda \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu; \quad Z_{\alpha\beta\gamma\sigma} = Z_{\mu\nu\lambda\kappa} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \gamma_\gamma^\lambda \gamma_\sigma^\kappa; \quad (14.4.3)$$

б) продольно-поперечные составляющие:

$$X_\mu = X_{\alpha\beta} l^\alpha \gamma_\mu^\beta; \quad \hat{Y}_\beta = -Y_{\lambda\mu\nu} l^\lambda l^\mu \gamma_\beta^\nu; \\ Z_{\sigma\alpha\beta} = Z_{\mu\nu\lambda\kappa} l^\mu \gamma_\sigma^\nu \gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\kappa; \quad Y_{\gamma\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} \gamma_\gamma^\lambda \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu; \quad (14.4.4)$$

в) поперечно-поперечные составляющие:

$$\bar{X}_{\alpha\beta} = X_{\mu\nu} \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu; \quad \bar{Y}_{\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} \gamma_\alpha^\lambda \gamma_\beta^\mu l^\nu; \quad \bar{Z}_{\alpha\beta} = Z_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\mu \gamma_\alpha^\nu l^\lambda \gamma_\beta^\sigma. \quad (14.4.5)$$

Здесь при определении поперечности или продольности учтено, что спроектированные на 2-мерные направления индексы в конкретной калибровке принимают два значения, тогда если эти проекции определены для антисимметричной величины, то дуальное им направление оказывается вдоль вектора  $l^\mu$ .

Пусть вектор  $k^\mu$  является вектором Дебеве, тогда, используя определения алгебраических подтипов пространств через векторы Дебеве (4.5.37)–(4.5.40), можно получить интересные соотношения между проекциями тензора Римана—Кристоффеля, принадлежащими определенным выше группам. Некоторые из этих соотношений можно рассматривать как аналоги соотношения векторов напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

1) Для подтипа I по Петрову, подставляя вид  $k^\mu$  в выражение (4.5.37), находим соотношение, связывающее поперечно-попереч-

ные компоненты матриц  $X$  и  $Y$ :

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm (\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}) = 0. \quad (14.4.6)$$

2) Для подтипов  $II$  и  $D$  из условий (4.5.38) находим соотношения:

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm (\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}) = 0; \quad \hat{Y}_{\sigma} \pm X_{\sigma} = 0. \quad (14.4.7)$$

Отсюда следует, что продольно-поперечные компоненты  $X_{\sigma}$  и  $\hat{Y}_{\sigma}$  по модулю равны друг другу, а поперечно-поперечные компоненты связаны, как и в (14.4.6).

3) Для подтипа  $III$  из условий (4.5.39) находим соотношения:

$$\hat{Y}_{\sigma} \pm X_{\sigma} = 0; \quad Y_{\mu\nu\lambda} \mp Z_{\mu\nu\lambda} = 0; \quad (14.4.8)$$

$$\bar{X}_{\mu\nu} = \mp \bar{Y}_{\mu\nu} = \mp \bar{Z}_{\mu\nu}. \quad (14.4.9)$$

Соотношения (14.4.8) означают равенство друг другу продольно-поперечных компонент трех матриц  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , а соотношение (14.4.9) — равенство трех поперечно-поперечных компонент.

4) Для подтипа  $N$  из условий (4.5.40) находим, что все продольные и продольно-поперечные компоненты тензора Римана—Кристоффеля равны нулю, а поперечно-поперечные компоненты матриц  $X$  и  $Y$  одинаковы, что полностью соответствует свойствам векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитной волны. Можно сказать, что грави-волновой процесс определяется одним тензором  $\bar{X}_{\mu\nu}$ , причем его след  $\bar{X}_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = 0$ .

Очевидно, что после проведенного анализа остаются в силе все перечисленные выше замечания относительно алгебраического подхода.

## II. Дифференциальные волновые критерии гравитационных волн

В ряде работ (см. [64]) предлагались дифференциальные волновые критерии, которым должен удовлетворять тензор Римана—Кристоффеля в случае существования гравитационных волн, а на самом деле неких волновых процессов, связанных с искривлением пространства-времени. В общековариантном монадном виде такие референционные критерии означают выполнение следующих условий:

1) Компоненты тензора Римана—Кристоффеля, всевозможным способом спроектированные посредством  $\tau^{\mu}$  и  $h_{\nu}^{\mu}$  используемой системы отсчета, т. е.  $R_{(N)} = \{X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu\lambda}, Z_{\mu\nu\alpha\beta}\}$ , должны удовлетворять волновым уравнениям вида

$$(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu}) R_{(N)} = \Phi_{(N)}, \quad (14.4.10)$$

где  $\Phi_{(N)}$  — произвольная тензорная функция координат, не содержащая производных выше первого порядка от  $R_{(N)}$ , представля-



ющего собой собирательное обозначение всех проекций тензора Римана—Кристоффеля.

- 2) Левая часть уравнений (14.4.10) должна быть нетривиальной хотя бы для одной компоненты  $R_{(N)}$ , т. е. соответствующий тензор  $R_{(N)}$  должен быть нестационарным и пространственно-неоднородным:

$$\partial_T R_{(N)} \neq 0; \quad \tilde{\nabla}_\nu R_{(N)} \neq 0. \quad (14.4.11)$$

Отметим, что для случая пространств Эйнштейна, где имеет место тождество

$$g^{\lambda\sigma} \nabla_\lambda \nabla_\sigma R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\sigma\alpha\beta}^\lambda R_{\lambda\mu\nu}^\sigma + 2(R_{\sigma\alpha\nu\lambda} R_{\mu\beta}^{\lambda\sigma} + R_{\alpha\mu\sigma}^\lambda R_{\nu\lambda\beta}^\sigma) = 0, \quad (14.4.12)$$

существенным является именно второе требование.

Проектируя (14.4.10) или тождества (14.4.12) посредством  $\tau^\mu$  и  $h_\nu^\mu$  и переходя к монадным величинам и операторам, получаем соотношения:

$$\begin{aligned} (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) X_{\alpha\beta} &= \Phi_{\alpha\beta}^{(x)}; \\ (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Y_{\alpha\beta\sigma} &= \Phi_{\alpha\beta\sigma}^{(y)}; \\ (\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Z_{\alpha\beta\sigma\lambda} &= \Phi_{\alpha\beta\sigma\lambda}^{(z)}, \end{aligned} \quad (14.4.13)$$

где  $\Phi_{\alpha\beta}^{(x)}$ ,  $\Phi_{\alpha\beta\sigma}^{(y)}$ ,  $\Phi_{\alpha\beta\sigma\lambda}^{(z)}$  — ковариантные тензорные функции, не содержащие производных выше первого порядка от проекций тензора Римана—Кристоффеля.

Этот критерий в ряде случаев соответствует упомянутым выше алгебраическим критериям гравитационных волн (Малдыбаевой, Зельманова и др.), фактически означая различные способы обрезания тождества (14.4.12).

Если референционный критерий выполняется не для всех трех тензоров  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а только для одного или двух из них, то можно говорить о  $X$ -,  $Y$ -,  $Z$ -волновых процессах или о смеси их. (Отметим, что в вакууме, вследствие соотношения  $R_{\mu\nu} = 0$ , величины  $X_{\mu\nu}$  и  $Z_{\alpha\mu\beta\nu}$  оказываются связанными друг с другом, поскольку в этом случае  $X_{\mu\nu} + Z_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 0$ , т. е. тогда достаточно говорить лишь о волновых процессах двух типов:  $X$  и  $Y$ .)

### III. Физико-геометрические тензоры волнового процесса

Важной задачей референционного подхода является выяснение условий существования грави-инерциальных волновых процессов в зависимости от значений и свойств физико-геометрических тензоров. В частности, можно сделать некоторые выводы об отсутствии волнового процесса в искривленном пространстве-времени (в указанном выше смысле)

в зависимости от обращения в нуль этих тензоров в отдельности или совместно в различных комбинациях (см. [49, 64]). Возможны восемь случаев:

$$1) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \quad (14.4.14)$$

$$2) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \quad (14.4.15)$$

$$3) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \quad (14.4.16)$$

$$4) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \quad (14.4.17)$$

$$5) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (14.4.18)$$

$$6) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (14.4.19)$$

$$7) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (14.4.20)$$

$$8) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0. \quad (14.4.21)$$

Анализ показывает, что грави-инерциальные волновые процессы отсутствуют в случаях (1), (2) и (5), во всех остальных 5 случаях волновые процессы возможны. Отметим, что имеются более тонкие условия отсутствия грави-инерциальных волновых процессов в зависимости от обращения в нуль производных от физико-геометрических тензоров.

Число возможностей существенно сокращается, если ограничиться рассмотрением лишь нормальных систем отсчета, когда  $\omega_{\mu\nu} = 0$ . Тогда отпадают последние четыре возможности (5)–(8) и остаются лишь два случая (3) и (4). Из (14.4.16) и (14.4.17) видно, что в них необходимым условием является отличие от нуля тензора скоростей деформаций. В нормальных системах отсчета напрашивается простая классификация грави-инерциальных волновых процессов в зависимости от равенства или неравенства нулю вектора  $a_\mu$ .

#### 14.4.4. Слабые грави-инерциальные волны

В этом подходе трудности, связанные с нелинейностями, отпадают. По существу, теория сводится к описанию линейных волн тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени, что означает переход к триалистической парадигме. От геометрической парадигмы остается лишь ранг 2 рассматриваемого тензорного поля. На основе этой теории производятся оценки ожидаемых эффектов с участием гравитационных волн в такой трактовке (см. [19, 13]). Изложим ключевые положения общепринятой теории слабых гравитационных волн.

### I. Поперечно-поперечные компоненты слабых гравитационных волн

1. В линеаризованной теории гравитации, обсужденной в гл. 12, полагается, что компоненты метрического тензора слабо отличаются от метрики пространства-времени Минковского (в декартовых координатах), т. е. представляются в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}. \quad (14.4.22)$$

Далее во всех геометрических выражениях отбрасываются слагаемые, приводящие к нелинейностям, и строится теория свободного тензорного поля  $\varphi_{\mu\nu}$ . Для него из скалярной кривизны получается функция Лагранжа (12.1.26), из которой по стандартным правилам теории поля в плоском пространстве-времени выводится тензор энергии-импульса и уравнения движения. Последнее можно получить также непосредственно, линеаризуя уравнение Эйнштейна (в вакууме)  $R_{\mu\nu} = 0$ . В любом варианте имеем

$$\square\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square\varphi = 0, \quad (14.4.23)$$

где  $\varphi \equiv \eta^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$ .

2. Гармонические координатные условия (1.4.31) в линейном приближении принимают вид

$$\frac{\partial\varphi^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \rightarrow \frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (14.4.24)$$

Поскольку в этой теории индексы поднимаются и опускаются метрическим тензором пространства-времени Минковского, все индексы можно писать снизу. Условия (14.4.24) соответствуют условиям Лоренца в электродинамике.

3. Легко показать, что 4 условия (14.4.24) допускают еще возможность координатных преобразований

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \phi^{\mu}(x); \quad x^{\mu} = x'^{\mu} - \phi^{\mu}(x'), \quad (14.4.25)$$

где  $\phi^{\mu}(x)$  — малые по сравнению с единицей функции координат, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\square\phi^{\mu} = 0. \quad (14.4.26)$$

4. Пусть нас интересует гравитационная волна, распространяющаяся вдоль направления  $x^1$ . С помощью 4 гармонических координатных условий (14.4.24) и выбором 4 функций  $\phi^{\mu}$  в (14.4.26) можно добиться обращения в нуль 8 компонент  $\varphi_{\mu\nu}$ . Прежде всего, устраняется след  $\varphi =$

$\eta^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} = 0$ . Далее, полагая, что все компоненты  $\varphi_{\mu\nu}$  имеют волновой характер, т. е. зависят от комбинации координат  $(x^0 \pm x^1)$ , устраним продольные, продольно-поперечные и с индексом 0 компоненты:

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{00} = \varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_{03} = (\varphi_{22} + \varphi_{33}) = 0. \quad (14.4.27)$$

Отличными от нуля остаются лишь две поперечно-поперечные компоненты  $\varphi_{23}$  и  $(\varphi_{22} - \varphi_{33})$  (динамические переменные).

5. Переобозначая две функции:  $\varphi_{23} = \beta$ ,  $\varphi_{22} = -\varphi_{33} = \alpha$ , находим, что в линейном приближении плоскому грави-инерциальному волновому процессу соответствует метрика

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 + \alpha)dx_2^2 - (1 - \alpha)dx_3^2 - 2\beta dx_2 dx_3. \quad (14.4.28)$$

## II. Волновые критерии для слабых гравитационных волн

Можно показать, что метрика (14.4.28), соответствующая слабой гравитационной волне, удовлетворяет волновым критериям как в алгебраическом, так и в референционном подходах. Действительно, волновой вектор  $k^\mu$ , соответствующий данной волне, например, в кинеметрической калибровке, в рассматриваемом приближении является ковариантно постоянным, т. е. можно сказать, что метрика (14.4.28) принадлежит подтипу  $N$  по классификации Петрова и, следовательно, удовлетворяет алгебраическому критерию гравитационных волн Лихнеровича.

Отличные от нуля компоненты тензора Римана—Кристоффеля в данном приближении

$$X_{\xi\eta} = -Y_{\xi\eta} = \partial_T \bar{d}_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\xi\eta}}{\partial x_0^2} \quad (14.4.29)$$

удовлетворяют референционному критерию грави-инерциальных волн, если функции  $\alpha$  и  $\beta$  нетривиально удовлетворяют волновым уравнениям.

## III. Излучение слабых плоских гравитационных волн

Рассмотрим теперь уравнения Эйнштейна для линеаризованного гравитационного поля с правой частью

$$\square\varphi_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (14.4.30)$$

Решение этого уравнения, как и в случае излучения в электродинамике (для малых скоростей и больших расстояний  $R$  по сравнению с разме-

рами излучающей системы), можно представить в виде

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\varkappa}{2} \int \frac{T_{\mu\nu}(x^o - R)}{R} dV \simeq \frac{\varkappa}{2R} \int T_{\mu\nu}(x^o - R) dV. \quad (14.4.31)$$

Далее следует воспользоваться свойством тензора энергии-импульса материи в плоском пространстве-времени  $\partial T_{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$ , которое, выделяя времени-подобные компоненты, можно представить в виде двух соотношений:

$$\frac{\partial T_{io}}{\partial x^o} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0; \quad \frac{\partial T_{oo}}{\partial x^o} - \frac{\partial T_{ok}}{\partial x^k} = 0. \quad (14.4.32)$$

С помощью этих соотношений можно привести решение (14.4.31) к более удобному выражению. Так, умножив первое соотношение в (14.4.32) на  $x^j$  и проинтегрировав по всему пространству, находим

$$\frac{\partial}{\partial x^o} \int T_{io} x^j dV = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} x^j dV = \int \frac{\partial(T_{ik} x_j)}{\partial x^k} dV - \int T_{ij} dV. \quad (14.4.33)$$

Первый член справа исчезает, так как по теореме Гаусса интеграл можно преобразовать по поверхности на бесконечности, где  $T_{ik} = 0$ . В результате, произведя симметризацию, получаем

$$\int T_{ij} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^o} \int (T_{io} x_j + T_{jo} x_i) dV. \quad (14.4.34)$$

Умножим второе соотношение в (14.4.32) на  $x_j x_s$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$\frac{\partial}{\partial x^o} \int T_{oo} x_j x_s dV = \int \frac{\partial T_{ok}}{\partial x^k} x_j x_s dV = \int \frac{\partial(T_{ok} x_j x_s)}{\partial x^k} dV - \int (T_{oj} x_s + T_{os} x_j) dV. \quad (14.4.35)$$

Собирая вместе (14.4.34) и (14.4.35), имеем

$$\int T_{ij} dV = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_o^2} \int T_{oo} x_i x_j dV \rightarrow \varphi_{ij} = \frac{\varkappa}{4R} \frac{\partial^2}{\partial x_o^2} \int T_{oo} x_i x_j dV. \quad (14.4.36)$$

Компоненту  $T_{oo}$  с достаточной точностью можно представить в виде  $T_{oo} = \rho c^2$ , тогда для двух поперечно-поперечных компонент плоской гравитационной волны находим

$$\varphi_{23} = \frac{\varkappa}{12R} \ddot{D}_{23}; \quad (\varphi_{22} - \varphi_{33}) = \frac{\varkappa}{12R} (\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}), \quad (14.4.37)$$

где использовано обозначение

$$D_{ij} = \int \rho (3x_i x_j - \delta_{ij} x^2) dV.$$

Здесь  $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .

Из плотности функции Лагранжа линеаризованного гравитационного поля стандартным методом находятся компоненты тензора (псевдотензора) энергии-импульса гравитационного поля

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4\kappa} \left( \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial\varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} \right). \quad (14.4.38)$$

Используя решения (14.4.28), отсюда находим плотность энергии гравитационного излучения

$$t_{oo} = \frac{1}{2\kappa} \left( \dot{\varphi}_{23}^2 + \frac{1}{4} (\dot{\varphi}_{22} - \dot{\varphi}_{33})^2 \right) = \frac{G}{36\pi R^2 c^6} \left( \ddot{D}_{23}^2 + \frac{1}{4} (\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33})^2 \right). \quad (14.4.39)$$

Здесь точки означают дифференцирование по  $t = x^0/c$ .

#### IV. Мощность гравитационного излучения

Из (14.4.39) находится формула для мощности гравитационного излучения

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{D}_{ik}^2. \quad (14.4.40)$$

Именно на основе этой формулы производятся оценки гравитационного излучения различных ожидаемых источников.

Приведем ряд частных случаев гравитационно излучающих систем:

- 1) Для двойной системы, образованной двумя вращающимися с частотой  $\Omega$  звездами с массами  $M_1$  и  $M_2$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга, вычисления приводят к результату

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{5c^5} \left( \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 r^4 \Omega^6. \quad (14.4.41)$$

- 2) Для стержня длины  $l$  и массы  $M$ , вращающегося с частотой  $\Omega$  вокруг оси, проходящей через середину стержня и перпендикулярной ему, мощность гравитационного излучения находится в виде

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G}{5c^5} J^2 \Omega^6 = \frac{2G}{45c^5} M^2 l^4 \Omega^6. \quad (14.4.42)$$

#### V. Критические замечания

1. В данном подходе использованы представления псевдотензора гравитационного поля, т. е. автоматически здесь имеют место замечания, сделанные относительно псевдотензорного подхода к определению энергии-импульса.

2. Для всех реалистичных, как земных, так и астрофизических, объектов оценки приводят к чрезвычайно малым значениям, далеким от возможностей обнаружения современной измерительной аппаратурой. Надежды возлагаются на гипотезы существования экзотических источников.

## 14.5. Воздействие грави-инерциальных волн на прибор

Особо выделим вопрос о воздействии слабых грави-инерциальных волн на прибор.

### 14.5.1. Поведение свободных пробных масс в слабой плоской грави-инерциальной волне

Пусть пробные массы таковы, что можно выбрать сопутствующую им синхронную систему отсчета, и, кроме того, пусть  $\tau^\mu$  и направление распространения волны  $l^\mu$  находятся в кинеметрической (хронометрической) калибровке из метрики (14.4.28), в которой

$$\alpha = A \sin\left(\frac{\omega}{c}(x^0 - x^1)\right); \quad \beta = A \sin\left(\frac{\omega}{c}(x^0 - x^1)\right); \quad (14.5.1)$$

$A \ll 1$ ;  $B \ll 1$ . Тогда, определяя  $\tau^\mu$  и  $l^\mu$ , можно сказать, что волновой процесс распространяется вдоль  $x^1$ .

Возьмем точки-приборы, которые до прихода волны (при  $A = 0$ ,  $B = 0$ ) находились на одном расстоянии  $\delta r_0$  от какой-то выделенной точки  $O$ . Эти точки лежат на сфере радиуса  $\delta r_0$ :

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 = \delta r_0^2.$$

Здесь и далее, чтобы не путать степени с индексами, последние будем писать снизу. Когда волновой процесс достигает системы, расстояние между близкими точками задается формулой

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2) + 2\beta\delta x_2\delta x_3}. \quad (14.5.2)$$

Характерно, что по определению данной калибровки пространственные координаты каждой точки-прибора неизменны, приборы «вморожены» в координатную сетку.

Отдельно рассмотрим поведение свободных пробных масс для процессов двух типов.

1. Пусть  $\alpha \neq 0, \beta = 0$ , тогда

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2)}. \quad (14.5.3)$$

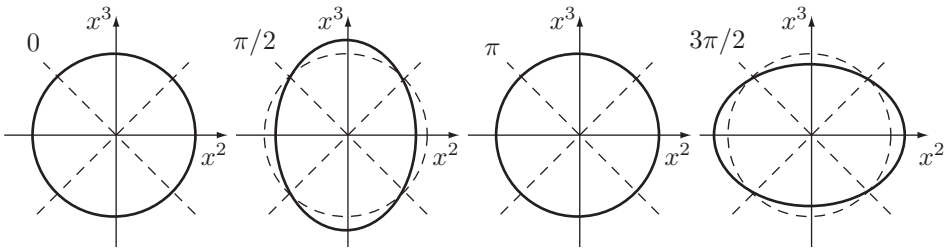
В координатном пространстве поверхность  $\delta r = \delta r_o = \text{const}$  является эллипсоидом:

$$\frac{\delta x_1^2}{\delta r_o^2} + \frac{\delta x_2^2}{\delta r_o^2}(1 + \alpha) + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_o^2}(1 - \alpha) = 1 \quad (14.5.4)$$

с полюсами  $\delta r_o, \delta r_o/\sqrt{1 + \alpha}, \delta r_o/\sqrt{1 - \alpha}$ . В сечении  $x_1 = \text{const}$  получим эллипс. Аналогично, окружность с координатным радиусом  $r_o$  превратится в обратный эллипс. На рисунке 16.2 изображены в координатах плоской 2-мерной поверхности  $(x^2, x^3)$  точки, попадающие на эллипс:

$$\frac{\delta x_2^2}{\delta r_o^2}(1 + \alpha) + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_o^2}(1 - \alpha) = 1 \quad (14.5.5)$$

в течение периода волны. Примечательно, что есть два направления



**Рис. 14.2.** Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационной волны ( $\alpha \neq 0, \beta = 0$ )

$\delta x_2 = \pm \delta x_3$ , вдоль которых расстояния не меняются.

2. Пусть  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ , тогда

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + 2\beta\delta x_2\delta x_3}. \quad (14.5.6)$$

Опять поверхность  $\delta r = \delta r_o = \text{const}$  образует эллипсоид. Сечение эллипсоида  $\delta x_1 = 0$  представляет собой эллипс:

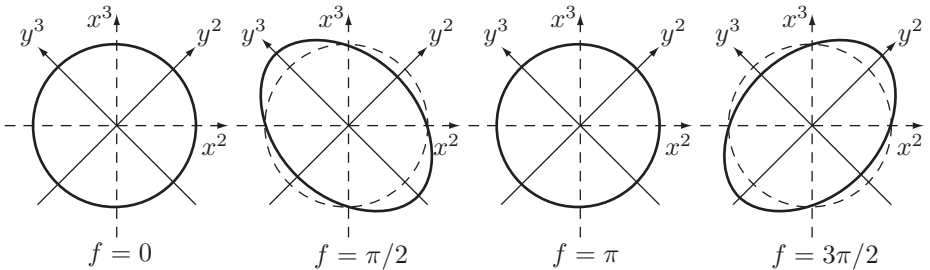
$$\frac{\delta x_2^2}{\delta r_o^2} + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_o^2} + 2\beta\frac{\delta x_2\delta x_3}{\delta r_o^2} = 1, \quad (14.5.7)$$

который поворотом координат на угол  $\theta = 45^\circ$  можно привести к канонической форме

$$\frac{\delta y_2^2}{\delta r_o^2}(1 + \beta) + \frac{\delta y_3^2}{\delta r_o^2}(1 - \beta) = 1. \quad (14.5.8)$$



За период волны на этот эллипс попадают точки, изображенные на рисунке 14.3. Опять имеются два направления  $\delta y_2 = \pm \delta y_3$ , вдоль которых расстояния не меняются.



**Рис. 14.3.** Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской грави-инерциальной волны ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ )

Рассмотренные два случая соответствуют двум возможным поляризациям свободного плоского грави-инерциального процесса. Таким образом, *две поляризации плоской свободной грави-инерциальной волны соответствуют периодическим растяжениям и сжатиям 2-мерной поверхности одинаковой фазы вдоль пар взаимно перпендикулярных направлений, повернутых относительно друг друга на  $45^\circ$* . Направления максимальных удлинений (сокращений) одной поляризации соответствуют несмещающимся точкам другой поляризации и наоборот.

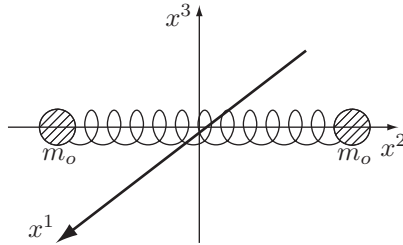
## 14.5.2. Воздействие грави-инерциальных волн на детектор

### I. Постановка задачи

Рассмотрим несвободные пробные частицы, моделирующие в упрощенном виде твердотельные детекторы гравитационного излучения. Пусть на линейный осциллятор, который состоит из двух одинаковых частиц массой  $m_0$ , соединенных пружиной жесткости  $k$  и длиной  $2r_0$  в ненапряженном состоянии и ориентированных вдоль направления  $x^2$  (см. рис. 14.4), падает вдоль  $x^1$  плоско поляризованная волна, описываемая метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 - \alpha)dx_2^2 - (1 - \alpha)dx_3^2, \quad (14.5.9)$$

где  $\alpha = A \sin(\omega/c)(x^0 - x^1)$ ;  $A \ll 1$ . Здесь для простоты оставлена лишь одна поляризация. Систему отсчета будем задавать хронометрической калибровкой. Пространственные уравнения мировых линий масс



**Рис. 14.4.** Осциллятор из двух связанных пружиной масс

записываются в данной калибровке следующим образом:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = L_{sk}^i p^s v^k + m a^i + 2p^k (\omega_{ik}^i - d_k^i) + \tilde{\mathcal{F}}^i, \quad (14.5.10)$$

где  $\tilde{\mathcal{F}}^i$  — компоненты негравитационных сил, т. е. силы напряжения пружины  $\mathcal{F}^i$  и диссипативной силы. Нам понадобится только компонента уравнения вдоль  $x^2$ .

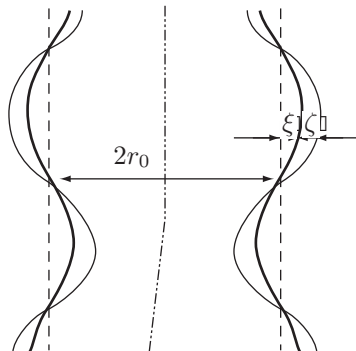
Сила напряжения пружины (вдоль  $x^2$ )  $\mathcal{F}_2$  пропорциональна ее жесткости и абсолютному удлинению (индексы опять будем писать снизу)

$$\mathcal{F}_2 = -k(\sqrt{\delta l^2} - 2r_0), \quad (14.5.11)$$

где  $\delta l^2 = -h_{ik} \delta x^i \delta x^k$  — квадрат длины пружины ( $\delta x^i$  — разность координат ее концов).

## II. Качественный анализ процесса

Для данного процесса можно указать три пары характерных мировых линий (рис. 14.5). Тонкие непрерывные линии соответствуют



**Рис. 14.5.** Поведение осциллятора из двух связанных пружиной масс в метрике слабой плоской гравитационно-инерциальной волны

мировым линиям масс в отсутствие пружины (геодезические). Пунктирные линии изображают негеодезические мировые линии равновесия пружины. Расстояние между ними всегда равно  $2r_o$ . Жирными линиями показаны истинные мировые линии масс, связанных пружиной. В данной задаче имеются два положения равновесия: ненапряженное положение пружины и геодезические линии. Отклонения масс от них характеризуются соответственно величинами  $\xi$  и  $\zeta$ .

Рассмотрим поведение масс относительно трех систем отсчета, конгруэнциям которых принадлежат три пары указанных мировых линий. При этом ограничимся рассмотрением одной лишь правой частицы. Кроме того, предположим, что до прихода гравитационной волны частица покоилась и пружина была в ненапряженном состоянии. Тогда скорости, приобретаемые массами, и смещения будут иметь порядок амплитуды падающей волны.

**1. Синхронная система отсчета** ( $\omega_{ik} = 0, a_i = 0$ ). Конгруэнции этой системы отсчета принадлежат тонкие и центральная штрих-пунктирная линии. Очевидно, что система координат, в которой записана метрика (14.5.9), является хронометрической для синхронной системы отсчета. Координата правой массы определяется выражением  $\delta x_2 = r_o + \zeta$ . Пренебрежем величинами  $L^i_{sk} p^s v^k$  и  $2p^k d^i_k$  (третьего и второго порядков малости). Уравнение (14.5.10) тогда приобретает вид:

$$m_o \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \tilde{\mathcal{F}}_2. \quad (14.5.12)$$

Из-за малости скоростей здесь и в дальнейшем пренебрегаем членами порядка  $(v/c)^2$ . Компонента  $\mathcal{F}_2$  силы напряжения пружины запишется следующим образом:

$$\mathcal{F}_2 = -2k \left( \sqrt{h_{22} \delta x_2^2} - r_o \right) = -2k \left( \sqrt{(1+\alpha)(r_o + \zeta)^2} - r_o \right) \simeq -2k \left( \frac{\alpha r_o}{2} - \zeta \right). \quad (14.5.13)$$

Подставляя это выражение в (14.5.12) и вводя диссипативную силу, получаем:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{2k}{m_o} \zeta + \frac{\lambda}{m_o} \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{k}{m_o} \alpha r_o. \quad (14.5.14)$$

Если возле массы осциллятора (или торца цилиндра Вебера) подвесить покоящуюся до прихода волны пробную массу на длинной нити (или поместить рядом на борту спутника), то  $\zeta$  будет определяться относительным смещением пробной и связанной масс (или массы и торца цилиндра Вебера).

**2. Сопутствующая массам система отсчета.** Координаты рассматриваемых масс в этой системе отсчета неизменны. Тогда  $v^i = p^i = 0$ , а уравнения (14.5.10) существенно упрощаются:

$$-ma_2 = \tilde{\mathcal{F}}_2 \quad (14.5.15)$$

и имеют смысл равенства силы инерции силе напряжения пружины. Рассматриваемому случаю соответствует хронометрическая система координат, получающаяся из исходной, в которой записано (14.5.9), преобразованиями:

$$x'^0 = x^0; \quad x'^1 = x^1; \quad x'^2 = x^2(1 + \eta(x^0)); \quad x'^3 = x^3, \quad (14.5.16)$$

где  $\eta(x^0) \ll 1$  и имеет порядок малости амплитуды падающей волны. В этой системе координат с точностью до величин первого порядка малости имеем:

$$g'_{00} = 1; \quad g'_{02} \simeq x_2 \dot{\eta}; \quad g'_{22} = -(1 + \alpha - 2\eta) = -h'_{22}. \quad (14.5.17)$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени выбранной системы отсчета. Подставляя последние соотношения в выражение для ускорения системы отсчета, получаем в точке нахождения массы

$$a_2 = g_{02,0} r_o \ddot{\eta}. \quad (14.5.18)$$

Силу напряжения пружины находим в виде

$$\mathcal{F}_2 = -2k \left( \sqrt{h'_{22} \delta x'^2_2} - r_o \right) = -2kr_o \left( \sqrt{(1 + \alpha - 2\eta) - 1} \right) \simeq -2kr_o \left( \frac{\alpha}{2} - \eta \right). \quad (14.5.19)$$

Подставляя два последних выражения в (14.5.15), получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_o \eta) + \frac{2k}{m_o}(r_o \eta) + \frac{\lambda'}{m_o} \frac{d}{dt}(r_o \eta) = \frac{k}{m_o} \alpha r_o. \quad (14.5.20)$$

Здесь опять введена диссипативная сила. Это уравнение совпадает с (14.5.14), если  $\zeta = -r_o \eta$ .

**3. Система отсчета ненапряженной пружины.** Пусть ее конгруэнции принадлежат пунктирные линии и средняя мировая линия (на рисунке штрих-пунктирная). Остальные линии определяются из условия  $h'_{ik} x'^i x'^k = \text{const}$ . В хронометрической системе координат этой системы отсчета пространственные координаты  $x'^i$  мировых линий постоянны. Учитывая указанные условия, находим преобразования от исходной

координатной системы, в которой записана метрика (14.5.9), в хронометрическую систему координат данной системы отсчета:

$$x'^0 = x^0; \quad x'^1 = x^1; \quad x'^2 = x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right); \quad x'^3 = x^3. \quad (14.5.21)$$

Искомая метрика имеет вид:

$$ds^2 = dx_o^2 - x_2 \dot{\alpha} dx_o dx_2 - dx_1^2 - dx_2^2 - x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - (1 + \alpha) dx_3^2. \quad (14.5.22)$$

Координаты массы  $\delta x_2 = r_o + \xi$ , где  $\xi$  — малая величина порядка  $\alpha$ . Сила напряжения пружины определяется выражением

$$\mathcal{F}_2 = -2k \left( \sqrt{-g_{22}(r_o + \xi)^2} - r_o \right) \simeq -2k\xi. \quad (14.5.23)$$

Оставляя в уравнении движения только величины первого порядка малости, получаем:

$$m_o \ddot{\xi} = m_o a_2 - 2k\xi. \quad (14.5.24)$$

Учитывая, что в данной системе отсчета

$$\tau_2 = \frac{g_{o2}}{\sqrt{g_{oo}}} = \frac{\dot{\alpha}}{2} x_2; \quad a_2 \simeq -\frac{x_2}{2} \ddot{\alpha}, \quad (14.5.25)$$

и вводя диссипативную силу, находим уравнение колебаний

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{2k}{m_o} \xi + \frac{\lambda''}{m_o} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\omega^2}{2} \alpha r_o. \quad (14.5.26)$$

### III. Обсуждение результатов

- 1) В использованном приближении упругие силы пружины во всех трех системах отсчета одинаковы, откуда следует, что

$$\xi = r_o \left( \frac{\alpha}{2} - \eta \right) = \frac{\alpha}{2} r_o + \zeta. \quad (14.5.27)$$

Подставив в уравнение (14.5.26) вместо  $\xi$  величину  $r_o(\alpha/2 - \eta)$ , получаем уравнение (14.5.20). Таким образом, уравнения (14.5.26) и (14.5.20) описывают колебания одной и той же мировой линии несвободной массы относительно двух положений равновесия: для пружины и геодезической. При резонансе, когда  $\omega = \sqrt{2k/m_o}$ , эти уравнения совпадают. При отсутствии гравитационной волны положения равновесия тождественны и уравнения совпадают. В отсутствие пружины уравнения (14.5.14) и (14.5.20) тривиальны, а уравнение (14.5.26) описывает колебания свободных масс.

- 2) Отметим, что в проведенных рассуждениях нигде не использовались понятия псевдотензора энергии-импульса или вектора энергии гравитационной волны, а присутствовали лишь характеристики, присущие дуалистической геометрической парадигме.
- 3) Во всех физически интерпретируемых выражениях выполняется принцип целостности метафизических парадигм. В частности, в них присутствовали характеристики всех трех подкатегорий категории пространства-времени: смещения в 4-мерном пространстве-времени, параметры пробной частицы, а также физических полей, которые олицетворялись силой напряжения пружины  $\mathcal{F}^k$ .
- 4) Можно также отметить, что в рассмотренных уравнениях движения представлены все три подкатегории категории частиц: рассматриваемая пробная масса, одна из конкретных систем отсчета и влияние окружающей материи в виде метрики волнового типа.

## 14.6. Проблема квантования гравитации

Проблема «квантования гравитации» понималась (в широком смысле) как *объединение принципов двух столпов теоретической физики XX в.: ОТО и квантовой теории поля*. Поскольку эти два раздела опираются на разные системы понятий и принципов, такая двойственность чрезвычайно беспокоила физиков и на попытки ее решения были затрачены огромные усилия (см. обзоры [14, 28]), так и не увенчавшиеся успехом.

### 14.6.1. Метафизический характер проблемы квантования гравитации

Как правило, физические теории возникали на базе накопленных наблюдательных данных. В рассматриваемом же случае сложилась совершенно иная ситуация: в прошлом столетии не были непосредственно обнаружены даже гравитационные волны, представляющие собой классический аспект гипотетических гравитонов. В этих условиях физикам-теоретикам приходилось опираться лишь на соображения метафизического характера.

Главная причина неудач решения проблемы квантования гравитации состояла в том, что объединяемые теории принадлежат разным метафизическим (дуалистическим) парадигмам, а исследователи пытались ее решить в рамках одной из них, тогда как необходим переход к мо-

нистической парадигме, основанной на новой обобщенной категории, объединяющей категории двух исходных парадигм.

В рамках дуалистических парадигм фактически провозглашалась альтернатива: либо квантовую теорию выводить из геометрии, либо геометрию выводить из квантовой теории. Первой точки зрения придерживался А. Эйнштейн, который писал: «Мои усилия пополнить ОТО путем обобщения уравнений гравитации были предприняты отчасти в связи с предположением о том, что, по-видимому, разумная общая релятивистская теория поля, возможно, могла бы дать ключ к более совершенной квантовой теории. Это — скромная надежда, но никак не убеждение» [197, с. 626]. Отсутствие прогресса в этом направлении исследований позволило В. Гейзенбергу сделать вывод: «Однако он (А. Эйнштейн. — Ю. В.) переоценил возможности геометрической точки зрения. Гранулярная структура материи является следствием квантовой теории, а не геометрии; квантовая же теория касается очень фундаментального свойства нашего описания Природы, которое не содержалось в эйнштейновской геометризации силовых полей» [44, с. 87].

Противоположный подход к решению проблемы — в рамках теоретико-полевого дуалистического миропонимания — был представлен, в частности, в виде суперсимметричных теорий, где выбор  $N \leq 8$  диктовался условием, чтобы в мультиплете физических полей было представлено (среди других полей) лишь одно тензорное поле ранга 2, отождествляемое с гравитационным полем. Этот подход также не привел к осязаемому успеху.

Исходя из изложенного, предлагается смотреть на полученные результаты в этой области исследований сквозь призму принципа дополненности метафизических парадигм, т. е. как на попытки *разглядеть более глубокие основания физического мироздания под отдельными углами зрения.*

Из рассмотрения этого вопроса в гл. 11 в рамках геометрофизики можно сделать вывод, что в какой-то степени были правы и Эйнштейн, и Гейзенберг. Эйнштейн ощущал возможность пролить свет на квантовые закономерности в рамках более развитой геометрической теории, но для этого нужно было продолжить исследования многомерных геометрических моделей, начатые Т. Калуцей, О. Клейном, Ю. Б. Румером и другими авторами. Отметим, что здесь важную роль сыграла работа А. Эйнштейна и П. Бергмана 1938 г. [196] о замкнутости скрытой 5-й размерности. Прав был и В. Гейзенберг, поскольку невозможно получить ответ на вопрос о причинах квантованности, т. е. «гранулярной структу-

ры материи», оставаясь в рамках лишь 4-мерной ОТО, без привлечения скрытых размерностей (квантовой механики).

Однако следует признать, что в большинстве исследований был представлен более прагматичный подход: предлагалось оперировать с привычными категориями 4-мерного пространства-времени, (фермионными) частицами и бозонными полями — переносчиками физических взаимодействий, причем гравитационное поле (взаимодействие) рассматривалось и квантовалось по образу и подобию электромагнитного поля.

### 14.6.2. Замечания по некоторым исследованиям проблемы квантования гравитации

1. Прежде всего, следует упомянуть цикл работ [3, 59], в которых предполагалось провести предварительную работу по *выделению динамических степеней свободы гравитационного поля*, предназначенных для квантования. Здесь имеются в виду работы П. Дирака [59], Р. Арновитта, С. Дезера, Ч. Мизнера [3] и других авторов на базе дираковского канонического формализма ОТО. Работы этого направления упомянуты в гл. 5. Реальным результатом этих исследований явилось лишь разделение 10 компонент метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  на 4 компоненты  $\tau_\mu$ , формируемые из компонент  $g_{0\mu}$  (описывающие 4-скорость системы отсчета), и 6 компонент 3-мерного метрического тензора  $h_{ik}$ , остающиеся кандидатами на описание динамических степеней свободы гравитационного поля (гравитационных волн или гравитонов в квантовом аспекте теории). Попытки корректно осуществить следующие этапы отделения динамических степеней свободы от нединамических в самом общем случае успеха не имели.

2. Отдельно следует остановиться на исследованиях так называемых *квантовых космологических моделей*. В них речь идет не о вложении волновых функций отдельных частиц в искривленное пространство-время, а о квантовом описании материи всего мира, как бы «вмороженной» в пространство, когда вместо движения материи можно рассматривать эволюцию сопутствующего пространства. В классической области это реализуется в однородных изотропных космологических моделях Фридмана (см. разд. 3.6.1). Возник соблазн построить квантовые аналоги классических моделей, в которых вместо физических характеристик материи выступали бы геометрические величины, описывающие пространство-время, куда «вморожена» материя. В такой замене усматривается принципиально важный момент — квантовая теория материи как бы становится квантовой геометрической теорией.



Для решения этой задачи, прежде всего, необходимо было опереться на нормальную сопутствующую материальной среде систему отсчета, где имеет место глобальное расщепление 4-мерного пространства-времени на время и ортогональное ему 3-мерное пространственное сечение.

Состояние геометрической системы предлагается описывать компонентами 3-мерного метрического тензора во всех точках пространства. В работах Дж. Уилера и Б. ДеВитта для этой цели была разработана теория *классических суперпространств* (см. разд. 5.4.3), которые не следует путать с суперпространствами, содержащими грассманы переменные. (Часто классическое суперпространство называют суперпространством Уилера—ДеВитта.) В классическом суперпространстве введены понятия обобщенной метрики, геодезических линий и других уравнений в классическом пространстве. Особенно просто эти и другие уравнения в суперпространстве записываются для случаев 4-мерных миров, характеризуемых всего несколькими параметрами, т. е. метриками с симметриями. Таковыми являются пространственные сечения однородных изотропных космологических моделей Фридмана или ряда других метрик.

3. Схема квантования однородных изотропных космологических моделей Фридмана была проанализирована Б. ДеВиттом и продолжает обсуждаться многими другими авторами. Бралось одно из уравнений Эйнштейна — компонента  $00$  (скалярная проекция уравнений Эйнштейна на время используемой системы отсчета) — так называемая гамильтонова связь, соответствующая энергии (гамильтониану системы). Геометрическая (левая) часть этого уравнения легко представляется в виде суммы двух частей, одну из которых можно трактовать как кинетическую, а вторую — как потенциальную энергию. Данная космологическая модель очень проста в том смысле, что характеризуется всего одним параметром — радиусом мира  $R$ . Кинетическая часть энергии представляется квадратом временной производной от  $R$ , т. е., можно сказать, имеет вид квадрата импульса. Далее предлагается переход к квантовой схеме, аналогичный стандартной процедуре квантования одной частицы, когда от соотношения между энергией и импульсами частицы переходят к операторному выражению и получают волновое уравнение. В итоге получается уравнение ДеВитта [55], напоминающее одномерное уравнение Клейна—Фока. Решения такого уравнения хорошо известны. Используя их, можно представить развитие мира (расширение, а затем сжатие) как эволюцию одномерного волнового пакета в суперпространстве.

4. Следующий шаг был сделан Ч. Мизнером, который рассмотрел более сложную — однородную анизотропную космологическую модель

(см. разд. 4.3.3). Эволюция этой классической модели состоит в том, что мир сжимается и расширяется попеременно по-разному вдоль трех пространственных направлений. В этом случае Вселенная характеризуется тремя параметрами: один параметр соответствует общему масштабу мира, а остальные два определяют степень его анизотропии. Процедура, аналогичная случаю ДеВитта, приводит к трехмерному волновому уравнению Мизнера [106], опять по структуре напоминающему уравнение Клейна—Фока. В них роль времени выполняет масштабный фактор, а роль пространственных координат — параметры анизотропии. Опять эволюция мира описывается волновым пакетом.

5. Эти две модели рассматриваются как первые шаги в направлении построения геометрической квантовой теории, однако здесь встретился ряд принципиальных трудностей:

- 1) Прежде всего, не ясно, каким образом конкретно переходить от двух простых случаев к теориям с меньшими симметриями.
- 2) Имеются трудности в выборе временного параметра эволюции для всего мира. Кроме того, имеются проблемы с заданием начальных и граничных условий при решении волновых уравнений для физической задачи такого сорта.
- 3) Максимальные трудности возникают при физическом осмыслении полученных решений. Что означает функционал состояния для квантованного мира, когда для него не существует внешнего классического прибора? Как понимать суперпозицию гармоник мира, описывающих множество различных миров, в том числе сжимающихся и расширяющихся? и т. д.

Таким образом, уже на первых этапах развития программы, а они значительно растянулись на несколько десятилетий, возникло множество вопросов концептуального характера, на которые не было дано удовлетворительных ответов. Многолетние попытки их решения убедили в том, что данная проблема имеет более глубокие корни, нежели это многим представлялось на первых этапах исследований. Постепенно становилось ясно, что здесь затрагивается фундамент представлений о классическом пространстве-времени и о других ключевых понятиях физики.

### 14.6.3. Гипотеза гравитонов

Для полноты картины обрисую ситуацию, сложившуюся в исследованиях гипотезы гравитонов в рамках триалистической парадигмы, т. е. теории линеаризованного гравитационного поля.

### I. Квантование свободного линеаризованного гравитационного поля

Линеаризованное гравитационное поле (вторично) квантуется как тензорное поле второго ранга на фоне плоского пространства-времени по образцу и подобию квантования электромагнитного поля. Для волновых функций  $\varphi_{\alpha\beta}$  в координатном представлении записываются перестановочные соотношения в виде

$$[\varphi_{\alpha\beta}(x), \varphi_{\mu\nu}(x')] = -i l_{Pl}^2 (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) D_o(x - x'), \quad (14.6.1)$$

где  $D_o(x) = \frac{1}{i(2\pi)^3} \int e^{ikx} \delta(k^2) \varepsilon(k_o) d^4k$ .

Переход к импульсному представлению  $\varphi_{\alpha\beta}(x) \rightarrow a_{\alpha\beta}(\vec{k})$  осуществляется посредством формулы

$$\varphi_{\alpha\beta}^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{2k_o}} e_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}^{\pm}(\vec{k}) d^3k, \quad (14.6.2)$$

где  $e_{\alpha\beta}$  — коэффициенты поляризации. В импульсном представлении перестановочные соотношения принимают вид

$$[a_{\alpha\beta}^{-}(\vec{k}), a_{\mu\nu}^{+}(\vec{k}')] = \varkappa' (\eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu}) \delta(\vec{k} - \vec{k}');$$

$$[a_{\alpha\beta}^{-}(\vec{k}), a_{\mu\nu}^{-}(\vec{k}')] = [a_{\alpha\beta}^{+}(\vec{k}), a_{\mu\nu}^{+}(\vec{k}')] = 0. \quad (14.6.3)$$

В квантованной теории гармонические координатные условия (1.4.31) берутся в «ослабленном» виде, т. е. как условия на функционалы состояния  $|\Psi\rangle$ :

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}^{-}}{\partial x^{\nu}} |\Psi\rangle = 0; \quad \langle \Psi | \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}^{+}}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (14.6.4)$$

Эти условия приводят к исключению вклада 8 лишних компонент в значениях энергии «свободного» гравитационного поля:

$$\langle P_o \rangle = \langle \Psi | \frac{1}{\varkappa'} \int k_o d^3k \left\{ a_{23}^{+}(\vec{k}) a_{23}^{-}(\vec{k}) + \frac{1}{4} (a_{22}^{+}(\vec{k}) - a_{33}^{+}(\vec{k})) (a_{22}^{-}(\vec{k}) - a_{33}^{-}(\vec{k})) \right\} | \Psi \rangle, \quad (14.6.5)$$

т. е. опять остаются только две поперечно-поперечные компоненты  $a_{23}$  и  $(1/2)(a_{22} - a_{33})$ . Эти две степени свободы в данной парадигме соответствуют двум типам гравитонов с двумя возможными проекциями спина  $\pm 2$  на направление движения (вдоль оси  $x^1$ ).

### II. Взаимодействие квантованного гравитационного поля с другими полями

Для описания взаимодействия гравитационного поля с другими полями к плотности лагранжиана гравитационного поля (5.2.10) добавляется плотность лагранжианов других полей в искривленном пространстве-времени.

В частности, для случая взаимодействующих гравитационного  $g_{\mu\nu}$ , электромагнитного  $A_\mu$ , спинорного  $\psi$  и скалярного  $\Phi$  полей плотность лагранжиана записывается в виде

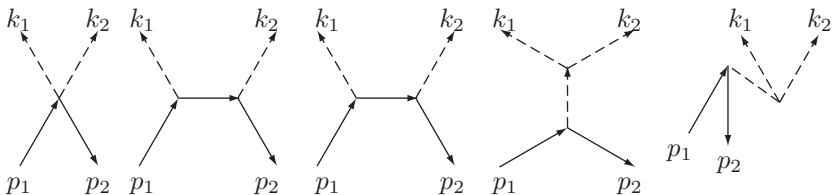
$$\begin{aligned} \sqrt{-g}\mathcal{L} = & \frac{\sqrt{-g}g^{\mu\nu}}{2\kappa c}(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \frac{1}{16\pi c}\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}F_{\lambda\sigma}F_{\mu\nu} - \\ & - \frac{\sqrt{-g}(\hbar c)}{2}\left[-i\bar{\psi}\gamma(\alpha)g^\mu(\alpha)\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu}\gamma(\alpha)g^\mu(\alpha)\psi + 2m\bar{\psi}\psi - 2e\bar{\psi}\gamma(\alpha)g^\mu(\alpha)A_\mu\psi\right] - \\ & - i\frac{\sqrt{-g}(\hbar c)}{8}\bar{\psi}[\gamma(\lambda)\gamma(\alpha)\gamma(\beta) - \gamma(\beta)\gamma(\alpha)\gamma(\lambda)]\psi g^\mu(\lambda)g^\nu(\alpha)g^\sigma(\beta)\Delta_{\mu,\nu\sigma} - \\ & - \sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} - m'^2\Phi^*\Phi - ieg^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi^*}{\partial x^\mu}A_\nu\Phi + ieg^{\mu\nu}\Phi^*A_\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu}e^2A_\mu A_\nu\Phi^*\Phi\right]. \end{aligned} \tag{14.6.6}$$

Для случая линеаризованного гравитационного поля величины  $\sqrt{-g}$ ,  $g^{\mu\nu}$ ,  $g^\mu(\alpha)$  следует разложить в ряды по малым добавкам  $\varphi_{\mu\nu}$  к метрике Минковского согласно формулам (12.1.22)–(12.1.24).

Зная плотность лагранжиана взаимодействия полей, стандартными методами квантовой теории поля можно построить S-матрицу и, пользуясь диаграммной техникой Фейнмана, рассчитывать конкретные процессы взаимных превращений различных частиц, включая гипотетические гравитоны. При этом члены третьего порядка и выше разложения плотности лагранжиана гравитационного поля описывают превращения между самими гравитонами.

### III. Процессы гравитационных трансмутаций

Гипотеза о возможности взаимных превращений гравитонов и квантов известных видов материи была высказана в 1947 г. Д. Д. Иваненко [68, 69]. Впоследствии гравитационные превращения исследовались в работах многих авторов (см. обзор в [28]). В частности, двухгравитонная аннигиляция пары фермионов описывается диаграммами Фейнмана, изображенными на рисунке 14.6. Сечение процесса ничтожно мало; так, для частиц в системе центра масс, обладающих скоростями  $c/100$ , сечение процесса  $\sigma \sim 10^{-110}\text{см}^2$ . В ультрарелятивистском случае, когда  $k_o \sim pc \geq mc^2$ , полное сечение процесса



**Рис. 14.6.** Диаграммы Фейнмана процесса двухгравитонной аннигиляции электронно-позитронной пары

дается формулой

$$\sigma \simeq r_o^2 \left( \frac{k_o}{mc^2} \right)^2, \quad (14.6.7)$$

где  $r_o = 2Gm/c^2$  — гравитационный радиус электрона, т. е. сечение растет пропорционально квадрату энергии сталкивающихся частиц. Напомним, что сечение двухфотонной аннигиляции пары фермионов в ультрарелятивистском случае убывает с ростом энергии  $\sigma \sim 1/k_o^2$ . При энергиях электронов и позитронов  $k_o \simeq 10^{21}mc^2$  сечение процессов двухгравитонной и двухфотонной аннигиляций имеют одинаковый порядок.

Рассматривался также гипотетический процесс смешанной фотон-гравитонной аннигиляции пары фермионов, который описывается теми же диаграммами 16.6 с заменой одной гравитонной (пунктирной) линии на фотонную (волнистую) линию. Этот процесс мог бы оказаться более существенным, поскольку его сечение пропорционально первой степени  $\sigma \sim k_o$ . При скоростях сталкивающихся частиц  $v \sim c/100$  сечение имеет порядок  $\sigma \sim 10^{-76}\text{см}^2$ . В ультрарелятивистском случае сечение приближается к постоянному значению

$$\sigma \simeq \frac{1}{12}r_or_e \simeq 0,3 \cdot 10^{-68}\text{см}^2, \quad (14.6.8)$$

где  $r_e = e^2/mc^2$ . Согласно проведенным оценкам, за счет данного процесса можно ожидать от сверхновой звезды мощность гравитационного излучения порядка  $N \sim 10^{16}$ эрг/сек.

Производились оценки сечений процессов гравитационного тормозного излучения фотонов, в частности, в связи с попытками объяснить этим процессом космологическое красное смещение в спектре излучения далеких звезд. Оценки показывают, что средняя энергия, теряемая фотоном на гравитационное излучение, дается формулой

$$\Delta k_o \simeq 10^4 \frac{G^2 M^2}{\hbar c^9} k_o^3 n L, \quad (14.6.9)$$

где  $M \sim 10^{44}\text{г}$  — средняя масса галактик;  $n \sim 10^{-68}\text{см}^{-3}$  — плотность галактик в наблюдаемой части Вселенной;  $k_o$  — начальная энергия фотона;  $L$  — расстояние, пройденное фотоном. Для видимого света ( $k_o \sim 10^{-12}$ эрг) имеем  $\Delta k_o/k_o \sim L \cdot 10^{-93}$ , тогда как красное смещение, обусловленное фридмановским разбеганием галактик, определяется величиной  $\Delta k_o/k_o \sim L \cdot 10^{-28}$  и не зависит от начальной энергии фотона. Таким образом, данным эффектом невозможно объяснить фридмановское расширение Вселенной.

Наиболее существенным представляется эффект превращения фотона в гравитон на внешнем электромагнитном поле, поскольку является эффектом первого порядка по константе гравитационного взаимодействия. Однако в реальных условиях этот эффект также чрезвычайно мал. Так, суммарная мощность такого гравитационного излучения Солнца оценивается величиной  $N \sim 10^6$ эрг/сек.

Исследовался ряд других эффектов с участием гипотетических гравитонов.

#### IV. Критические замечания

По поводу этого направления исследований можно высказать ряд веских критических замечаний:

1. Как было показано, все эффекты с участием гравитонов оказались чрезвычайно малыми в мыслимых реальных условиях. Обычно авторы указывали на возможность их проявлений в неких экстремальных астрофизических процессах, таких как начальные стадии развития Вселенной или в окрестности черных дыр.

2. Квантовая теория линеаризованного гравитационного поля неперенормируема. Напомним, это означает, что при учете более высоких порядков приближений (по константе  $G$ ) возникают бесконечно большие величины, которые нельзя устранить подбором конечного числа бесконечных контрчленов. Другими словами, учет членов, которыми пренебрегли при вычислениях эффектов низших порядков в линеаризованной теории, приводит к бессмысленным выражениям.

3. Ограничение лишь малыми добавками в метрике приводит к нарушению ряда основополагающих принципов ОТО, например, общей ковариантности.

Таким образом, это направление исследований имеет весь набор недостатков, которыми обладают исследования слабых гравитационных волн.

### 14.7. Пределы измеримости геометрических понятий

Параллельное существование квантовой теории и ОТО, принадлежащих разным дуалистическим метафизическим парадигмам, накладывает ограничение снизу на область применимости классических координат, а тем самым приводит к ряду концептуальных вопросов о сути математического аппарата дифференциального исчисления, исходящего из постулата о существовании бесконечно малых смещений в координатном пространстве-времени. Это еще один вид парадигмальных проблем в теоретической физике. Рассмотрим этот вопрос более подробно, опираясь на мысленные эксперименты с участием характеристик всех ключевых категорий (подкатегорий) физики.

#### 14.7.1. Планковская длина и коллективные ошибки

##### I. Планковская длина

Согласно закономерностям квантовой механики, вследствие соотношений неопределенности

$$\Delta x_k \Delta p_k \geq \hbar \quad (14.7.1)$$

невозможно сколь угодно точно одновременно измерить как координату  $x_k$ , так и импульс  $p_k$  частицы. Однако отдельно координату частицы можно измерить сколь угодно точно за счет сколь угодно больших

неопределенностей импульса:  $\Delta x \geq \hbar/\Delta p$ . При очень больших  $\Delta p$  (ультрарелятивистский случай) можно положить  $\Delta p \simeq \Delta E/c \sim \Delta mc$ , где  $E = mc^2$  — энергия,  $m$  — масса частицы. Следовательно, можно записать соотношение

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{c\Delta m}, \quad (14.7.2)$$

т. е. неограниченно увеличивая неопределенность массы  $\Delta m$ , можно измерить как угодно точно положение частицы.

Согласно ОТО, вблизи точечной массы пространство-время описывается метрикой Шварцшильда, т. е., согласно (2.1.28),

$$g_{00} = 1 - \frac{2G\Delta m}{c^2 r}. \quad (14.7.3)$$

Расстояния остаются расстояниями, а время временем лишь до тех пор, пока сохраняется стандартная сигнатура 4-мерной метрики, т. е. пока  $g_{00} > 0$ . Полагая  $r \sim \Delta x$ , отсюда находим

$$\Delta x > \frac{G\Delta m}{c^2}. \quad (14.7.4)$$

Умножая друг на друга (14.7.2) и (14.7.4), получаем для  $\Delta x$  ограничение снизу, определяемое комбинацией фундаментальных констант:

$$(\Delta x)^2 > \frac{G\hbar}{c^3} \equiv l_{Pl}^2 \rightarrow \Delta x > \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \simeq 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \quad (14.7.5)$$

т. е. из совместного учета закономерностей ОТО и квантовой механики следует, что расстояние не может быть меньше планковской длины. Соотношение (14.7.5) называют *индивидуальной ошибкой* в измерении координат, тогда как (14.7.1) следует именовать *парной ошибкой*.

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к результату для минимального интервала времени

$$\Delta t > \frac{l_{Pl}}{c}. \quad (14.7.6)$$

Данные рассуждения заставляют задуматься о том, имеем ли мы право вообще говорить о сколь угодно малых длинах (бесконечно малых величинах).

С помощью фундаментальных физических констант планковской длине можно поставить в соответствие *планковскую массу*

$$m_{Pl} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c\hbar}{G}} \sim 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \quad (14.7.7)$$

В работах ряда авторов обсуждался вопрос о возможном физическом смысле этой массы. Напомним, в многомерных геометрических моделях

автоматически возникают массы заряженных частиц, отличающиеся от планковской массы на постоянную тонкой структуры. В гл. 9 и 10 решалась задача перенормировки таких масс до наблюдаемых значений масс заряженных полей.

## II. Коллективная ошибка в измерениях символов Кристоффеля

Естественно поставить вопрос о точности, с которой можно измерять коэффициенты связности, а точнее, физико-геометрические тензоры, которые им соответствуют. Произведем грубые оценки на основе уравнений геодезических вида

$$\frac{1}{mc^2} \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{1}{c^2} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \rightarrow \Gamma_{oo}^\mu \sim \frac{1}{mc^2} \frac{\Delta p^\mu}{\Delta t}. \quad (14.7.8)$$

Используя (14.7.1), приходим к выражению

$$\Delta\Gamma\Delta x\Delta t \geq \frac{\hbar}{mc^2}. \quad (14.7.9)$$

Умножая обе части неравенства на (14.7.4), приходим к *коллективной ошибке*

$$\Delta\Gamma(\Delta x)^2\Delta t > \frac{l_{Pl}^2}{c}. \quad (14.7.10)$$

Полагая  $\Delta\Gamma \sim \Delta g/\Delta x$ , находим аналогичную коллективную ошибку с участием неопределенности в метрике

$$\Delta g\Delta x\Delta t > \frac{l_{Pl}^2}{c}. \quad (14.7.11)$$

Заметим, что при  $\Delta g \sim 1$  опять приходим к соотношению (14.7.5).

## III. Электродинамический аналог

Еще в рамках классической электродинамики Н. Бор и Розенфельд [12] исследовали вопрос, насколько точно можно измерить напряженность электромагнитного поля. Исходя из формулы

$$qE_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad (14.7.12)$$

они сделали вывод, что для обеспечения большой точности измерения напряженности нужны большие значения зарядов  $q$ :

$$\Delta E \sim \frac{1}{q} \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (14.7.13)$$



Используя соотношение неопределенностей (14.7.1), отсюда легко получить коллективную ошибку в электродинамике

$$\Delta E \Delta x \Delta t \geq \frac{\hbar}{q}, \quad (14.7.14)$$

соответствующую геометрическому выражению (14.7.9).

Следовательно, для более точного измерения электромагнитного поля необходимо брать достаточно большие заряды, которые сами изменяют измеряемое поле. Эту трудность Бор и Розенфельд предлагали устранить, введя в рассмотрение незаряженные пружины.

### 14.7.2. Мысленные эксперименты

К изложенным выше результатам можно прийти с помощью иных мысленных экспериментов, в которых длина измерялась бы световыми сигналами, взвешиванием и т. д. Этот вопрос подробно анализировался в работах М. П. Бронштейна [17] (1936), Т. Редже [135] (1958), Х. Тредера [155] (1963) и ряда других авторов. Рассмотрим несколько таких мысленных экспериментов.

#### I. Измерение посредством облучения светом

Для того чтобы измерить положение пробной массы (системы) посредством облучения ее светом, необходимо, чтобы его длина волны была меньше размеров массы  $\lambda < \Delta x$ , т. е.

$$\nu = \frac{c}{\lambda} > \frac{c}{\Delta x}. \quad (14.7.15)$$

Поскольку квант света имеет энергию  $E = h\nu$ , то, рассеиваясь на системе с линейными размерами  $\Delta x$ , он создает в ней плотность энергии

$$\varepsilon \sim T_{00} \sim \frac{h\nu}{(\Delta x)^3} > \frac{hc}{(\Delta x)^4}. \quad (14.7.16)$$

Согласно уравнениям Эйнштейна, для компонент тензора Риччи можно произвести оценку

$$R_{\mu\nu} \simeq \kappa T_{\mu\nu} \rightarrow R \sim \Delta R > \frac{G\hbar}{c^3} \frac{1}{(\Delta x)^4}. \quad (14.7.17)$$

Отсюда можно оценить неопределенность в значениях символов Кристоффеля

$$R \sim \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \sim \frac{\Delta \Gamma}{\Delta x} \rightarrow \Delta \Gamma \sim \Delta R \Delta x > \frac{l_{Pl}^2}{(\Delta x)^3}, \quad (14.7.18)$$

т. е. рассеиваемый свет создает неопределенность в символах Кристоффеля такой же величины, как при измерении пробной массой, согласно (14.7.10).

## II. Измерение испусканием света

Определим неопределенность геометрических величин в экспериментах по измерению гравитационного красного смещения. Испускание света частотой  $\nu$  приводит, согласно формуле Эйнштейна, к изменению массы излучающей системы

$$\Delta m = \frac{h\nu}{c^2}, \quad (14.7.19)$$

что сказывается на изменении метрики, создаваемой излучающей системой, в частности

$$\Delta g_{oo} = \Delta \left( 1 - \frac{2mG}{c^2 r} \right) \simeq \frac{G\Delta m}{c^2 \Delta x} \simeq \frac{G\hbar\nu}{c^4 \Delta x}. \quad (14.7.20)$$

Здесь положено, что неопределенность  $\Delta x$  порядка  $r$ . Учитывая, что частота испущенного света связана с размерами системы согласно (14.7.15), находим неопределенность в значении метрики

$$\Delta g_{oo} > \frac{G\hbar}{c^3} \frac{1}{(\Delta x)^2}, \quad (14.7.21)$$

что совпадает с оценкой в (14.7.11). Отсюда следует оценка (14.7.18) для символов Кристоффеля.

Для гравитационного красного смещения можно также записать

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{c^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\Delta\varphi}{c^2}. \quad (14.7.22)$$

Учитывая, что потенциалы в точках наблюдения и испускания определяются формулой  $\varphi = Gm/r$ , на основании (14.7.20) опять приходим к оценке

$$\Delta \left( \frac{\Delta\nu}{\nu} \right) = \frac{\Delta\varphi}{c^2} \simeq \Delta g_{oo} > \frac{l_{Pl}^2}{(\Delta x)^2}. \quad (14.7.23)$$

## III. Измерение посредством математического маятника

Рассмотрим мысленный эксперимент по определению геометрических величин (физико-геометрической величины  $a_k$ ) посредством математического маятника длины  $l$ . Из известной формулы для периода колебаний имеем выражение для ускорения свободного падения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{(o)}}} \rightarrow g_{(o)} = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (14.7.24)$$

Воспользуемся тем фактом, что максимальные значения кинетической и потенциальной энергий маятника равны друг другу:

$$E_{max} = U_{max} \rightarrow \frac{p^2}{2m} = mg_{(o)}H = mg_{(o)}l(1 - \cos \alpha) \sim \frac{mg_{(o)}l\alpha^2}{2}, \quad (14.7.25)$$

где использовано предположение о малости угла отклонения маятника от вертикали  $1 - \cos \alpha \sim 2 \sin^2(\alpha/2) \sim \alpha^2/2$ . Вводя обозначение для удвоенной амплитуды колебаний маятника  $l \sin \alpha \sim l\alpha = \Delta x/2$  и полагая в оценках  $\Delta x \ll l$ , можно записать

$$U_{max} \simeq \frac{mg_{(o)}(\Delta x)^2}{8l} < mg_{(o)}\Delta x. \quad (14.7.26)$$

Перейдем от (14.7.26) к соотношению неопределенностей в левой и правой частях:

$$\Delta U = \Delta E \rightarrow \Delta \left( \frac{mg_{(o)}(\Delta x)^2}{8l} \right) = \frac{p\Delta p}{m} = v\Delta p, \quad (14.7.27)$$

где  $v \sim \Delta x/T$  — скорость маятника. Учитывая, что из квантовомеханического соотношения неопределенностей  $\Delta E > v\hbar/\Delta x$ , а также (14.7.26), находим

$$\Delta(mg_{(o)}\Delta x) = (\Delta g_{(o)})(m\Delta x) > \Delta \left( \frac{mg_{(o)}(\Delta x)^2}{8l} \right) > \frac{v\hbar}{\Delta x}. \quad (14.7.28)$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на очевидное неравенство  $\Delta x > mG/c^2$ , приходим к выражению

$$\Delta g_{(o)}(\Delta x)^2 > l_{Pl}^2 \frac{c}{T} \rightarrow \Delta g_{(o)} > l_{Pl}^2 \frac{c}{T(\Delta x)^2}. \quad (14.7.29)$$

Учитывая, что ускорение свободного падения связано с вектором ускорения системы отсчета  $g_{(o)} = a_1/c^2$ , приходим к согласию с оценкой неопределенностей символов Кристоффеля (или физико-геометрических тензоров) (14.7.18).

#### IV. Измерение посредством пружинного динамометра

Пусть масса  $m$  подвешена на пружине жесткости  $k$ , тогда измерение ускорения свободного падения  $g_{(o)}$  основано на известной формуле равновесия пружины

$$mg_{(o)} = k\Delta l \rightarrow g_{(o)} = \frac{k\Delta l}{m}, \quad (14.7.30)$$

где  $\Delta l \equiv \Delta x/2$  — удлинение пружины под действием силы тяжести груза.

Неопределенность в значении ускорения свободного падения обусловлена неопределенностью в жесткости пружины

$$\Delta g_{(o)} \sim \Delta k \frac{\Delta x}{2m}. \quad (14.7.31)$$

Опять запишем условие равенства максимальной кинетической и потенциальной энергий и соответствующее ему соотношение для неопределен-

ностей:

$$\frac{p^2}{2m} = k \frac{(\Delta x)^2}{8} \rightarrow v \Delta p = \Delta k \frac{(\Delta x)^2}{8}. \quad (14.7.32)$$

Учитывая условие неопределенностей для импульса  $\Delta p \geq \hbar/\Delta x$ , находим для неопределенности жесткости пружины

$$\Delta k > \frac{v\hbar}{(\Delta x)^3}. \quad (14.7.33)$$

Подставляя сюда оценку для скорости груза  $v \sim \Delta x/T$  и умножая обе части неравенства на очевидное соотношение  $\Delta x > mG/c^2$ , находим из (14.7.31) оценку для неопределенности ускорения свободного падения

$$\Delta g_{(o)} \sim \frac{\Delta x}{m} \Delta k > l_{Pl}^2 \frac{c}{T(\Delta x)^2}, \quad (14.7.34)$$

совпадающую с (14.7.29).

# Заключение

---

Завершая изложение основ геометрофизики, сформулируем ряд выводов, которые представляют интерес для дальнейшего изучения данной проблематики.

## I. Выводы общего характера

- 1) Есть основания полагать, что **история теории физических взаимодействий могла бы оказаться иной и физика могла пойти по пути развития многомерных геометрических моделей типа теорий Калуцы и Клейна**. Однако этому помешали проблемы, которые не могли быть решены в 20–30-е годы. Кроме того, каждое увеличение геометрической размерности требовало преодоления сложного психологического барьера. Так было в первой половине XIX в., когда решался вопрос о переходе от теории двумерных искривленных поверхностей к представлениям об искривленных 3-мерных пространствах, и в начале XX в., когда с открытием теории относительности был совершен переход к 4-мерному пространству-времени.

Во второй половине XX в. магистральное направление развития теории физических взаимодействий было основано на калибровочном подходе, возникшем благодаря накопленному к тому времени экспериментальному материалу. Кроме того, он представлялся менее проблематичным, так как позволял обойтись формальными приемами в рамках 4-мерного пространства-времени. В итоге пионерские работы 20–30-х годов в области 5-мерных (многомерных) теорий оказались преждевременными.

- 2) *Геометрофизика нацелена на осуществление программы-минимум Эйнштейна*, т. е. на реализацию идеи о геометризации всех бозонных полей переносчиков физических взаимодействий по образу и подобию гравитации (ОТО). Эту программу можно осуществить, объединив на геометрической основе теории гравитационных, сильных и электрослабых взаимодействий, если увеличить размерность используемого пространственно-временного многообразия.
  - 3) В рамках геометрофизики *для описания известных видов физических взаимодействий достаточно использовать пространственно-временное многообразие восьми измерений*, характеризующихся уди-
-

вительной симметрией между четырьмя явными (классическими) и четырьмя скрытыми размерностями. Эта симметрия относится не только к одинаковому числу явных и скрытых размерностей, но и к факту выделенности по одной особой координате в каждом из них. В классическом пространстве-времени это одна времени-подобная координата  $x^0$ , а среди скрытых размерностей — клейновская координата  $x^4$ .

## II. Выводы, сделанные в рамках 4-мерной ОТО

- 1) Эйнштейновская ОТО описывает *метрические соотношения между точками-событиями физического мира*.
- 2) *Для описания наблюдаемых величин в рамках ОТО необходимо введение в искривленное пространство-время дополнительной структуры* в виде времени-подобной конгруэнции мировых линий системы отсчета, пространственно-подобных векторов системы ориентаций или иных физически определенных понятий (например, соответствующих средствам радиолокации).
- 3) *Координатные системы и системы отсчета представляют собой принципиально различные и не сводимые друг к другу понятия*. Координатные системы означают лишь нумерацию точек пространства-времени, которая может выбираться в широких пределах. Конгруэнция линий системы отсчета не зависит от выбора нумерации точек, однако среди множества координатных систем можно выбрать наиболее удобные, так или иначе привязанные к используемой конгруэнции, что осуществляется специальным соглашением.
- 4) *В ОТО наблюдаемыми величинами могут быть лишь скаляры*, т. е. тензорные выражения, спроецированные на физически выделенные направления (на монаду системы отсчета или физически заданные компоненты тетрады). Все утверждения о якобы «недостатках» ОТО в связи с неоднозначностью в ней выбора координатных систем представляются беспочвенными.

## III. Выводы относительно проявлений скрытых размерностей в классических 4 измерениях

- 1) *В рамках многомерной геометрической теории (геометрофизики) можно описать основные следствия калибровочного подхода к рассмотрению физических взаимодействий*, однако геометрическое миропонимание исходит из совершенно иных базовых понятий, принципов, способов рассуждений и приоритетов. В рамках геометрофизики фундаментальные физические взаимодействия, исключая гравита-

- ционное, понимаются как проявление дополнительных (скрытых) размерностей искривленного пространства-времени.
- 2) *Закономерности эйнштейновской ОТО и следствия теории сильных взаимодействий (хромодинамики) объединяются в рамках 8-мерной геометрической теории.*
  - 3) *Геометрофизика вскрывает вложенность теории электрослабых взаимодействий в 8-мерную теорию гравитационных взаимодействий при понижении размерности до 7 посредством склейки двух из трех скрытых координат калуцевского типа ( $x^5, x^6, x^7$ ).*
  - 4) *Наличие именно трех поколений элементарных частиц в электрослабых взаимодействиях обосновывается в геометрофизике тремя вариантами склейки двух из трех скрытых размерностей калуцевского типа.*
  - 5) *При склейке пары калуцевских координат 8 векторных глюонных полей сильных взаимодействий превращаются в 4 промежуточные векторных поля теории электрослабых взаимодействий: два нейтральных ( $A_\mu$  и  $Z_\mu$ ) и два заряженных ( $W_\mu^\pm$ ) векторных бозона.*
  - 6) *При следующем понижении размерности на единицу осуществляется переход от многомерной теории взаимодействий в микромире к 6-мерной теории гравитационно-электромагнитных взаимодействий, которую естественно назвать теорией Калуцы—Клейна. (Это достигается вторичной склейкой двух координат калуцевского типа, т. е. посредством выхода на гиперповерхность  $x^5 = x^6 = x^7$ .)*
  - 7) *Следующее понижение размерности приводит к двум вариантам 5-мерных теорий Калуцы и Клейна, предназначенным для описания разных сторон физической реальности. Теория Калуцы строилась для геометризации электромагнитных взаимодействий, тогда как 5-мерная теория Клейна—Фока—Румера была направлена на геометризацию квантовой механики и описание масс элементарных частиц.*

#### **IV. Выводы относительно физического смысла скрытых размерностей**

- 1) *Для доказательства наличия скрытых размерностей нет необходимости в постановке специальных экспериментов — само существование электрослабых и сильных взаимодействий служит их обоснованием.*
- 2) *В данном подходе массы и заряды частиц имеют смысл импульсов, соответствующих скрытым размерностям.*
- 3) *В геометрофизике дополнительные (скрытые) координаты исключаются из теории усреднениями (интегрированиями) по периодам*

компактификации этих координат. В результате многомерность и соответствующие многомерные симметрии проявляются в импульсном пространстве. *Компактификацию дополнительных размерностей можно понимать как математический прием, позволяющий построить теорию, исходя из (первично заданного) многомерного координатного (а не импульсного) пространства.*

- 4) *Компактифицированная размерность клейновского типа ( $x^4 \rightarrow s$ ) позволяет представить геометрическую интерпретацию закономерностей квантовой механики, что нашло свое отражение в исследованиях по «5-оптике» Ю. Б. Румера. Для описания электромагнитных взаимодействий в геометризованной квантовой механике необходимо использовать 6-мерную теорию Калуцы—Клейна.*
- 5) *Опыт построения многомерных геометрических теорий позволяет квалифицировать попытки обоснования компактификации дополнительных размерностей в рамках классического геометрического подхода как бесперспективные. В исследованиях подобного рода исходят из неоправданной, по нашему мнению, посылки о первичности некомпактифицированных координатных размерностей, тогда как предпочтительней обратный ход рассуждений — исходить из первичности компактифицированных размерностей и обосновывать появление четырех классических некомпактифицированных координатных размерностей.*

## **V. Выводы метафизического характера**

- 1) *Метафизический анализ ситуации, сложившейся в современной теоретической физике, позволяет классифицировать известные теории и исследовательские программы по нескольким метафизическим парадигмам (миропониманиям), различающимся числом и характером категорий, положенных в их основание.*
- 2) *Традиционный подход, представленный в курсах общей физики, следует отнести к триалистической метафизической парадигме (ньютонова типа), поскольку он опирается на три ключевые физические категории: пространство-время, частицы (тела) и поля переносчиков взаимодействий.*
- 3) *В теоретической физике XX в. главные исследования велись в рамках трех дуалистических метафизических парадигм (миропониманий), в которых пары исходных категорий триалистической парадигмы заменялись на обобщенные категории. В геометрическом миропонимании (в геометрофизике) категории пространства-времени и полей переносчиков взаимодействий объединены в обобщенную катего-*



рию многомерного искривленного пространства-времени. В теоретико-полевом миропонимании (в теории поля) категории частиц и полей переносчиков взаимодействий объединены в обобщенную категорию поля амплитуды вероятности. В реляционном понимании категории пространства-времени и частиц объединены в обобщенную категорию парных отношений. Таким образом, **геометрофизика представляет собой одно из трех возможных дуалистических миропониманий.**

- 4) *Метафизический анализ позволяет объяснить неудачи многолетних исследований ряда проблем ОТО их парадигмальным характером, обусловленным либо смещением понятий, присущих разным метафизическим парадигмам, либо абсолютизацией (превышением смысла) категорий используемой парадигмы.*
- 5) Сравнительный анализ дуалистических миропониманий позволяет сформулировать ряд принципов метафизического характера: принцип фрактальности, консонанса дуалистических парадигм и другие (см. выводы в конце гл. 13). Среди них следует выделить принцип дополненности, обобщающий известный квантовомеханический принцип Н. Бора: *метафизические парадигмы не противоречат, а дополняют друг друга, представляют собой видения одной и той же физической реальности под разными углами зрения.*
- 6) *Теоретическую физику XX в. можно трактовать как промежуточный этап на пути от триалистической парадигмы — через теории дуалистических парадигм — к монистической.* Попытки выхода на искомую единую теорию («всего») отчетливо проявляются в рамках всех трех миропониманий, в том числе и в геометрофизике. Но вопрос — **какой из трех названных путей окажется наиболее успешным?** — остается открытым.

И хотя геометрофизика представляет собой одно из направлений поиска объединенной физической теории, ряд ее принципов и выявленных закономерностей, несомненно, будет отражен в основаниях новой теории, соответствующей монистической парадигме. Автору хотелось бы надеяться, что изложенные в книге соображения будут полезны при решении данной стратегической задачи.

---

---

# Литература



1. Александров А. Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987.
  2. Арифов Л. Я. Общая теория относительности и тяготение. Ташкент. Изд-во «ФАН», 1983.
  3. Арновитт Р., Дезер С., Мизнер Ч. Динамика общей теории относительности // «Эйнштейновский сборник 1967» М.: Наука, 1967, с. 233–286.
  4. Асанов Г. С., Пономаренко С. Ф. Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности. Кишинев. Изд-во «Штиинца», 1989.
  5. Асанов Г. С. Финслероидная геометрия. М.: Изд-во физич. ф-та МГУ, 2004.
  6. Бек Р., Брандбург А., Шакуров А., Соколов Д. (Beck R., Brandenburg A., Shakurov A., Sokolov D.) // Ann. Rev. of Astron. and Astrophys., 1996. V. 34, p. 155–206.
  7. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
  8. Биркгоф Г. Д. (Birkhoff G. D.) // Proc. Nat. Akad. Sci. 1943. V. 29, p. 231; 1944. V. 30, p. 324.
  9. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
  10. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля. М.: Наука, 1969.
  11. Бор Н. Теория атома и принципы описания природы // Сб. Н. Бор. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1971, с. 62–71.
  12. Бор Н., Розенфельд Л. Измерение поля и заряда в квантовой электродинамике // Сб. Н. Бор. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1971, с. 434–444.
  13. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974.
  14. Брилл Д., Гоуди Р. Квантование общей теории относительности // Сб. «Квантовая гравитация и топология». М.: Мир, 1973, с. 66–179.
  15. Бродский А. М., Иваненко Д. Д., Соколик Г. А. Новая трактовка гравитационного поля // ЖЭТФ. Т. 41, 1961, с. 1307–1309.
  16. Бройль Л. де (De Broglie L.). Революция в физике. М.: Госатомиздат, 1963.
  17. Бронштейн М. П. Квантование гравитационных волн // ЖЭТФ. Т. 6, 1936, с. 195.
  18. Булюбаиш Б. В. Электродинамика дальнего действия // Физика XIX–XX вв. в общенаучном и социокультурном контекстах. (Физика XIX века). М.: Наука, 1995, с. 221–250.
-

19. *Вебер Дж.* Общая теория относительности и гравитационные волны. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
20. *Веблен О., Уайтхед Джс.* Основания дифференциальной геометрии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
21. *Вейль Г.* Гравитация и электричество //Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 513–528.
22. *Вессон П.* (Wesson P.) Space-Time-Matter: Modern Kaluza-Klein Theory. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 1999, 209 p.
23. *Весс Ю., Беггер Джс.* Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986.
24. *Визгин В. П.* Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование. 1900–1915 г.г.). М.: Наука, 1981.
25. *Визгин В. П.* Единые теории поля в первой трети XX века. М.: Наука, 1985.
26. *Вилковыский Г. А.* О квантовании частицы во внешнем гравитационном поле //Теор. и матем. физ. 1971. Т. 8, N. 3, с. 359–368.
27. *Владимиров Ю. С.* Аксиоматизация свойств пространства-времени общей теории относительности //Сб. «Современные проблемы гравитации». Тбилиси. Изд-во Тбил. гос. ун-та, 1967, с. 407–412.
28. *Владимиров Ю. С.* Квантовая теория гравитации //«Эйнштейновский сборник 1972». М.: Наука, 1974, с. 280–340.
29. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
30. *Владимиров Ю. С., Турыгин А. Ю.* 5-Мерие и теория прямого взаимодействия //Сб. «Исследования по классической и квантовой теории гравитации». Днепропетровск. 1983, с. 3–13.
31. *Владимиров Ю. С., Турыгин А. Ю.* Теория прямого межчастичного взаимодействия. М.: Энергоатомиздат, 1986.
32. *Владимиров Ю. С.* Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
33. *Владимиров Ю. С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.
34. *Владимиров Ю. С., Мамонтов С. И.* Symmetry in a 6-dimensional geometric model of gravi-electroweak interactions //Gravitation and Cosmology. Vol. 2 (1996), N. 3(7), p. 235–243.
35. *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996.
36. *Владимиров Ю. С.* Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
37. *Владимиров Ю. С., Миньков А. Г.* 7-Dimensional geometric model of gravi-electroweak interactions //Gravitation and Cosmology. Vol. 4 (1998), No. 2 (14), p. 103–106.
38. *Владимиров Ю. С., Губанов А. Н.* 8-Dimensional geometric model of gravi-strong interaction // Gravitation and Cosmology. Vol.4 (1998), No.3 (15), p. 193–198.

39. *Владимиров Ю. С., Миньков А. Г.* Particle rest masses in multidimensional geometric models // *Gravitation and Cosmology*. Vol.5 (1999), No.2 (18), p. 121–126.
40. *Владимиров Ю. С., Губанов А. Н.* Unification of gravi-electroweak and strong interactions in an 8-dimensional theory // *Gravitation and Cosmology*. Vol.5 (1999), No.4 (20), p. 277–280.
41. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. М.: Изд-во БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2002. (2-е издание, 2009.)
42. *Владимиров Ю. С., Болохов С. В.* On the classification of electromagnetic fields and reference frames in general relativity // *Gravitation and Cosmology*. Vol. 10 (2004), N. 1–2 (37–38), p. 71–76.
43. *Владимиров Ю. С.* Основания физики. М.: Изд-во БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2008.
44. *Гейзенберг В.* Развитие понятий в физике XX столетия // *Вопросы философии*. N. 1, 1975, с. 79–88.
45. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: ОГИЗ Гос. изд-во тех-теор. лит-ры, 1948.
46. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.-Л.: Гос. изд-во тех-теор. лит-ры, 1951.
47. *Голдберг Дж.Н.* (Goldberg J. N. ) Conservation laws in general relativity // *Phys. Rev.* V. 111, 1958, p. 315.
48. *Грановский Я. И., Пантюшин А. А.* К релятивистской теории тяготения // *Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат.*, 1965, N. 2, с. 65–69.
49. *Григорьева Л. Б., Захаров В. Д.* Гравитационно-инерциальные волны в общей теории относительности // *Сб. «Гравитация и теория относительности»*. Вып. 8. Казань, Изд-во Каз. гос. ун-та, 1971, с. 46.
50. *Грин Б.* Элегантная Вселенная. (Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории). М.: УРСС, 2004.
51. *Гудинсон П. А., Ньюинг Р. А.* (Goodinson P. A., Newing R. A.) // *J. Inst. Math. and Appl.* 1970. V. 6, p. 212.
52. *Гупта С.* Квантование гравитационного поля. Общая теория. // *Сб. «Новейшие проблемы гравитации»*. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961, с. 341–360.
53. *Данциг ван Д.* (Van Dantzig D.) On the relation between geometry and physics and the concept of space-time // *Funfzig Jahre Relativitatstheorie. Konferenz Bern, Basel.* 1955. Bd.1, S. 569.
54. *Дебеве Р.* (Debever R.) Tenseur de super-energie et composantes irreductibles du tenseur de Riemann // *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* V. 249, 1959, 1324; V. 250, 1960, 64.
55. *ДеВитт Б.* (DeWitt B.) Quantum Theory of Gravity I. The Canonical theory // *Phys. Rev.* V. 160, 1967, p. 1113–1148.
56. *Денен Г.* О динамике общей теории относительности // «Эйнштейновский сборник 1969–1970». М.: Наука, 1970, с. 140–161.
57. *Дирак П.* Космологические постоянные // *Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации»*. М.: Мир, 1979, с. 538–539.
58. *Дирак П.* Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.

59. *Дирак П.* Обобщенная динамика в гамильтоновой форме //Сб. «Новейшие проблемы гравитации». М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961, с. 128–138.
60. *Дэвис П.* (Davies P. C. W) The Physics of time assymetry. Berkely — Los Angeles: Univ. of California Press, 1974, 214 p.
61. *Ефремов А. П.* Квантерионные пространства, системы отсчета и поля. М.: Изд-во РУДН, 2005.
62. *Желнорович В. А.* Теория спиноров и ее применения. М.: Изд-во «Август-Принт», 2001.
63. *Жданов В. И., Пирагас К. А.* О круговых орбитах в динамике двух частиц, учитывающей запаздывание взаимодействия //Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». Вып. 5. М.: Атомиздат, 1974, с. 65–80.
64. *Захаров В. Д.* Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972. 200 с.
65. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.* Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971.
66. *Зельманов А. Л.* Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности //Докл. АН СССР, 1956, т. 107, N. 6, с. 815–818.
67. *Зельманов А. Л.* Кинеметрические инварианты и их отношение к хронометрическим инвариантам в теории тяготения Эйнштейна //Докл. АН СССР, 1973, т. 209, N. 4, с. 822–825.
68. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Квантовая теория гравитации //Вестник МГУ, N. 8, 1947, с. 103. (См. также в сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 446–459.)
69. *Иваненко Д. Д., Соколов А. А.* Классическая теория поля. М.-Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1951.
70. *Иваненко Д. Д., Сарданашивили Г. А.* Гравитация. Киев. Наукова думка. 1985.
71. *Иваницкая О. С.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применения. Минск. Изд-во «Наука и техника», 1969.
72. *Ингрехам Р. Л.* (Ingraham R. L.) Conformal relativity. I-VI //Nuovo Cim. 1979. V. 50B, N. 2, p. 233–270.
73. *Иномата А., Мак Кинли В. А.* (Inomata A., Mc Kinley W. A.) Geometrie theory of neutrinos //Phys. Rev. 1965. V. 140B, p. 1467.
74. *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.
75. *Калуца Т.* (Kaluza T.). К проблеме единства физики //Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 529–534.
76. *Каменев А. В.* Точное статическое сферически-симметричное решение 6-мерных уравнений Эйнштейна //Сб. «Проблемы гравитации и теории относительности». М.: Изд-во УДН им. П. Лумумбы, 1996, с. 20–25.
77. *Картан Э.* (Cartan E.) //L'enseignement mathematique. 24, 1924, 5.
78. *Картан Э.* Об обобщении понятия римановой кривизны и о пространствах с кручением //Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 535–537.
79. *Кентаро Яно* (Kentaro Yano) The Theory of Lie Derivatives and its Applications. Amsterdam. North- Holland Publ., 1955.

80. *Клейн О.* (Klein O.) Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie //Zeits.f. Physik, 1926, Bd. 37, S. 895.
81. *Клименков В. А., Владимиров Ю. С.* Renormalization of Planck masses of vector bosons in the eight-dimensional geometrical theory //Gravitation and Cosmology. Vol.10, (2004), N. 1–2 (37–38), p. 77–82.
82. *Клиффорд В.* О пространственной теории материи //Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 34–47.
83. *Кокарев С. С.* Geometrization of perfect fluid in 5-D Kaluza-Klein theory //Gravitation and Cosmology. Vol. 1 (1995), N. 3, p. 247–251.
84. *Кокуре Р.* (Coquereaux R.) Modulo 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics //Phys. Rev., 1982, v. 115B, N. 5, p. 389–395.
85. *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
86. *Крамер Д.* (Kramer D.) Axialsymmetrische Stationäre Lösungen der Projektiven Feldtheorie //Acta Phys. Polon., 1971, Bd 2, F.6, S.807–811.
87. *Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херлт Э.* Точные решения уравнений Эйнштейна (под редакцией Э. Шмутцера). М.: Энергоиздат, 1982.
88. *Кречет В. Г.* Спинорный анализ и физические свойства фермионов //Известия вузов (Физика). 1986, N. 10, с. 20–25.
89. *Кречет В. Г.* Гравитирующая материя во вращающихся космологических моделях //Сб. «Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация», Гарту: Изд-во Гартусского ун-та, 1988, с. 28–29.
90. *Кречет В. Г.* Geometrization of physical interactions, 5-dimensional theories and the many world problem //Gravitation and Cosmology. Vol. 1 (1995), N. 3, p. 199–203.
91. *Кулаков Ю. И.* Элементы теории физических структур (Дополнение Г. Г. Михайличенко) Новосибирск. Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1968.
92. *Кулаков Ю. И., Владимиров Ю. С., Карнаутов А. В.* Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. М.: Изд-во «Архимед», 1991.
93. *Кулаков Ю. И.* Теория физических структур. М.: 2004.
94. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
95. *Лебедев П. Н.* Избранные сочинения. М.-Л.: ГИЗ ТТЛ, 1949.
96. *Левашев А. Е., Ушаков Е. А.* Рассеяние частиц силовым полем как перемещение, ассоциированное с циклом по Э. Картану //Сб. «Теория относительности и гравитация». М.: Наука, 1976, с. 64–73.
97. *Легкий А. И.* Точное статическое сферически-симметричное решение 5-мерных уравнений Эйнштейна //Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М.: Атомиздат, 1979, вып. 10, с. 149–153.
98. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
99. *Людвиг Г., Скэнлан Г.* (Ludwig G., Scanlan G.) Classification of the Ricci tensor //Comm. Math. Phys. 1971. V. 20, p. 291.
100. *Мандельштам С.* (Mandelstam S.) Quantization of the Gravitational Field //Ann. of Phys. V. 19, 1962, p. 25–66.

101. *Мах Э.* Познание и заблуждение. М.: Изд-во БИНОМ (Лаборатория базовых знаний), 2003.
102. *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. Ижевск. Ижевск. республ. типогр. 2000.
103. *Мёллер К.* (Möller Ch.) Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity //Ann. Phys.,1961, v. 12, p. 118; Math.-fys. skr. danske vid. selskab., 1961, v. 1, N. 10.
104. *Мёллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.
105. *Менский М. Б.* Группа путей: измерения, поля, частицы. М.: Наука, 1983.
106. *Мизнер Ч.* (Misner C. W.) //Phys. Rev. 1969. V. 186, p. 1319.
107. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 1, 2, 3. Мир, 1977.
108. *Михайличенко Г. Г.* Математический аппарат теории физических структур. Горно-Алтайск. Изд-во Горно-Алт. гос. ун-та, 1997.
109. *Мицкевич Н. В.* Вращение в общей теории относительности //Сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». Вып. 7. М.: Атомиздат, 1976, с. 15–34.
110. *Мицкевич Н. В.* Общая теория относительности (Конспект лекций). Часть II. Теория поля. М.: Изд-во УДН, 1966.
111. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.
112. *Мицкевич Н. В.* О различии понятий «системы отсчета» и «системы координат» //Сб. «Физическая наука и философия». М.: Наука, 1973, с. 300–306.
113. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая Алгебра. Сер. СМБ. М.: Наука, 1965.
114. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
115. *Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.* Четырехмерность пространства и времени. М.-Л.: Наука, 1966.
116. *Моулд Р. А.* (Mould R. A.) An axiomatization of General Relativity //Proc. Amer. Phylos. Soc., 1959. Vol.103. N. 3, p. 485–529.
117. *Нарликар Дж.* (Narlikar J. V. ) On the general correspondence between field theories and the theories of direct interparticle action //Proc. Cambridge Philos.Soc., 1968, vol.64, p. 1071–1079.
118. *Нарликар Дж.В.* (Narlikar J. V. ). Инерция и космология в теории относительности Эйнштейна //Сб. «Астрофизика, кванты и теория относительности». М.: Мир, 1982, с. 498–534.
119. *Ньюмен Е. Т., Пенроуз Р.* An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients (Newman E. T., Penrose R.) //J. Math. Phys., 1962. V. 3, p. 566; Errata J. Math. Phys., 1963. CV. 4, p. 998.
120. *Ожунь Л. Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990;Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1988.
121. *Ожунь Л. Б., Селиванов К. Г., Телегди В. Л.* Гравитация, фотоны, часы //Успехи физ. наук. 1999. Т. 169, N. 10, с. 1141–1147.
122. *Павлов Д. Г.* Философские и математические основания финслеровых расширений теории относительности // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2005, № 2(4), с. 12–18.

123. *Павшич М.* (Pavsic M.) Unified theory of gravitation and electromagnetism, based on conformal group  $SO(2, 4)$  // *Nuovo Cim.*, 1977. V. 41B, N. 2, p. 397–427.
124. *Пантюшин А. А.* Теория прямого гравитационного взаимодействия тел // Сб. «Гравитация и теория относительности». Казань, 1969, т. 6, с. 30–40.
125. *Папаетру А.* (Papapetrou A.) // *Proc. Roy. Soc.*, 1951, v. 209, N. 1097, p. 248.
126. *Паули В.* (Pauli W.) Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogen koordinaten // *Ann. der Phys.*, 1933, Bd.18, S. 305–372.
127. *Пенроуз Р.* (Penrose R.). Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
128. *Пенроуз Р., Риндлер В.* (Penrose R., Rindler V.) Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987.
129. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
130. *Пижо П.* (Pigeaud P.) Unified fields in pentadimensional theory // *Repts. Math. Phys.*, 1978, vol.14, N. 2, p. 261–284.
131. *Пименов Р. И.* Пространства кинематического типа (Математическая теория пространства-времени). Ленинград: Наука, 1968.
132. *Пирагас К. А., Жданов В. И., Александров А. Н., Кудря Ю. Н., Пирагас Л. Е.* Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике. М.: Энергоатомиздат, 1995.
133. *Полищук Р. Ф.* Диадный подход к общей теории относительности // Докл. АН СССР, 1973. Т. 209, с. 76.
134. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
135. *Редже Т.* (Regge T.) Gravitational fields and quantum mechanics // *Nuovo Cim.* V. 7, 1958, p. 215.
136. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 18–33.
137. *Робб А. А.* (Robb A. A.) *The Absolute Relations of Time and Space.* Cambridge Univ. Press, 1921.
138. *Родичев В. И., Задонский Г. И.* К вопросу о комплексе энергии в общей теории относительности // Известия вузов (Физика). 1971. N. 10, с. 57.
139. *Родичев В. И.* Теория тяготения в ортогональном репере. М.: Наука, 1974.
140. *Румер Ю. Б.* Спинорный анализ. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
141. *Румер Ю. Б.* Исследования по 5-оптике. М.: ГИТТЛ, 1956.
142. *Румер Ю. Б.* Принципы сохранения и свойства пространства и времени // Сб. «Пространство, время, движение». М.: Наука, 1971, с. 107–125.
143. *Румянцев С. В.* О соотношении хронометрии и диадного метода в ОТО // Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон., 1977, N. 6, с. 115.
144. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
145. *Салам А.* Введение // Сб. «Введение в супергравитацию» М.: Мир, 1985, с. 16–18. 121–136.
146. *Салам А., Стрэдди Дж.* (Salam A., Strathdee J.) On Kaluza-Klein theory // *Ann. of Phys.*, 1982, v. 141, p. 316–352.



147. *Салингарес Н.* (Salingaros N.). On the classification of Clifford algebras and their relation to spinor in  $n$  dimensions // *Journ.Math.Phys.*, 1982. Vol.23, N 1, p. 1–7.
148. *Сахаров А. Д.* // Научные труды. М.: АОЗТ Изд-во «ЦентрКом», 1995.
149. *Синг Дж.Л.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
150. *Скоробогатько В. Я., Фешин Г. Н., Пелых В. А.* N-Точечная геометрия типа Евклида // Сб. «Математические методы и физико-механические поля». Киев, Наукова думка, 1975. Вып. 1, с. 5–10.
151. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
152. *Станюкович К. П., Мельников В. Н.* Гидродинамика, поля и константы. М.: Энергоатомиздат, 1983.
153. *Схоутен Я. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: ГОНТИ, 1939.
154. *Тетроде Г.* (Tetrode H.) Über der Wikugszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dinamik // *Z. Phys.*, 1922, Bd.10, S. 316–328.
155. *Тредер Г.* (Treder H.) Gravitonen // *Forts. Phys.*, 11, 1963, N. 3, S. 81–107.
156. *Туняк В. Н.* К определению комплекса энергии-импульса в тетрадной формулировке ОТО // *Изв. АН БССР. Сер. физ.- мат. наук*, 1977, N. 2, с. 66.
157. *Уилер Дж. А., Фейнман Р.* (Wheeler J. A., Feynman R. P.) Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // *Rev.Mod.Phys.*, 1945, vol.17, p. 157–181.
158. *Уилер Дж. А., Фейнман Р.* (Whileer J. A., Feynman R. P.) Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action // *Rev.Mod.Phys.*, 1949, vol.24, p. 425–433.
159. *Уилер Дж.* Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: Издат. иностр. лит-ры, 1962.
160. *Уилер Дж.* Предвидение Эйнштейна. Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
161. *Ушаков Е. А.* Перемещения, ассоциированные с циклом, в некоторых задачах релятивистской физики. Канд. диссертация. Минск. Белор. гос. ун-т, 1975.
162. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
163. *Фейнман Р.* Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике // Сб. «Вопросы причинности в квантовой механике». М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955, с. 167–207.
164. *Фейнман Р.* (Feunman R.) Нобелевская лекция «Разработка квантовой электродинамики в пространственно-временном аспекте» // Сб. «Характер физических законов». М.: Мир, 1968, с. 193–231.
165. *Финкельштейн Р.* (Finkelstein R.) Elementary Interactions in Spaces with Torsion // *Ann. of Phys.* V. 12, 1961, p. 200–221; V. 15, 1961, p. 223–249.
166. *Фок В. А.* (Fock V.) Zur Schrodingerishen Wellenmechanik // *Zeits. für Phys.*, 1926, Bd.38, N. 3, S. 242–250.
167. *Фок В. А.* (Fock V.) Über die invariante Form der Wellen und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt // *Zeits. für Phys.*, 1927, Bd.39, S.226.

168. *Фок В. А., Иваненко Д. Д.* On a possible geometric interpretation of relativistic quantum theory // *Zeits. für Phys.*, 1929, Bd.54, S.798.
169. *Фок В. А.* Геометризация дираковской теории электрона // *Zeits. für Phys.*, 1929, Bd.57, S.261. (Русский пер. в сб. «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». М.: Мир, 1979, с. 415–432.
170. *Фок В. А.* Симметрия атома водорода // *Сорена*, 1935. Т. 5, с. 3–9.
171. *Фок В. А.* Атом водорода и неевклидова геометрия // *Известия АН СССР*. 1935. Т. 2, с. 169–184.
172. *Фок В. А.* Теория пространства времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.
173. *Фок В. А.* Квантовая физика и философские проблемы // Сб. «Физическая наука и философия». М.: Наука, 1973, с. 55–77.
174. *Фок В. А.* Об основных принципах теории тяготения Эйнштейна // Сб. «Современные проблемы гравитации». Тбилиси. Издат. Тбил. гос. ун-та, 1967, с. 5–11.
175. *Фоккер А. Д.* (Fokker A. D.) Ein invarianter Variationssatz für die Bewegung mehrerer elektrischer Massenteilchen // *Z. Phys.*, 1929, Bd.58, S. 386–393.
176. *Френкель Я. И.* // *Природа электрического тока.* (Беседы-диспут в Ленинградском политехническом институте). М.-Л.: Издат. Всесоюз. электротехн. общ-ва. 1930.
177. *Фролов Б. Н.* Об истинном тензоре энергии-импульса гравитационного поля // *Вестник МГУ. Сер. физ. и астрон.*, 1964, N. 2, с. 56.
178. *Фролов Б. Н.* Пуанкаре-калибровочная теория гравитации. М.: Изд-во Моск. пед. гос. ун-та, 2003.
179. *Хёньль Г.* К истории принципа Маха // «Эйнштейновский сборник-1968». М.: Наука, 1968, с. 258–285.
180. *Хиллераас Е. А.* (Hillegaas E. A.) Волновые уравнения задачи Кеплера в импульсном пространстве // *Zeitschrift für Physik*, 1932, V74, N. 3,4, p. 216.
181. *Хлебников В. И.* Гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем с вращением в формализме Ньюмена-Пенроуза // *Изв. вузов (Физика)*, 1976, N. 3, с. 118.
182. *Хлопов М. Ю.* Основы космомикрoфизики. М.: УдиториаЛ УРСС, 2004, 366 с.
183. *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F., Narlikar J. V. ). Action at a distance in physics and cosmology. San Francisco: W. N. Freeman and Comp., 1974.
184. *Хойл Ф., Нарликар Дж.* (Hoyle F., Narlikar J.) Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics // *Rev.Mod.Phys.*, 1995, vol.67, N. 1, p. 113–155.
185. *Хуанг К.* (Huang K.). Кварки, лептоны и калибровочные поля. М.: Мир, 1985.
186. *Черепашук А. М., Чернин А. Д.* Вселенная, жизнь, черные дыры. Фрязино: Изд-во «Век-2», 2003.
187. *Черников Н. А.* Необходимый объект в ОТО — фоновая связность // Сб. «Проблемы гравитации». Ереван. Изд-во Ерев. ун-та, 1989, с. 58–69.
188. *Шифф Л.* (Schiff L. I.) // *Phys. Rev. Lett.* 1960. V. 4, p. 215; *Proc. Nat. Acad. Sci. US.* 1960. V. 46, p. 871.

189. Шмутцер Э. (Schmutzer E.) Projectiv unified field theory. I-V //Exp. Techn. Phys., 1980, Bd 28, S. 395–402, 499–508; 1981, Bd 29, S. 129–136, 337–341, 463–480.
190. Эддингтон А. С. Теория относительности. Л.-М.: ОНТИ, Гос. тех.-теорет. изд-во, 1934. 508 с.
191. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности //Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965, с. 452–504.
192. Эйнштейн А. Принципиальное содержание общей теории относительности //Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965, с. 613–615.
193. Эйнштейн А. О гравитационных волнах //Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965, с. 631–646.
194. Эйнштейн А. Неевклидова геометрия и физика //Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966, с. 178–182.
195. Эйнштейн А., Майер В. Единая теория гравитации и электричества //Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966, с. 366–386.
196. Эйнштейн А., Бергман П. Обобщение теории электричества Калуцы //Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966, с. 492–513.
197. Эйнштейн А. Вводные замечания об основных понятиях //Собрание научных трудов. Т. 3. М.: Наука, 1966, с. 623–626.
198. Эйнштейн А. Физика и реальность //Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967, с. 200–227.
199. Эйнштейн А. Автобиографические заметки //Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967, с. 259–294.
200. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики //Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967, с. 357–544.
201. Янг Ч., Миллс Р. (Yang C. N., Mills R. L.) Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность //Сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля». М.: Мир, 1964, с. 28–38.
202. Яновский Б. М. Земной магнетизм. Т. 1. Ленинград. Изд-во Ленингр. ун-та, 1964, с. 194–203.

---

---

# Предметный указатель



## Алгебра

- Грассмана* 417
- диадного метода 228
- диарного метода 240
- Клиффорда* 255
- монадного метода 96
- спиноров 245
- тензорная 24
- тетрадного метода 218

## Ароматы

- кварков 338
- лептонов 339

## Биспинор 249

## Близкодействие 452

## Бозоны

- хиггсовские 373
- W-бозоны 352
- Z-бозоны 352

## Вектор

- Киллинга* 150
- Райнича* 429
- ускорения системы отсчета 108
- энергии гравитационного поля 473

## Взаимодействие

- гравитационное 33, 267, 414
- запаздывающее 434
- опережающее 434
- сильное 321
- электромагнитное 176
- электрослабое 351

## Гармоники 281, 311, 340

## Геометрия

- биметрическая 137
- двухсвязностная 146
- Евклида* 82
- Лобачевского* 82
- многоточечная 138
- Римана* 81
- Схоутена* 140
- Финслера* 138

## Геометродинамика (Уилера) 427

## Геометрофизика 12, 16

## Гиперзаряд

- слабых взаимодействий 353
- цветовой 323, 330

## Гиперплотность лагранжиана

- 5-мерная 283
- 6-мерная 382, 384
- 7-мерная 350, 362
- 8-мерная 311, 333

## Глюоны 310, 321

## Гравитоны 505

## Группа преобразований

- допустимых координатных 22
- конформных 172
- Лоренца* 249
- Пуанкаре* 414
- суперсимметричных 417
- трансляций 414
- $SL(2, C)$  246
- $SU(2)$  252, 412
- $SU(3)$  321

- $U(1)$  411
- Дальнодействие 432, 453
- Действие  
прямого взаимодействия  
гравитационного 441  
электромагнитного 433
- Диаграмма  
классификации  
электромагнитных полей 208  
*Пенроуза—Петрова* 167  
*Фейнмана* 325, 354, 507
- Закон  
инерции квадратичных форм 29  
сохранения заряда 466  
сохранения энергии-импульса 465
- Заряд  
цветовой 321, 323  
электрический 281, 340, 360
- Инвариантность  
калибровочная 275  
кинеметрическая 105  
хронометрическая 101
- Калибровка  
кинеметрическая 103  
кинеорометрическая (дважды  
кинеметрическая) 231  
хронометрическая 99  
хронохориометрическая (дважды  
хронометрическая) 235
- Кварки 310, 321, 338, 344
- Классификация  
грави=инерциальных волновых  
процессов 489  
метафизических парадигм 401  
однородных пространств 155  
*Петрова* пространств Эйнштейна  
162  
систем отсчета 191  
формулировок ОТО 210  
электромагнитных полей 206
- Компактификация 281
- Компоненты  
6-мерной диады 379  
7-мерной триады 358  
8-мерной тетрады 328
- Константа (постоянная)  
гравитационная ньютоновская 33  
гравитационная эйнштейновская  
41  
компактификации 281, 311  
космологическая 41  
планковская (длина) 510
- Конус световой (изотропный) 287
- Концепция  
близкодействия 452  
дальнодействия 432
- Коэффициенты  
вращения *Риччи* 222  
разложения тетрады 311  
разложения триады 343  
*Фока—Иваненко* 263
- Кривизна  
сегментарная 142  
скалярная 39
- Критерии гравитационных волн  
алгебраические 483  
дифференциальные 487  
референционные 488
- Лагранжиан  
квдратичный гравитационный  
204  
теории Эйнштейна 183  
электромагнитный 182
- Лептоны 339, 361
- Масса  
бозонов 331, 370  
планковская 510
- Матрицы  
*Гелл-Манна* 323  
*Дирака* 251  
*Паули* 247  
тензора кривизны 38  
унитарные 252  
эрмитовы 254

- 16-рядные 319  
8-рядные 365
- Метафизика 399
- Метод  
диадный 228  
диарный 239  
кинеметрических инвариантов 102  
монадный 96  
октадный 312  
тетрадный 218  
хронометрических инвариантов 99
- Метрика  
*Бонди—Пиранни—Робинсона* 172  
*Вайдья* 57  
*Геделя* 129  
*Казнера* 155  
*Каменева* 289  
*Керра* 68  
*Керра—Ньюмена* 180  
*Коттлера* 57  
*Крамера—Легкого* 288  
*Кречета* 130  
*Лензе—Тирринга* 68  
*Минковского* 29, 51  
*НУТ* 181  
*Переса* 171  
*Райсснера—Нордстрема* 180  
*Розена* 171  
*Такено* 171  
*Тангерлини* 270  
*Фишера* 180  
*Фридмана* 77  
*Эйнштейна—Розена* 171  
    закрытая модель 82  
    открытая модель 84  
    плоская модель 85  
*Шварцшильда* 54  
4-мерная 27  
5-мерная 272  
6-мерная 380  
7-мерная 347  
8-мерная 313
- Механизм Хиггса 373
- Миропонимание 400  
    геометрическое 401, 426  
    монистическое 403  
    реляционное 402  
    теоретико-полевое 402  
    триалистическое 399
- Модель  
    Вайнберга—Салама—Глэшоу 351  
    однородная 154  
    однородная изотропная 76
- Операторы дифференцирования  
    диадного 237  
    ковариантного 35  
    монадного  
        временного 111  
        пространственного 111  
    тетрадного 222, 317  
    триадного 349
- Оптика  
    5-оптика *Румера* 298  
    6-оптика 377, 386
- Парадигма 499  
    дуалистическая 400
- Парадокс  
    *Бауэра* 472  
    близнецов 216
- Параллельный перенос 140
- Перемещения, ассоциированные  
    с циклом (Картана) 157
- Плотность  
    критическая 91  
    лагранжиана  
        модели  
        Вайнберга—Салама—Глэшоу  
        351, 352  
    ОТО 184  
    спинорного поля 258  
    хромодинамики 322  
    электромагнитного поля 182  
    материи 41
- Поглотитель *Фейнмана—Уилера* 438
- Поколения элементарных частиц 338

- Поле  
 калибровочное 411  
 скалярное 177  
 спинорное 258  
 тензорное 405  
 хиггсовское 373  
 электромагнитное 176
- Преобразования  
 допустимые координатные 22  
 калибровочные 176, 280  
 конформные 172, 332  
 линейные 245, 248  
 многомерные 275  
 суперсимметричные 418
- Принцип  
*Маха* 49, 439  
 неопределенностей 509  
 усреднения по скрытым  
 размерностям 312  
*Фокаера* 433, 441
- Производная  
 ковариантная 35  
*Ли* 148  
 «удлиненная»  
 в 5-мерии 276, 281  
 в модели  
 Вайнберга—Салама—Глэшоу  
 353  
 в хромодинамике 323  
 электромагнитная 177  
 хронометрически инвариантная  
 112
- Пространство  
 абсолютного параллелизма 145  
 внутреннее 412  
 изотопическое 412  
 координатное 21  
*Лобачевского* 82  
 скоростей 244
- Пространство-время  
*Минковского* 51
- Псевдотензор гравитационного поля  
 469  
*Ландау—Лифшица* 471
- Меллера—Мицкевича* 471  
*Эйнштейна* 470
- Размерность 137, 271, 309
- Расщепление  
 1 + 1 + 1 + 1- 218  
 1 + 1 + 2- 228  
 1 + 3- 95  
 2 + 2- 239  
 4 + 1- 274  
 4 + 1 + 1- 380  
 4 + 1 + 1 + 1- 347  
 4 + 1 + 1 + 1 + 1- 313
- Редукционизм 399
- Редуцирование 274
- Сектор  
 бозонный 322, 346, 351  
 фермионный 329, 352, 364
- Сигнатура 29, 274, 279
- Символы  
*Кристоффеля* 32  
*Кронекера* 28  
*Леви-Чивиты* 30
- Симметрии  
 групповые 21  
 тензора *Римана—Кристоффеля* 37
- Система  
 координат 21  
 гармоническая 43  
 геодезическая 43  
 декартова 42  
 локально-геодезическая 42  
 локально-декартова 29  
 отсчета 94–119  
 геодезическая 132  
 инерциальная 102  
 киллингова 132  
 неинерциальная 115  
 нормальная 102  
 синхронная 132  
 сопутствующая 76, 121
- Скаляризм 285, 429
- Соответствия  
 геодезические 174  
 проективное 174

- Спин  
изотопический 323, 330, 340, 353
- Спинор  
многомерный 311  
2-компонентный 245
- Спинтензор 247
- Суперпотенциал гравитационного поля 469
- Суперпространство 416  
Уилера—ДеВитта 197
- Суперсимметрия 418
- Тензор 24  
*Вейля* 173  
дуально сопряженный 169  
ковариантный 24  
контравариантный 24  
кривизны 37  
кручения 141  
*Леви-Чивиты* 30, 202  
метрический  
многомерный 272, 313, 347  
4-мерный 27  
*Римана—Кристоффеля* 37  
*Риччи* 39  
скоростей деформаций 108  
угловой скорости вращения 108  
физико-геометрический 107  
электромагнитного поля 176  
энергии-импульса 41, 177, 465
- Теорема  
*Меллер* 472  
*Остроградского—Гаусса* 465  
строгая теорема частного 26
- Теория  
*Вейля* 143  
*Йордана—Бранса—Дикке* 296  
калибровочная 410  
*Калуцы* 278, 284  
*Калуцы—Клейна* 376  
*Клейна—Фока—Румера* 296  
линеризованной гравитации 490  
*Логунова* (РТГ) 405  
общая теория относительности (ОТО) 20, 49, 142, 443  
поглотителя 437  
прямого межчастичного взаимодействия 432, 441  
*Райнича—Уилера* 428  
*Финкельштейна* 146  
*Фоккера—Фейнмана* 433  
*Эйнштейна—Картана* 145
- Тетрада 218, 313
- Тождества  
*Бианки* 38  
*Риччи* 37, 118  
2-го порядка  
(дифференциальные) 488
- Топология 281  
тора 311
- Угол *Вайнберга* 352, 360
- Уравнения  
*Гамильтона*  
для гравитации 196  
для электромагнетизма 194  
геодезических линий  
4-мерные 32, 114  
5-мерные 277  
*Даламбера* 443  
движения заряженной частицы 34  
*Дебеве* 170  
девиаций геодезических 162  
*ДеВитта* 504  
*Дирака* 258, 261  
в ОТО 264  
*Киллинга* 150  
*Клейна—Фока* 178, 261  
*Максвелла* 177, 187, 261  
*Матиссона—Папаетру* 48, 115  
*Ньютона* 32, 115  
*Пуассона* 42, 270, 403  
связи  
гамильтоновой 196  
продольной 196  
*Шрёдингера* 451  
*Эйлера—Лагранжа* 184, 196  
*Эйнштейна* 40, 117



## Условия

- де Дондера—Фока* 43
- Кориналдези—Папанетру* 48, 116
- Лоренца* 182

## Фактор

- конформный 172, 332, 371
- экспоненциальный в
  - 5-мерной теории Калуцы 281
  - 5-мерной теории Клейна 297
  - 6-мерной теории 387
  - 7-мерной теории 340
  - 8-мерной теории 311

## Формализм

- Ньюмена—Пенроуза* 225
- Палатини* 185

## Формула

- Гелл-Манна* 340

## Функция

- Грина* 437
- дираковская  $\delta$  функция 433, 436

## Холизм 399

- Хромодинамика 321
- Хроногеометрия 214

## Частицы

- дипольные 46
- монопольные 45
- пробные 44
- элементарные 339

## Эргосфера 69

## Эффект

- гравитационного красного смещения 124
- космологического красного смещения 90, 122
- Мицкевича* 74, 128
- отклонения света 66
- смещения перигелия 63
- Хокинга* 73
- Широкова* 132
- Шиффа* 75



**Б. РИМАН**  
**(1826 – 1866)**

**О ГИПОТЕЗАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ  
ГЕОМЕТРИИ \***

**План исследования**

Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно также а priori, возможна ли такая связь.

---

\* Вступительная лекция, прочитанная Риманом 10 июня 1854 года.



**В. КЛИФФОРД**  
**(1845–1879)**

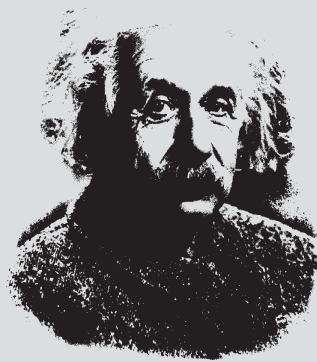
**О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ МАТЕРИИ\***

(Резюме)

Риман показал, что как существуют разного рода линии и поверхности, так существуют и разного рода пространства трех измерений и что мы можем лишь опытным путем установить, какого рода то пространство, в котором мы живем. В частности, в рамках опытов на поверхности листа бумаги верны аксиомы геометрии на плоскости, но мы знаем, что в действительности лист испещрен множеством малых рубчиков и бороздок, на которых (поскольку полная кривизна не равна нулю) эти аксиомы несправедливы. Точно так же, утверждает он, хотя аксиомы стереометрии верны в рамках опыта для конечных участков нашего пространства, у нас все же нет оснований заключать, что они верны и для очень малых участков; и у нас были бы основания заключить, что для очень малых участков пространства они неверны, если бы это могло помочь в объяснении физических явлений.

---

\* On the Space-Theory of Matter, в книге: Clifford W. K., *Mathematical Papers*, MacMillan, New York–London, 1968, стр. 21 (впервые статья опубликована в 1876 году).



**А. ЭЙНШТЕЙН**  
**(1879 – 1955)**

### **ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ \***

Излагаемая здесь теория является наиболее радикальным обобщением общеизвестной в настоящее время «теории относительности»; последнюю в отличие от первой я буду называть «специальной теорией относительности», предполагая, что с нею читатель знаком. Обобщение теории относительности существенно облегчилось благодаря работам математика Минковского, который впервые вскрыл формальное равноправие пространственных координат и временной координаты в специальной теории относительности и использовал это равноправие для построения теории. Необходимый для общей теории относительности вспомогательный математический аппарат уже существовал в форме «абсолютного дифференциального исчисления», основы которого были заложены в исследованиях Гаусса, Римана и Кристоффеля, посвященных неевклидовым пространствам; это исчисление, приведенное в систему Риччи и Леви-Чивитой, уже применялось для решения задач теоретической физики.

---

\* Настоящая работа «Основы общей теории относительности» была впервые опубликована в журнале: *Annalen der physic. Vierte Folge. Band 49* (1916).



**ДЖ. УИЛЕР**  
**(1911 – 2008)**

## **КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА КАК ГЕОМЕТРИЯ**

**Гравитация, электромагнетизм,  
неквантованные заряд и масса  
как свойства искривленного  
пустого пространства \***

Если классическую физику рассматривать как совокупность теорий гравитации, свободного от источников электромагнитного поля, неквантованного заряда и неквантованной массы, связанной с концентрацией энергии электромагнитного поля (геонов), то классическая физика может быть описана с помощью искривленного пустого пространства и ничего больше. При этом существующая теория никак не меняется. Электромагнитное поле задается «максвелловским квадратным корнем» свернутого тензора кривизны Риччи и Эйнштейна. Как показал Райнич тридцать лет назад, уравнения Максвелла сводятся тогда к простому утверждению о связи кривизны Риччи со скоростью ее изменения. В противоположность другим единым теориям поля в этом случае обычные теории Максвелла и Эйнштейна приводят к *«исконно единой теории поля»*.

---

\* Настоящая работа представляет собой шестую часть исследования, посвященного критике классической теории поля. Пятая часть опубликована в журнале: *Physical Review*, 97, 51 (1956).

---

*Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"*

*Научное электронное издание*

**Владимиров Юрий Сергеевич**

## **ГЕОМЕТРОФИЗИКА**

Ведущий редактор *А. Н. Евсеевичева*

Художник *Н. А. Новак*

Корректор *Е. Н. Клитина*

Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

Подписано к использованию 03.02.20.

Формат 145×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272

e-mail: [info@pilotLZ.ru](mailto:info@pilotLZ.ru), <http://www.pilotLZ.ru>

---

Путем чисто математических рассуждений Риман пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики; эта мысль нашла свое фактическое осуществление семьдесят лет спустя в общей теории относительности, которая соединила в одно целое геометрию и теорию тяготения.

*А. Эйнштейн*

Изменение кривизны пространства — это то, что в действительности происходит при том явлении, которое мы называем движением материи, как весомой, так и эфира; что в физическом мире не имеет места ничего, кроме этого изменения, подчиняющегося (возможно) закону непрерывности.

*В. Клиффорд*

Пространство-время не есть арена для физики, это вся классическая физика.

*Дж. Уилер*

Все развитие, приведшее к перевороту в понимании геометрии, следует признать за здоровое и сильное движение. Подготавливаемое столетиями, значительно усилившееся в наши дни, оно никоим образом не может считаться уже законченным. Напротив, следует ожидать, что движение это принесет еще богатейшие плоды — и именно в смысле теории познания — не только для математики и геометрии, но и для других наук.

*Э. Мах*

Все элементарные понятия допускают сведение к пространственно-временным понятиям. Только такие понятия фигурируют в «законах природы»; в этом смысле все научное мышление «геометрично». (...) Пространственно-временные законы полны. Это означает, что нет ни одного закона природы, который нельзя было бы свести к некоторому закону, сформулированному на языке пространственно-временных понятий.

*А. Эйнштейн*